

Jadwiga LAL-JADZIAK, Sergiusz SIENKOWSKI
 UNIWERSYTET ZIELONOGÓRSKI, INSTYTUT METROLOGII ELEKTRYCZNEJ

Modelowanie obciążenia estymatora wartości średniokwadratowej wybranych klas sygnałów

dr hab. inż. Jadwiga LAL-JADZIAK

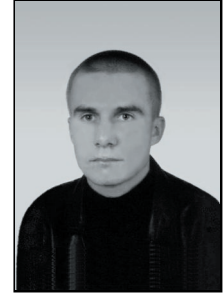
Profesor nadzw. Uniwersytetu Zielonogórskiego oraz UMK w Toruniu. Autor 45 publikacji, w tym 2 monografii, twórcza 3 patentów. Członek Sekcji Podstawowych Problemów Metrologii Komitetu Metrologii i Aparatury Pomiarowej PAN. Uprawiane aktualnie kierunki prac: technika korelacyjna, miernictwo sygnałów przypadkowych, estymacja charakterystyk sygnału na podstawie jego cyfrowej reprezentacji, przetwarzanie a-c z ditherem.



e-mail: j.jadziak@ime.uz.zgora.pl

mgr inż. Sergiusz SIENKOWSKI

Absolwent Wydziału Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Zielonogórskiej (2001 r.) oraz Wydziału Elektrotechniki, Informatyki i Telekomunikacji Uniwersytetu Zielonogórskiego (2003 r.). Obecnie asystent w Instytucie Metrologii Elektrycznej Uniwersytetu Zielonogórskiego. Zajmuje się zagadnieniami związanymi z cyfrowym przetwarzaniem sygnałów i oceną niepewności pomiarów.



e-mail: s.sienkowski@ime.uz.zgora.pl

Streszczenie

Modele obciążenia znajdują zastosowanie w badaniach estymatorów parametrów i charakterystyk sygnałów, a także w określaniu ich niepewności. W publikacji przedstawiono modele obciążenia estymatora wartości średniokwadratowej powodowanego kwantowaniem. Specjalne miejsce poświęcono sygnałom poliharmonicznym oraz sygnałom poliharmonicznym z sygnałami losowymi o rozkładzie równomiernym, gaussowskim oraz trójkątnym.

Słowa kluczowe: funkcja gęstości prawdopodobieństwa, funkcja charakterystyczna, wartość średniokwadratowa, obciążenie estymatora

Modeling of bias of mean square value estimator for selected signals

Abstract

Models of bias are used in research of parameters and characteristics of signal estimators and in determination their uncertainties. In this article are presented models of mean square value estimator bias caused by quantization. Special attention is paid to the poliharmonic signals and poliharmonic signals with uniform, Gaussian and triangular PDF signal.

Keywords: probability density function, characteristic function, mean square value, estimator bias

1. Wstęp

Modelowanie błędów parametrów i charakterystyk sygnałów powodowanych kwantowaniem wymaga znajomości funkcji charakterystycznych badanych sygnałów. Funkcje te można otrzymać na podstawie ich funkcji gęstości prawdopodobieństwa.

W literaturze można znaleźć wyrażenia opisujące funkcje charakterystyczne oraz błędy odpowiadające nielicznym sygnałom [1, 3, 4, 5].

W pracy przedstawione zostały wyniki analiz wpływu kwantowania na dokładność wyznaczania wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego, prostokątnego, trójkątnego, piłokształtnego oraz sumy tych sygnałów z sygnałami o rozkładzie równomiernym, gaussowskim oraz trójkątnym.

Do generowania, weryfikacji i prezentacji błędów kwantowania zastosowany został, opracowany w środowisku LabWINDOWS® program komputerowy [8]. Program ten umożliwia m.in. generowanie jedno- i dwuwymiarowych funkcji gęstości, jedno- i dwuwymiarowych funkcji charakterystycznych oraz modeli błędów powodowanych kwantowaniem.

2. Podstawy teoretyczne

Przedstawienie zagadnienia wymaga znajomości pojęć związanych z wyznaczaniem funkcji gęstości prawdopodobieństwa, funkcji charakterystycznej, wartości średniokwadratowej skwantowanego sygnału oraz błędu estymacji nazywanego obciążeniem estymatora wartości średniokwadratowej.

