

OCENA NIEPEWNOŚCI PUNKTÓW CHARAKTERYSTYKI Z DWU POMIARÓW KONTROLNYCH

Zygmunt Lech WARSZA¹, Jacek PUCHALSKI²

1. Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP
tel.+ 48 692033661 email: zlw1936@gmail.com
2. Główny Urząd Miar
tel.:+ 48 2258 9383 e-mail: jacek.puchalski@gum.gov.pl

Streszczenie: Omówiono szacowanie niepewności punktów funkcji opisującej badaną charakterystykę na podstawie wyników pomiarów w dwu punktach kontrolnych. Zastosowano dwie metody I i II. Metodą I estymuje się składowe niepewności typu B na podstawie wartości dopuszczalnych maksymalnych błędów aparatury stosowanej do pomiarów w punktach kontrolowanych tej charakterystyki. Przy stabilnych warunkach pomiaru kilku wartości i pomijalnej niepewności typu A, należy dla wyników przyjąć współczynnik korelacji równy 1. Metodą statystyczną II, na podstawie pomiarów w punktach kontrolnych estymuje się składowe niepewności typu A oraz niepewności złożone dla punktów badanej funkcji i korelację pomiędzy ich wynikami. Korzysta z równania wiążącego macierze kowariancji w pomiarach pośrednich wieloparametrowych wg Suplementu 2 Przewodnika GUM. Wyznaczono też niepewności względne i bezwzględne dla sumy i różnicy wartości dwu punktów i podano przykłady obliczeń. Przy ograniczonej liczbie i czasie wykonywania pomiarów, metodą tą można wyznaczyć niepewności funkcji opisującej badaną charakterystykę i wykorzystać ją w monitoringu, kontroli i diagnostyce różnych obiektów.

Słowa kluczowe: estymacja, niepewności punktów charakterystyki, punkty kontrolne, dopuszczalny maksymalny błąd pomiaru, pomiary pośrednie, macierz kowariancji, współczynnik korelacji.

1. WPROWADZENIE

Pojęcie: niepewności pomiarów zostało wprowadzone w Przewodniku GUM [1] w 1992 r. i jest obecnie powszechnie stosowane do oceny dokładności wyników pomiaru oraz oceny jakości produkcji, wyrobów i usług laboratoriów pomiarowych. Jest to przedział wokół estymatora wartości mierzalnego, w którym z określonym prawdopodobieństwem znajduje się wynik pomiaru. Ze skorygowanych przez poprawki danych pomiarowych wyznacza się niepewność złożoną u jako odchylenie standardowe jako sumę geometryczną dwu ze sobą nieskorelowanych niepewności składowych typów A i B, tj. $u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$. Z niej wyznacza się niepewność rozszerzoną U o określonym prawdopodobieństwie zależną od rozkładu wypadkowego odchyłeń od estymatora wartości.

Wyznaczanie niepewności w pomiarach pośrednich kilku skojarzonych ze sobą wielkości omawia Suplement 2 Przewodnika GUM. Poniżej przedstawi zastosowanie tej metody do szacowania propagacji niepewności dla

badanych wartości charakterystyki $y=f(x)$ na podstawie pomiarów w dwu punktach kontrolnych. Z danych pomiarowych i warunków eksperymentu wyznacza się estymatory wartościach x_1, x_2 tworzące skalę wartości x oraz niepewności standardowe u_{x1}, u_{x2} . Z nich szacuje się pośrednio standardowe niepewności punktów x_{ki} charakterystyki, badanej o wartościach bezwzględnych oznaczonych jako σ_{ki} i względnych - jako $\delta_i \equiv \sigma_{ki}/x_i$. Wyznaczy się też zakresy x o zadanych granicznych wartościach niepewności i oszacuje niepewności wartości y_i zależne od x_i wg zadanej funkcji wielowymiarowej $Y=F(X)$. Rozważania uogólnia się przez normalizację wartości parametrów odnosząc je do szerokości przedziału $x_2 - x_1$, zakresu pomiarowego $x_{\max} - x_0$, lub wybranej wartości, np. x_{\max} . Jako hipotezę roboczą, przyjęto, że składowe niepewności u_{xA} i u_{xB} w punktach kontrolnych można oszacować właściwie z wyników powtarzanych pomiarów i z wiedzy o danych przyrządów i warunkach wykonywania eksperymentu. W pracy nie analizuje się wpływów poszczególnych wielkości na niepewności składowe u_A i u_B , gdyż w każdym pomiarze mają one charakter indywidualny. Rozpatruje się więc tylko sytuacje krańcowe i charakterystyczne. W pomiarach pośrednich wielkości skojarzonych trzeba uwzględnić korelację zbiorów wyników obserwacji opisanych składowymi typów A oraz B.

Jeśli pomiary dwu wartości x_1, x_2 wykonuje się różnymi przyrządami i niesynchronicznie, o różnej dokładności i w różnych warunkach, to należy założyć, że wartości ich obserwacji nie są skorelowane i przyjąć współczynnik korelacji $\rho_{12} = 0$. Dla pomiarów tym samym lub identycznym przyrządem, w jednakowych warunkach i przy powtarzalnych statystycznie wynikach współczynnik korelacji $\rho_{12} \rightarrow 1$.

Do estymacji niepewności punktów funkcji opisującej charakterystykę badaną na podstawie pomiarów kontrolnych stosuje się dwie metody. Metodą I, o deterministycznym charakterze, wyznacza się niepewności typu B dla przyrządów o dopuszczalnym maksymalnym błędzie znanym z wiarygodnych wyników kalibracji lub od producenta. Zaś do wyznaczenia niepewności typu A, niepewności całkowitej u i rozszerzonej U z wyników pomiarów w punktach kontrolnych służy statystyczna

metoda II. Wykorzystuje się w niej wiedzę o użytej aparaturze i wpływie określonych warunków eksperymentu.

2. METODY SZACOWANIA NIEPEWNOŚCI

2.1. Metoda I – estymacja niepewności typu B przyrządów

Niepewność składową typu B dla mierzonych wartości charakteryzacji badanej szacuje się bezpośrednio z danych o błędach przyrządów pomiarowych [2, 3]. Wytwórcy podają dla przyrządów i przetworników pomiarowych dopuszczalny maksymalny błąd $|\Delta_x|_{max}$ jako liniową zależność modułu błędu bezwzględnego od wartości x wielkości mierzonej. Jest on sumą składowych, addytywnej i multiplikatywnej wg wzoru (1), a odniesiony do zakresu pomiarowego jest dopuszczalnym błędem względnym (1a):

$$|\Delta_x| \leq |\Delta_x|_{max} = |\Delta_{x0}|_{max} + |x - x_0| \cdot |\varepsilon_S|_{max} \quad (1)$$

$$\frac{|\Delta_x|}{|x_{max} - x_{min}|} \leq \frac{|\Delta_{x0}|_{max}}{|x_{max} - x_{min}|} + \frac{|x - x_0|}{|x_{max} - x_{min}|} \cdot |\varepsilon_S|_{max} \quad (1a)$$

w których: $|\Delta_x|$, $|\Delta_x|_{max}$ i $|\Delta_{x0}|_{max}$ są odpowiednio modułami błędów bezwzględnych: rzeczywistego i dopuszczalnych błędów maksymalnych dla wartości mierzonej x i wartości początkowej x_0 ; a $|\Delta_{x-x_0}|_{max}$, $|\varepsilon_S|_{max} \equiv |\Delta_{x-x_0}|_{max} / |x - x_0|$ - to

moduły dopuszczalnego błędu bezwzględnego i względnego różnicy $|x - x_0|$ wskazań lub wartości sygnału wyjściowego. Wzór (1a) upraszcza się dla $x_0 = x_{min}$ i dalej dla $x_0 = 0$.

Metodą I z dwu wartości maksymalnych modułów tych błędów $|\Delta_{x1}|_{max}$ i $|\Delta_{x2}|_{max}$, znanych z danych technicznych lub z pomiarów w określonych warunkach, dla wartości x w badanym zakresie można wyznaczyć liniowy przebieg funkcji niepewności bezwzględnej σ_x lub jej wartości unormowanej jako niepewność względną. Wewnątrz przedziałów $\pm|\Delta_{x1}|_{max}$, $\pm|\Delta_{x2}|_{max}$ dla rozrzutu wartości x zwykle przyjmuje się rozkład prawdopodobieństwa równomierny. Odchylenia standardowe σ_{x1} , σ_{x2} estymatorów x_1 , x_2 , np. wartości średnich pozyskanych obserwacji pomiarowych przyjmuje się jako niepewności typu A. W dziedzinie niepewności wzorowi (1) odpowiada wówczas zależność (2), tj.:

$$\sigma_x \leq \sigma_{x_{max}} = \sigma_{x_0_{max}} + |x - x_0| \cdot \delta_x|_{max} \quad (2)$$

w którym: $\delta_x|_{max}$ jest maksymalną niepewnością względną zakresu pomiarowego ($x - x_0$).