Twierdzenie 1

Jeśli dana jest zmienna losowa T o gęstości $f(t)$ i różnowartościowa funkcja $x=h(t)$, to nowa zmienna losowa X ma gęstość [2]

$$p(x) = f(h^{-1}(x)) \left| \frac{dt}{dx} \right| \quad (1)$$

gdzie $h^{-1}(x)$ jest funkcją odwrotną do $h(t)$.

Funkcja charakterystyczna jest transformacją Fouriera funkcji gęstości prawdopodobieństwa $p(x)$ do dziedziny v ze zmianą znaku. Dla jednowymiarowej ciągłej zmiennej losowej X jest ona równa [7]

$$\Phi_x(v) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{jvx} dx \quad (2)$$

natomiast dla zmiennej losowej X skokowej wyraża się wzorem [7]

$$\Phi_x(v) = \sum_{x \in S_x} P(\xi = x) e^{jvx} \quad (3)$$

gdzie S_x jest zbiorem punktów skokowych rozkładu.

Twierdzenie 2 (Widrowa)

Jeżeli funkcja charakterystyczna ma ograniczoną dziedzinę, tzn.

$$\Phi_x(v) = 0, \quad |v| \geq \frac{2\pi}{q} - \varepsilon \quad (4)$$

gdzie ε jest dowolnie małą liczbą dodatnią, to wszystkie istniejące momenty sygnału x mogą być wyznaczone z momentów skwantowanego sygnału x_q [9, 10].

Moment drugiego rzędu sygnału x nazywany wartością średniokwadratową może być wyznaczony przez różniczkowanie funkcji charakterystycznej

$$E[x^2] = -\frac{d^2\Phi_x(x)}{dx^2}\Big|_{v=0} \quad (5)$$

Zgodnie z teorią kwantowania w warunkach spełnienia założenia twierdzenia 2 słuszną jest zależność [9, 10]

$$E[x_q^2] = E[x^2] + \frac{q^2}{12} \quad (6)$$

łącząca wartość średniokwadratową $E[x^2]$ sygnału z jej estymatorem $E[x_q^2]$ uzyskanym na podstawie sygnału skwantowanego.

Wartość średniokwadratowa skwantowanego sygnału x_q przyjmuje postać [5]

$$E[x_q^2] = E[x^2] + \frac{q^2}{12} + \frac{q}{\pi} \sum_{i \neq 0}^{\infty} \dot{\Phi}_x\left(\frac{2\pi}{q}i\right) \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{i \neq 0}^{\infty} \Phi_x\left(\frac{2\pi}{q}i\right) \frac{(-1)^i}{i^2} \quad (7)$$

Gdyby zaistniał warunek (4), to zależność (7) przyjęłaby postać (6), co oznacza, że składowa

$$b = E[x_q^2] - E[x^2] - \frac{q^2}{12} = \frac{q}{\pi} \sum_{i \neq 0}^{\infty} \dot{\Phi}_x\left(\frac{2\pi}{q}i\right) \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{i \neq 0}^{\infty} \Phi_x\left(\frac{2\pi}{q}i\right) \frac{(-1)^i}{i^2} \quad (8)$$

obciążenia przyjęłaby wartość równą zero.

3. Funkcje gęstości oraz funkcje charakterystyczne wybranych klas sygnałów

Z wyjątkiem sygnału prostokątnego, którego obwiednia nie jest funkcją różnowartościową, funkcje gęstości rozkładu wartości sygnałów poliharmonicznych obliczone zostały na podstawie twierdzenia 1.

W pracy [8] wykazano, że dla takich sygnałów

$$f(h^{-1}(x)) = \frac{\omega}{\pi} \quad (9)$$

Rozważmy dla przykładu sygnał trójkątny o wypełnieniu $\lambda=0.5$. Funkcję odwrotną do obwiedni tego sygnału można wyrazić wzorem

$$t = h^{-1}(x) = \frac{\pi}{2A\omega} x \quad (10)$$

gdzie A jest amplitudą sygnału. Ponadto

$$\left|\frac{dt}{dx}\right| = \frac{\pi}{2A\omega} \quad (11)$$

Korzystając z (1), (9) i (11) funkcję gęstości sygnału trójkątnego można wyrazić wzorem

$$p(x) = \frac{1}{2A} \quad (12)$$

Tę samą funkcję gęstości przypisać można sygnałowi piłokształtnemu. Przedstawione w artykule własności błędów kwantowania sygnału trójkątnego odpowiadają również sygnałowi piłokształtnemu.