Dopuszczalny maksymalny błąd bezwzględny $|\Delta_x|_{max}$ i odpowiadająca mu niepewność bezwzględna $\sigma_x|_{max} \equiv u_{Bx}|_{max}$ z wzoru (2) są do siebie proporcjonalne ze współczynnikiem $1/\sqrt{3}$. Przy odpowiednio dobranych skalach na osi y będą one stanowiły identyczną liniową funkcją wielkości mierzonej x

Metodę I można stosować do estymacji niepewności typu B w całym zakresie lub tylko w tych jego częściach, poniżej i powyżej krańców przedziału pomiędzy wartościami mierzonymi (x_1 , x_2), gdy można przyjąć liniowe zależności dopuszczalnego błędu maksymalnego od x . Na przykład dla przyrządów cyfrowych moduł tego błędu wzrasta z $x_2 \geq x_1 \geq 0$, tj. $|\Delta_{x2}|_{max} \geq |\Delta_{x1}|_{max}$. Jeśli błąd względny $|\delta_x|$ jest stały, to wzrost niepewności typu B przyrządu jest proporcjonalny do $(x-x_0) \geq 0$. Gdy badany zakres funkcji obejmuje wartości ujemne x , to lepiej dokonać zamiany zmiennych, by $x_{min} = x_0$.

Przy estymacji metodą I niepewności poszczególnych wartości x_c , nie można jednak w niepewnościach typu B wartości x_1 , x_2 uwzględnić wpływu skorelowania błędów przyrządów mierzących te wartości wynikającego ze statystycznego ich charakteru. Składowe te szacuje się z dopuszczalnych maksymalnych modułów błędów tych przyrządów, a współczynnik korelacji między otrzymanymi w ten sposób niepewnościami dla wartości x z całego zakresu pomiarowego trzeba przyjąć jak równy 1. Nie można też wyznaczyć współczynników korelacji dla estymowanych wartości x_{k1} , x_{k2} i też należy przyjąć współczynnik korelacji równy 1. Wówczas niepewności sumy i różnicy dwu wartości x o współczynniku korelacji ± 1 są sumami algebraicznymi ich niepewności z odpowiednim znakiem. Dla sumy są one większe, a dla różnicy mniejsze niż to wynika z sumowania geometrycznego (pierwiastek z sumy kwadratów).

Metoda I ma więc ograniczone zastosowanie, głównie przy wyznaczaniu niepewności typu B przyrządów stosowanych w pośrednich pomiarach wieloparametrowych. Nadaje się jedynie do tych nielicznych innych przypadków, gdy estymowane wartości x_k charakteryzacji i ich niepewności będą wykorzystywane jedynie osobno.

2.2. Metoda II - statystyczna estymacja niepewności

Metoda ta służy do estymacji niepewności złożonej oraz niepewności składowej typu A. w statystycznym opisie dokładności pomiarów, układów i przyrządów pomiarowych z użyciem niepewności. Zastosuje się tu opisaną w Suplemencie 2 do Przewodnika GUM wektorową metodę wyznaczania niepewności w wieloparametrowych pomiarach pośrednich. Parametry multimenzurandu wyjściowego Y wyznacza się pośrednio z pomiarów multimenzurandu wejściowego X powiązane z nim ogólnie funkcją

$$Y = F(X) \quad (3)$$

Ich niepewności i współczynniki korelacji powiązane są prawem propagacji wariancji w postaci następującego związku macierzy kowariancji U_Y i U_X

$$U_Y = S \cdot U_X \cdot S^T \quad (4)$$

Z równania (4) wyznacza się niepewności dla funkcji przetwarzania $Y = F(X)$ zarówno liniowej, jak i nieliniowej, dla której macierz wrażliwości $S = \partial Y / \partial X$ jest macierzą Jacobiego. Jeśli wymiar m wektora Y jest większy niż wymiar n wektora X , to przynajmniej $m-n$ z liczby niezależnych równań łączących elementy obu wektorów jest nieliniowych.

Aby ujęcie było ogólne i przydatne przy dowolnym rodzaju funkcji $F(\cdot)$, wyznaczanie niepewności elementów Y dzieli się na dwa etapy. W pierwszym z nich na podstawie wyników pomiarów dwu wartości x_1 , x_2 tworzy się liniową skalę wartości $X_k = F_k(X)$ dla całego rozpatrywanego zakresu $x_{max} - x_0$ i estymuje ich niepewności. W drugim etapie z wybranych elementów x_k wektora X_k wyznacza się wartości i niepewności elementów wektora Y wg wiążącej je indywidualnej liniowej lub nieliniowej funkcji $Y = F_y(X_k)$. Bliżej omówić pierwszy etap. Niepewność dowolnej wartości x_k wynika z pomiarów kontrolnych x_1 , x_2 , ich niepewności i współczynnika korelacji. Jest ona ich kombinacją liniową opisaną wzorem:

$$x_k = x_1 + k(x_2 - x_1) = (1 - k)x_1 + kx_2 \quad (5)$$

w którym k oznacza względne położenie punktu x_k w przedziale $\langle x_1, x_2 \rangle$ wynikające z rozwiązania równania (5)

$$k = (x_k - x_1)/(x_2 - x_1) \quad (5a)$$

W przedziale $x_1 \leq x_k \leq x_2$ k ma wartości $0 \leq k \leq 1$. Otrzymane z pomiarów kontrolnych wartości x_1, x_2 i estymowane z nich wartości x_{k1} oraz niepewności oznaczonymi przez σ_{x1}, σ_{x2} i σ_{ki} modeluje się zmiennymi losowymi. Niepewności σ_{ki} szacuje się pośrednio z wartości x_1, x_2 , niepewności σ_{x1}, σ_{x2} i ich współczynnika korelacji $\rho_{x1,2}$. Jako przykład wyznaczone będą dwie wartości x_{k1} i x_{k2} oraz oszacowane ich niepewności σ_{k1}, σ_{k2} i współczynnik korelacji $\rho_{k1,2}$. Przy estymacji parametrów menzurandu X_k jego macierz kowariancji U_k dla niepewności bezwzględnych opisuje równanie:

$$U_k = S_k \cdot U_X \cdot S_k^T \quad (6)$$

w którym macierz czułości S_k i macierze kowariancji U_X i U_k dla wektorów 2D: $X = [x_1, x_2]^T$ i $X_k = [x_{k1}, x_{k2}]^T$ wynoszą

$$S_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{k1}}{\partial x_1} & \frac{\partial x_{k1}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial x_{k2}}{\partial x_1} & \frac{\partial x_{k2}}{\partial x_2} \end{bmatrix}, U_X = \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & \rho_{x1,2} \sigma_{x1} \sigma_{x2} \\ \rho_{x1,2} \sigma_{x1} \sigma_{x2} & \sigma_{x2}^2 \end{bmatrix} \quad (6a, b)$$

$$U_k = \begin{bmatrix} \sigma_{k1}^2 & \rho_{k1,2} \sigma_{k1} \sigma_{k2} \\ \rho_{k1,2} \sigma_{k1} \sigma_{k2} & \sigma_{k2}^2 \end{bmatrix} \quad (6c)$$

zaś σ_{x1}, σ_{x2} i σ_{k1}, σ_{k2} oznaczają niepewności bezwzględne, a $\rho_{x1,2}, \rho_{k1,2}$ - ich współczynniki korelacji.

Jeśli dwie wyznaczane wartości x_{k1}, x_{k2} związane są liniowo z mierzonymi wartościami x_1, x_2 , to łączą je równania:

$$x_{k1} = (1 - k_1)x_1 + k_1x_2 \quad (7a)$$

$$x_{k2} = (1 - k_2)x_1 + k_2x_2 \quad (7b)$$

W ogólnym przypadku wyniki pomiarów kontrolnych x_1, x_2 mogą być skorelowane, czyli $\rho_{x1,2} \neq 0$.

Postać wyjściowej macierzy kowariancji U_k wyznacza się ze wzorów (6) oraz (7a) i (7b) w następujący sposób:

$$U_k = \begin{bmatrix} 1-k_1 & k_1 \\ 1-k_2 & k_2 \end{bmatrix} U_X \begin{bmatrix} 1-k_1 & 1-k_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Na głównej przekątnej macierzy U_k elementami są kwadraty niepewności σ_{k1}, σ_{k2} jako wariancje o równaniach:

$$\sigma_{k1}^2 = (1-k_1)^2 \sigma_{x1}^2 + k_1^2 \sigma_{x2}^2 + 2\rho_{x1,2}(1-k_1)k_1 \sigma_{x1} \sigma_{x2} \quad (8a)$$

$$\sigma_{k2}^2 = (1-k_2)^2 \sigma_{x1}^2 + k_2^2 \sigma_{x2}^2 + 2\rho_{x1,2}(1-k_2)k_2 \sigma_{x1} \sigma_{x2} \quad (8b)$$