W przypadku obwiedni sygnału prostokątnego, odpowiadająca mu zmienna losowa X ma rozkład dyskretny o wartościach międzyszczytowych przyjmowanych z prawdopodobieństwem zależnym od współczynnika wypełnienia $\lambda \in [0, 1]$ tego sygnału.

W tab. 1 zestawiono zależności na funkcje gęstości i funkcje charakterystyczne sygnałów, które były przedmiotem prowadzonych badań, przy czym: 1 – odpowiada funkcji gęstości i funkcji charakterystycznej sygnału o rozkładzie równomiernym, 2 – sygnału o rozkładzie gaussowskim, 3 – sygnału o rozkładzie trójkątnym, 4 – sygnału sinusoidalnego, 5 – sygnału prostokątnego, 6-7 - sygnału trójkątnego lub piłokształtnego, 8 – sumy sygnału sinusoidalnego i sygnału o rozkładzie równomiernym, 9 – sumy sygnału sinusoidalnego i sygnału o rozkładzie gaussowskim, 10 – sumy sygnału sinusoidalnego i sygnału o rozkładzie trójkątnym, 11 – sumy sygnału prostokątnego i sygnału o rozkładzie równomiernym, 12 – sumy sygnału prostokątnego i sygnału o rozkładzie gaussowskim, 13 – sumy sygnału prostokątnego i sygnału o rozkładzie trójkątnym, 14-15 – sumy sygnału trójkątnego lub piłokształtnego i sygnału o rozkładzie równomiernym, 16-17 – sumy sygnału trójkątnego lub piłokształtnego i sygnału o rozkładzie gaussowskim, 18-19 – sumy sygnału trójkątnego lub piłokształtnego i sygnału o rozkładzie trójkątnym.

Tab. 1. Funkcje gęstości prawdopodobieństwa i funkcje charakterystyczne
Tab. 1. Probability density functions and characteristic functions

l.p.	Funkcja gęstości	Funkcja charakterystyczna
1	$p(x) = \begin{cases} 1/2A_d, & x \leq A_d \\ 0, & \text{poza tym} \end{cases}$	$\Phi_x(v) = \frac{\sin(A_d v)}{A_d v}$
2	$p(x) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \exp\left(-0.5\left(\frac{x}{\sigma_n}\right)^2\right)$	$\Phi_x(v) = \exp(-0.5v^2\sigma_n^2)$
3	$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{A_d} \left(1 - \frac{ x }{A_d}\right), & x \leq A_d \\ 0, & \text{poza tym} \end{cases}$	$\Phi_x(v) = \frac{2 - 2\cos(A_d v)}{A_d^2 v^2}$
4	$p(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}}$	$\Phi_x(v) = J_0(Av)$
5	$p(x) = \begin{cases} 1-\lambda, & x = -A \\ \lambda, & x = A \\ 0, & \text{poza tym} \end{cases}$	$\Phi_x(v) = (1-\lambda)e^{-jvA} + \lambda e^{jvA} = \cos(Av) + j[(2\lambda-1)\sin(Av)]$, $j = \sqrt{-1}$
6	$p(x) = \begin{cases} 1/2A, & x \leq A \\ 0, & \text{poza tym} \end{cases}$	$\Phi_x(v) = \frac{\sin(Av)}{Av}$
7		$\Phi_x(v) = J_0(Av) \frac{\sin(A_d v)}{A_d v}$
8	-	$\Phi_x(v) = J_0(Av) \exp(-0.5v^2\sigma_n^2)$
9	-	$\Phi_x(v) = J_0(Av) \frac{2 - 2\cos(A_d v)}{A_d^2 v^2}$
10	-	$\Phi_x(v) = \{\cos(Av) + j[(2\lambda-1)\sin(Av)]\} \frac{\sin(A_d v)}{A_d v}$
11	-	$\Phi_x(v) = \{\cos(Av) + j[(2\lambda-1)\sin(Av)]\} \exp(-0.5v^2\sigma_n^2)$
12	-	$\Phi_x(v) = \{\cos(Av) + j[(2\lambda-1)\sin(Av)]\} \frac{2 - 2\cos(A_d v)}{A_d^2 v^2}$
13	-	$\Phi_x(v) = \frac{\sin(Av) \sin(A_d v)}{A_d Av^2}$
14	-	$\Phi_x(v) = \frac{\sin(Av)}{Av} \exp(-0.5v^2\sigma_n^2)$
15	-	$\Phi_x(v) = \frac{\sin(Av)}{Av} \frac{2 - 2\cos(A_d v)}{A_d^2 v^2}$
16	-	
17	-	
18	-	
19	-	

4. Obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej

Korzystając z zależności (8) można dla sygnałów o rozkładzie równomiernym, gaussowskim oraz trójkątnym obliczyć względne obciążenia wartości średniokwadratowej. Są one postaci

$$\delta_1(\alpha) = 3 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left[\left(\frac{1}{\pi} (\alpha)^{-1} \right)^3 \sin(2\pi i \alpha) - \left(\frac{1}{\pi} (\alpha)^{-1} \right)^2 \cos(2\pi i \alpha) \right] \quad (13)$$

$$\delta_2(\beta) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \exp[-2(\pi i \beta)^2] \left\{ 2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} (\beta)^{-1} \right]^2 \right\} \quad (14)$$

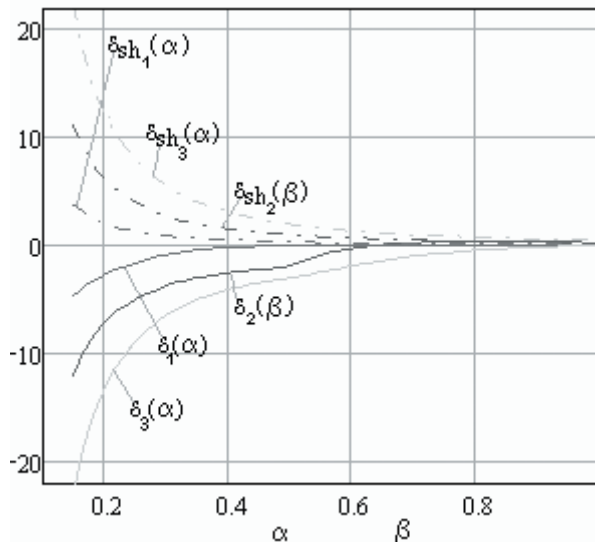
$$\delta_3(\alpha) = 6 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{1}{\pi} \right)^3 (\alpha)^{-3} \left[-\sin(2\pi i \alpha) + \frac{3}{2} \frac{1}{\pi} (\alpha)^{-1} \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \frac{1}{\pi} (\alpha)^{-1} \cos(2\pi i \alpha) \right] \quad (15)$$

gdzie $\alpha = A_d/q$ oraz $\beta = \sigma_n/q$, indeks błędu odpowiada numerowi sygnału w tab. 1.

Obciążenie δ_{sh} wynikające z nieuwzględnienia w wyniku pomiaru poprawki Shepparda można wyrazić zależnością

$$\delta_{sh} = \frac{q^2}{12 E[x^2]} \quad (16)$$

Na rys. 1 przedstawiono wykresy δ i δ_{sh} względnego obciążenia estymatora wartości średniokwadratowej sygnału o rozkładzie równomiernym, gaussowskim i trójkątnym, wynikające z niespełnienia warunku odtwarzalności oraz niezastosowania poprawki Shepparda. Numer błędu odpowiada numerowi sygnału w tab. 1.



Rys. 1. Względne obciążenia estymatora wartości średniokwadratowej sygnału o rozkładzie równomiernym (1), gaussowskim (2) i trójkątnym (3)
Fig. 1. Relative biases of the mean square value estimator for uniformly distributed signal (1), Gaussian signal (2) and triangular pdf signal (3)

Niestety, równania (13) i (14) nie mają rzeczywistych pierwiastków, co oznacza że dla sygnałów o rozkładach równomiernym i gaussowskim nie można odtworzyć wartości $E[x^2]$ na podstawie $E[x_q^2]$ z dokładnością do poprawki Shepparda.

Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla sygnału o trójkątnej funkcji gęstości. Jeśli krok kwantowania jest równy

$$q = \frac{A_d}{K}, K \in N \setminus \{0\} \quad (17)$$

to względne obciążenie (15) jest równe zero, a więc zachodzi odtwarzalność wartości średniokwadratowej na podstawie sygnału skwantowanego z dokładnością do $q^2/12$.