Ich normalizację do σ_{x2} punktu x_2 podaje wspólnie wzór:

$$\sigma_{nki} = \frac{\sigma_{ki}}{\sigma_{x2}} = \sqrt{\varepsilon^2(1-k_i)^2 + k_i + 2\rho_{x1,2}\varepsilon(1-k_i)k_i} \quad (9)$$

gdzie: $i = 1, 2$, a $\varepsilon = \sigma_{x1} / \sigma_{x2}$ - stosunek niepewności x_1 i x_2

Współczynnik korelacji $\rho_{k1,2}$ wartości x_{k1}, x_{k2} opisuje wzór:

$$\rho_{k1,2} = \frac{\varepsilon^2(1-k_1)(1-k_2) + k_1k_2 + (k_1 + k_2 - 2k_1k_2)\varepsilon\rho_{x1,2}}{\sigma_{nk1}\sigma_{nk2}} \quad (10)$$

Z (10) wynikają prostsze wzory: (11) dla nieskorelowanych x_1 i x_2 ($\rho_{x1,2} = 0$) i (12) przy skorelowaniu $\rho_{x1,2} = 1$, tj.:

$$\rho_{k1,2} = \frac{\varepsilon^2(1-k_1)(1-k_2) + k_1k_2}{\sigma_{nk1}\sigma_{nk2}} \quad (11)$$

$$\rho_{k1,2} = 1 \quad (12)$$

Zależność niepewności σ_k od k punktu x_k opisuje wzór (13), a jego szczególne przypadki wzory (14) i (15):

$$\sigma_k = \sqrt{(1-k)^2 \sigma_{x1}^2 + k^2 \sigma_{x2}^2 + 2\rho_{x1,2}(1-k)k \sigma_{x1} \sigma_{x2}} \quad (13)$$

Dla $\rho_{x1,2} = 0$ wzór ten upraszcza się do postaci:

$$\sigma_k |_{\rho_{x1,2}=0} = \sqrt{(1-k)^2 \sigma_{x1}^2 + k^2 \sigma_{x2}^2} \quad (14)$$

Dla korelacji $\rho_{x1,2} = 1$ zależność (13) staje się liniową

$$\sigma_k |_{\rho_{x1,2}=1} = (1-k)\sigma_{x1} + k\sigma_{x2} \quad (15)$$

Po unormowaniu σ_k do σ_{x2} otrzyma się wzory (16) – (18):

$$\frac{\sigma_k}{\sigma_{x2}} = \sqrt{\varepsilon^2(1-k)^2 + k^2 + 2\rho_{x1,2}\varepsilon(1-k)k} \quad (16)$$

dla $\rho_{x1,2} = 0$:

$$\frac{\sigma_k}{\sigma_{x2}} = \sqrt{\varepsilon^2(1-k)^2 + k^2} \quad (17)$$

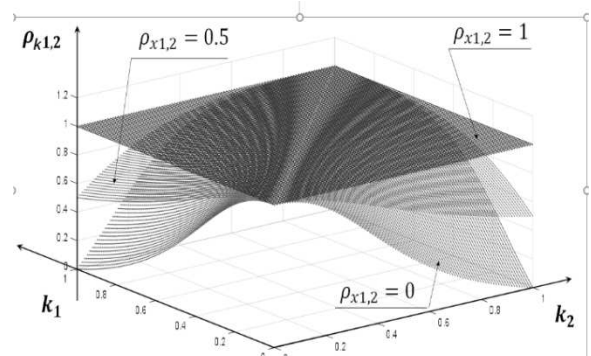
oraz dla $\rho_{x1,2} = 1$

$$\sigma_{nx} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{x2}} = \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon k + k)^2} = \varepsilon + (1 - \varepsilon)k \quad (18)$$

Z (10) i (16) dla skorelowania x_1 i x_k , tj. dla $x_{k1} = x_1, x_{k2} = x_c, k_1 = 0, k_2 = k$, otrzymuje się wzór (19):

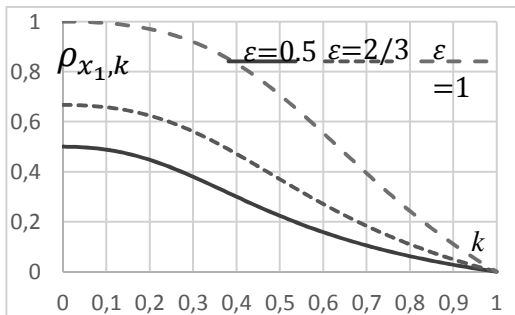
$$\rho_{x1,k} = \frac{\varepsilon^2(1-k)}{\sqrt{\varepsilon^2(1-k)^2 + k^2}} \quad (19)$$

Współczynnik korelacji $\rho_{k1,2}$ w funkcji względnego położenia k_1, k_2 wartości x_{k1}, x_{k2} dla kontrolnych wartości x_1, x_2 o stosunku niepewności $\varepsilon = 0,5$ i korelacji o współczynniku $\rho_{x1,2} = (0; 0,5; 1)$ przedstawia rysunek 1.



Rys 1. Współczynnik korelacji $\rho_{k1,2}$ w funkcji względnego położenia k_1, k_2 wartości x_{k1}, x_{k2} dla stosunku niepewności $\varepsilon = 0,5$ i współczynników korelacji $\rho_{x1,2} = 0; 0,5; 1$ punktów kontrolnych

Z rysunku 1 wynika, że dla $\rho_{x1,2} < 1$ występuje maksimum powierzchni współczynnika korelacji $\rho_{k1,2} = f(k_1, k_2)$ równe 1 dla $k_1 = k_2$. Zaś dla $\rho_{x1,2} = 1$ w całym obszarze zmienności k_1, k_2 otrzymuje się współczynnik $\rho_{k1,2} = 1$ jako płaszczyznę. Przy zmniejszaniu się $\rho_{x1,2}$ jego powierzchnie opadają symetrycznie względem prostej $k_1 = k_2$, aż do minimum w punktach przeciwległych: $k_1 = 1, k_2 = 0$ i $k_1 = 0, k_2 = 1$.



Rys 2. Współczynnik korelacji $\rho_{x1,k}$ w funkcji względnego położenia k punktu x_c wewnątrz przedziału kontrolnego $\langle x_1, x_2 \rangle$ dla stosunku niepewności jego krańców $\varepsilon = 0,5; 2/3; 1$

Na rysunku 2 podano wynikającą z (19) zależność współczynnika korelacji $\rho_{x1,k}$ od k dla trzech stosunków niepewności $\varepsilon = (1/2; 2/3; 1)$ w punktach kontrolnych i ich współczynnika korelacji $\rho_{x1,2} = 0$. Wraz ze wzrostem k do 1 te charakterystyki maleją do zera, silniej dla mniejszego ε .

Wartości x_{c1} i x_{c2} mogą też służyć do wyznaczenia menzurandu wieloparametrowego Y określonego przez funkcję wektorową $Y = F_Y(X_c)$. Funkcja ta może być zarówno liniowa, jak i nieliniowa. Na przykład dla dwuelementowych wektorów $X_k = [x_{k1}, x_{k2}]^T$ i $Y = [y_1, y_2]^T$ ich macierze kowariancji U_k i U_Y wiąże prawo propagacji wariacji (4), tj.:

$$U_Y = S_Y \cdot U_k \cdot S_Y^T \quad (20)$$

w którym $S_Y = \frac{\partial y_j}{\partial x_{ki}}$ $i, j = 1, 2$

Niepewności i współczynnik korelacji wielkości y_1, y_2 wyznacza się z macierzy U_Y . Najpierw uzyskuje się wartości wejściowe x_{k1} i x_{k2} i ich macierz kowariancji U_k . Następnie stosuje się formuły na elementy macierzy kowariancji U_Y .

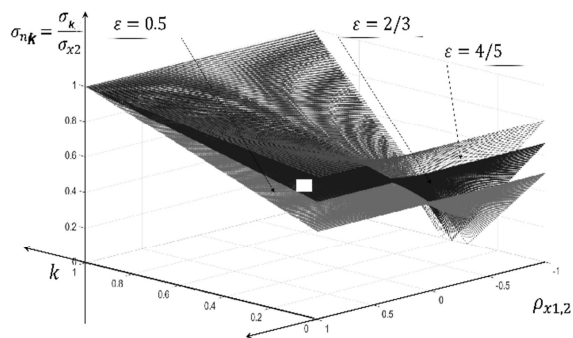
Wartość x_k , której niepewność estymuje się w przypadku liniowym jest związana z mierzonymi wartościami x_1, x_2 formułą (5), taką samą, jak i dla interpolacji metodą I. Współczynnik położenia k dla x_k jest rozwiązaniem równania (5). Podano go we wzorze (5a). Liniowa zależność (5) obowiązuje również poza krańcami przedziału dla ekstrapolacji x_k , tj. gdy $k \leq 0$ i $k \geq 1$. Ogólnie, dla skorelowanych x_1, x_2 z równań (8a) i (8b) wynika wzór dla znormalizowanej niepewności w całym zakresie k :

$$\sigma_{nk}^2 = \left(\frac{\sigma_k}{\sigma_{x2}} \right)^2 = \varepsilon^2 (1-k)^2 + k^2 + 2\rho_{x1,2} \varepsilon (1-k)k \quad (21)$$