Względne obciążenia estymatora wartości średniokwadratowej sygnałów okresowych: sinusoidalnego, prostokątnego oraz trójkątnego (piłokształtnego) można wyrazić zależnościami

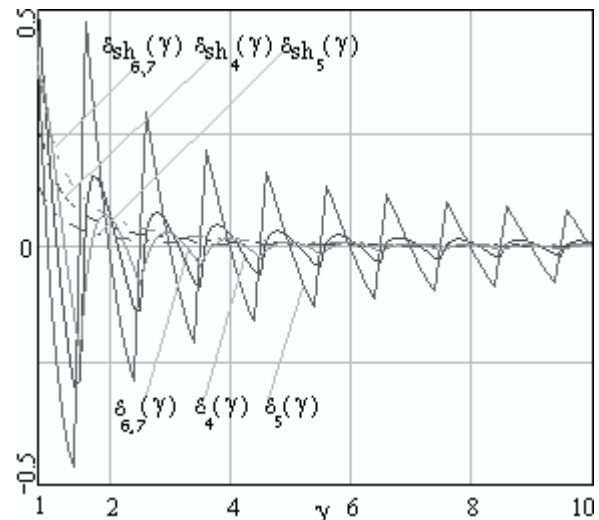
$$\delta_4(\gamma) = 4 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left[\frac{1}{\pi} (\gamma)^{-1} J_1(2\pi i \gamma) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} (\gamma)^{-1} \right)^2 J_0(2\pi i \gamma) \right] \quad (18)$$

$$\delta_5(\gamma) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left[\frac{1}{\pi} (\gamma)^{-1} \sin(2\pi i \gamma) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} (\gamma)^{-1} \right)^2 \cos(2\pi i \gamma) \right] + j 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} (\gamma)^{-1} \right)^2 \right. \\ \left. \left(\frac{\lambda}{50} - 1 \right) \sin(2\pi i \gamma) - \frac{1}{\pi} (\gamma)^{-1} \left(\frac{\lambda}{50} - 1 \right) \cos(2\pi i \gamma) \right] \quad (19)$$

$$\delta_{6,7}(\gamma) = 3 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left[\left(\frac{1}{\pi} (\gamma)^{-1} \right)^3 \sin(2\pi i \gamma) - \left(\frac{1}{\pi} (\gamma)^{-1} \right)^2 \cos(2\pi i \gamma) \right] \quad (20)$$

gdzie $\gamma = A/q$, J_0 i J_1 są odpowiednio funkcjami Bessela pierwszego rodzaju rzędu 0 i 1, indeks błędu odpowiada numerowi sygnału w tab. 1.

Na rys. 2 przedstawiono przebiegi δ i δ_{sh} względnego obciążenia spowodowanego niespełnieniem warunku odtwarzalności oraz niezastosowaniem poprawki Shepparda.



Rys. 2. Względne obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego (4), prostokątnego (5), trójkątnego (piłokształtnego) (6,7)
Fig. 2. Relative biases of the mean square value estimator for sinusoidal (4), square (5), triangular (and sawtooth) signal (6,7)

Odmienne niż dla sygnału trójkątnego, dla sygnałów sinusoidalnego i prostokątnego obciążenie δ może przyjmować wartości znacznie przewyższające obciążenie δ_{sh} wynikające z nieuwzględnienia poprawki Shepparda.

Zmienne losowe odpowiadające sygnałom poliharmonicznym i losowym są statystycznie niezależne, dlatego funkcja charakterystyczna ich sumy jest iloczynem funkcji charakterystycznych składowych (tab. 1).

Niżej przedstawiono modele odpowiadające względnym obciążeniom wartości średniokwadratowej sumy sygnałów poliharmonicznych i losowych o rozkładzie równomiernym, gaussowskim i trójkątnym. Są one postaci