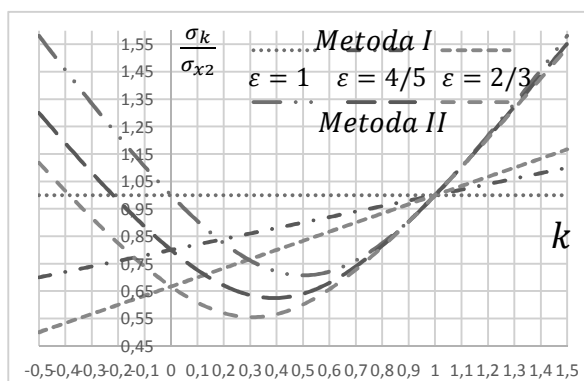
Zależność $\sigma_{nk} = f(k, \rho_{x1,2})$ znormalizowanej niepewności punktu x_k od jego położenia względnego k i współczynnika korelacji $\rho_{x1,2}$ dla trzech wartości stosunku niepewności $\varepsilon \equiv \sigma_{x1}/\sigma_{x2} = (2/3; 4/5; 1)$ pokazuje rysunek 3a. Są to powierzchnie krzywoliniowe 3D. Ich przekroje $\sigma_{nk} = f(k)$

dla tych wartości ε i współczynników korelacji $\rho_{x1,2} = 0$ (metoda II) i $\rho_{x1,2} = 1$ (linie proste - metoda I) podaje rys3b. Niepewność σ_{nc} wzrasta wraz z k i $\rho_{x1,2}$.

Ze zróżniczkowania wzoru (21) po k wynika, że w przedziale $\langle x_1, x_2 \rangle$ występuje minimum zaznaczone na rysunku 4 dla krzywej o $\varepsilon = 1$.

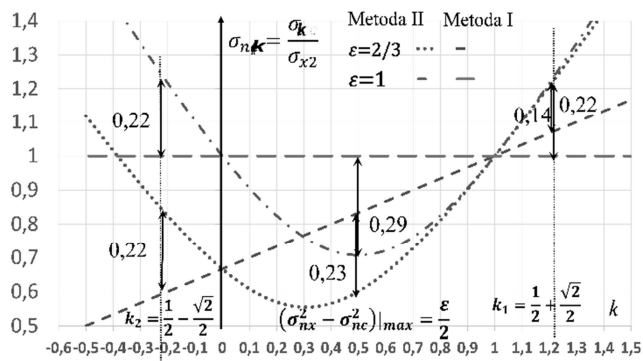


a.



b.

Rys 3: a. Znormalizowane niepewności σ_{nk} wartości x_k jako funkcje 3D ich względnego położenia k i współczynnika korelacji $\rho_{x1,2}$ dla trzech stosunków niepewności punktów kontrolnych $\varepsilon = 0,5; 2/3; 0,8$; b. Przekroje powierzchni 3D dla $\rho_{x1,2} = 0$ i $\rho_{x1,2} = 1$ (metoda I)



Rys 4. Znormalizowane niepewności bezwzględne jako funkcje $\sigma_{nc} = f(k)$ względnego położenia k dla ilorazu niepewności $\varepsilon = 2/3, 1$ i korelacji $\rho_{x1,2} = 1; \rho_{x1,2} = 0$ punktów kontrolnych (metody: I i II)

Położenie względne k_{min} i wartość x_k minimum wynoszą:

$$k_{min} (\sigma_{nk} = \min) = \frac{\varepsilon(\varepsilon - \rho_{x1,2})}{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\rho_{x1,2}} \quad (22)$$

$$x_k |_{\sigma_{nk} = \min} = x_1 + k_{min}(x_2 - x_1) \quad (23)$$

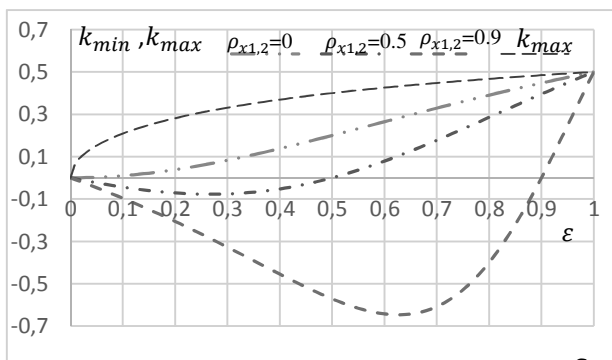
Ze wzorów (22) i (23) wynika, że minimum niepewności występuje w przedziale $x_1 < x_k |_{\sigma_{nk} = \min} < x_2$