- dla sygnału sinusoidalnego z sygnałem losowym o rozkładzie równomiernym, gaussowskim i trójkątnym

$$\delta_8(\gamma) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i J_0(2\pi i \gamma) \sin(2\pi i \alpha) \left(\frac{1}{\pi i}\right)^2 (\gamma)^{-2} (\alpha)^{-1} \left[\frac{1}{\pi} - \alpha \operatorname{ctg}(2\pi i \alpha) + \gamma \frac{J_1(2\pi i \gamma)}{J_0(2\pi i \gamma)} \right] \quad (21)$$

$$\delta_9(\gamma) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left\{ \left[2\beta(\gamma)^{-1} \right]^2 + \left(\frac{1}{\pi} (\gamma)^{-1} \right)^2 \right\} J_0(2\pi i \gamma) + \frac{2}{\pi} (\gamma)^{-1} J_1(2\pi i \gamma) \exp[-2(\pi i \beta)^2] \quad (22)$$

$$\delta_{10}(\gamma) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{1}{\pi i}\right)^3 (\alpha)^{-2} (\gamma)^{-1} J_0(2\pi i \gamma) \left[\frac{J_1(2\pi i \gamma)}{J_0(2\pi i \gamma)} - \frac{J_1(2\pi i \gamma)}{J_0(2\pi i \gamma)} \cos(2\pi i \alpha) - \sin(2\pi i \alpha) (\gamma)^{-1} \alpha + \frac{3}{2} (\gamma)^{-1} \frac{1}{\pi} - \frac{3}{2} (\gamma)^{-1} \frac{1}{\pi} \cos(2\pi i \alpha) \right] \quad (23)$$

- dla sygnału prostokątnego z sygnałem losowym o rozkładzie równomiernym, gaussowskim i trójkątnym

$$\delta_{11}(\gamma) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{1}{\pi i}\right)^2 (\gamma)^{-2} \cos(2\pi i \gamma) \sin(2\pi i \alpha) \left[\gamma (\alpha)^{-1} \operatorname{tg}(2\pi i \gamma) - \operatorname{ctg}(2\pi i \alpha) + \frac{1}{\pi} (\alpha)^{-1} \right] + j \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{1}{\pi i}\right)^2 (\gamma)^{-2} \cdot (2\lambda - 1) \sin(2\pi i \gamma) \sin(2\pi i \alpha) \left[\frac{1}{\pi} (\alpha)^{-1} - \gamma (\alpha)^{-1} \operatorname{ctg}(2\pi i \gamma) - \operatorname{ctg}(2\pi i \alpha) \right] \quad (24)$$

$$\delta_{12}(\gamma) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cos(2\pi i \gamma) \exp[-2(\pi i \beta)^2] \left\{ \gamma^{-2} [2(\beta)^2 + \frac{1}{\pi} \gamma \operatorname{tg}(2\pi i \gamma) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi i}\right)^2] + j 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \sin(2\pi i \gamma) \cdot \exp[-2(\pi i \beta)^2] \left\{ \gamma^{-2} (2\lambda - 1) \left[2(\beta)^2 - \frac{1}{\pi} \gamma \operatorname{ctg}(2\pi i \gamma) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi i}\right)^2 \right] \right\} \right\} \quad (25)$$

$$\delta_{13}(\gamma) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{1}{\pi i}\right)^3 (\gamma)^{-1} (\alpha)^{-1} \cos(2\pi i \gamma) \left\{ \frac{3}{2} (\gamma)^{-1} (\alpha)^{-1} \cdot \frac{1}{\pi} [1 - \cos(2\pi i \alpha)] + (\alpha)^{-1} \operatorname{tg}(2\pi i \gamma) [1 - \cos(2\pi i \alpha)] - (\gamma)^{-1} \cdot \sin(2\pi i \alpha) \right\} + j \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{1}{\pi i}\right)^3 (2\lambda - 1) (\gamma)^{-1} (\alpha)^{-1} \cdot \sin(2\pi i \gamma) \left\{ \frac{3}{2} (\gamma)^{-1} (\alpha)^{-1} \frac{1}{\pi} [1 - \cos(2\pi i \alpha)] + (\alpha)^{-1} \cdot \operatorname{ctg}(2\pi i \gamma) [\cos(2\pi i \alpha) - 1] - (\gamma)^{-1} \sin(2\pi i \alpha) \right\} \quad (26)$$

- dla sygnału trójkątnego (piłokształtnego) z sygnałem losowym o rozkładzie równomiernym, gaussowskim i trójkątnym

$$\delta_{14,15}(\gamma) = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{1}{\pi i}\right)^3 (\gamma)^{-3} (\alpha)^{-1} \sin(2\pi i \gamma) \sin(2\pi i \alpha) \cdot \left[\frac{3}{2} \frac{1}{\pi} - \gamma \operatorname{ctg}(2\pi i \gamma) - \alpha \operatorname{ctg}(2\pi i \alpha) \right] \quad (27)$$

$$\delta_{16,17}(\lambda) = 3 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{\pi i} (\lambda)^{-3} \sin(2\pi i \lambda) \exp[-2(\pi i \beta)^2] \cdot \left[2(\beta)^2 + \left(\frac{1}{\pi i}\right)^2 - \frac{1}{\pi} \lambda \operatorname{ctg}(2\pi i \lambda) \right] \quad (28)$$

$$\delta_{18,19}(\gamma) = 3 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{1}{\pi i}\right)^4 (\gamma)^{-2} (\alpha)^{-2} \sin(2\pi i \gamma) \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(2\pi i \gamma) \cdot [\cos(2\pi i \alpha) - 1] - \frac{1}{2} (\gamma)^{-1} \alpha \sin(2\pi i \alpha) + (\gamma)^{-1} \cdot \frac{1}{\pi} [1 - \cos(2\pi i \alpha)] \right\} \quad (29)$$

Indeks błędu odpowiada numerowi sygnału w tab. 1.

Wyrażenia (21) – (29) nie są znane z literatury. Będą one przedmiotem dalszych badań. Sygnały losowe ujęte w tych modelach mogą być uważane jako ditherowe.

Niestety, ograniczona objętość pracy uniemożliwiła przedstawienie graficznej reprezentacji modeli.

5. Podsumowanie

W artykule zaprezentowano funkcje gęstości prawdopodobieństwa oraz funkcje charakterystyczne wybranych sygnałów poliharmonicznymi, losowych oraz ich sumy. Na ich podstawie opracowano modele obciążenia wartości średniokwadratowej sygnałów.

Wykazano m.in., że dla sygnałów o rozkładach równomiernym i gaussowskim nie można odtworzyć, z dokładnością do poprawki Shepparda, wartości $E[x^2]$ na podstawie $E[x_q^2]$. Natomiast w przypadku sygnału o rozkładzie trójkątnym i odpowiednio dobranym kroku kwantowania q taka możliwość istnieje.

Dla sygnałów poliharmonicznymi oraz sumy sygnałów poliharmonicznymi i losowych obciążenie jest tłumioną oscylacyjną funkcją ilorazu amplitudy A i kroku kwantowania q , zanikającą szybciej dla sygnałów ze składową losową.

Przedstawione w pracy wyrażenia (21) – (29), nieznane z literatury, będą przedmiotem dalszych badań. Autorzy mają nadzieję, że analiza modeli błędów dostarczy interesujących wniosków z zakresu przetwarzania A/C z sygnałem ditherowym.

6. Literatura

- [1] Domańska A.: Oddziaływanie na wiarygodność w systemach pomiarowych przez zastosowanie konwersji A-C z sygnałem ditherowym. Wyd. Pol. Poznańskiej, Poznań 1995.
- [2] Hasse L., Spiralski L.: Szumy elementów i układów elektronicznych. WNT, Warszawa 1981.
- [3] Lal-Jadziak J.: Kształtowanie dokładności w pomiarach korelacyjnych. Seria Monografie, nr 101, Wyd. Politechniki Zielonogórskiej, Zielona Góra 2001.
- [4] Lal-Jadziak J.: Wpływ kwantowania na dokładność estymacji wartości średniokwadratowej. Pomiary Automatyka Kontrola nr 7,8, 2002, s. 61-64.
- [5] Kollar I.: Bias of mean value and mean square value measurements based on quantized data. IEEE Trans. Instrum. Meas., vol.43, no. 5, 1994, pp.733-739.
- [6] Mariano J. L., Ramos H.: Validity of Widrow's model for sinusoidal signals. Measurement, vol. 39, no. 3, 2006, pp. 198-203.
- [7] Pacut A.: Prawdopodobieństwo. Teoria. Modelowanie probabilistyczne w technice. WNT, Warszawa 1985.
- [8] Sienkowski S.: Modelling characteristic functions of determined and random signals in LabWINDOWS. 1st International Conference For Young Researchers, Zielona Góra 2006.
- [9] Widrow B., Kollar I.: Quantization Noise – A Book on Uniform and Floating-Point Quantization. Budapest 2006. <http://www.mit.bme.hu/books/quantization/>.
- [10] Widrow B., Kollar I., Liu M.-C.: Statistical theory of quantization. IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 45, no. 2, 1996, pp. 353-361.