x_2 . Położenie względne k_{min} nie zależy od szerokości $x_2 - x_1$ przedziału kontrolnego $\langle x_1, x_2 \rangle$, ale od stosunku niepewności $\varepsilon \equiv \sigma_{x1}/\sigma_{x2}$ jego krańców i od stopnia korelacji $\rho_{x1,2}$. Jeśli niepewność jednego z krańców, np. $\sigma_{x1} \rightarrow 0$, to k_{min} zanika ($k_{min} \rightarrow 0$).

Bardzo blisko punktu k_{min} występuje też maksymalna różnica pomiędzy niepewnościami wyznaczonymi metodą I ($\rho_{x1,2} = 1$) i metodą II jako punkt k_{max} położony nieco powyżej k_{min} . Jego położenie k_{max} opisuje wzór

$$k_{max} = \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon\rho_{x1,2} + (1 - \varepsilon)\sqrt{\varepsilon(1 + \rho_{x1,2})/2}}{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\rho_{x1,2}} \quad (24)$$

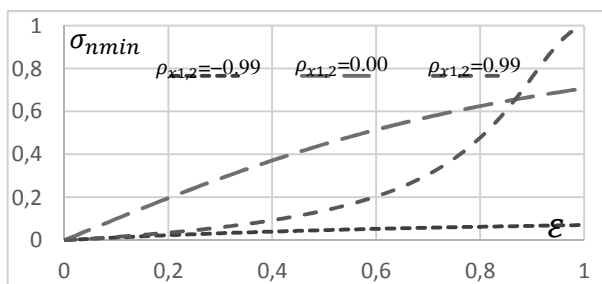
Na rysunku 5 podano zależności względnego położenia: $k_{min}(\varepsilon)$ dla trzech współczynników korelacji $\rho_{x1,2} = 0; 0,5$ i $0,9$ i $\rho_{x1,2} = -0,9; 0; +0,9$ oraz położenia $k_{max}(\varepsilon)$.



Rys 5. Względne pozycje minimum niepewności k_{mi} i maksimum odległości k_{max} między niepewnościami wg metod I i II w funkcji ε

Wartości minimum unormowanej niepewności podaje wzór (25), zaś wykresy funkcji $\sigma_{nmin} = f(\varepsilon)$ - rysunek 6.

$$\sigma_{nmin} = \frac{\varepsilon\sqrt{1 - \rho_{x1,2}^2}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\rho_{x1,2}}} \quad (25)$$



Rys. 6. Znormalizowana niepewność minimalna w przedziale $k = (0; 1)$ w funkcji stosunku niepewności punktów kontrolnych ε o współczynnikach korelacji $\rho_{x1,2} = -0,99; 0; 0,99$

Z rysunku 6 wynika, że w punkcie x_2 o $\varepsilon = 1$ estymowana w przedziale $\langle x_1, x_2 \rangle$ metodą II niepewność σ_{nmin} dla $\rho_{x1,2} = 0,99$ jest mniejsza o 30% od niepewności nieskorelowanych wartości kontrolnych x_1, x_2 , tj. dla $\rho_{x1,2} = 0$. Niepewność minimalna zależy wtedy tylko od stosunku niepewności ε punktów kontrolnych i (25) przyjmuje postać:

$$\sigma_{nmin} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \quad (25a)$$

Położenie przedziału kontrolnego względem krańców zakresu pomiarów $x_{max} - x_0$, nie ma wpływu.

Wzór (21) wykorzystano też do ekstrapolacji niepewności poza przedziałem, tj. dla $k < 0$ i $k > 1$. Zależność niepewności od względnego położenia k dla metody II ma przebieg paraboliczny. Różnicę kwadratów niepewności interpolowanej metodami I i II w punkcie $k = 1/2$ wynoszą

$$(\sigma_{nx}^2 - \sigma_{nk}^2)|_{max} = \frac{\varepsilon}{2}(1 - \rho_{x1,2}) \quad (26)$$

Przy ekstrapolacji wg wzoru (21) kwadrat niepewności dla $\rho_{x1,2} = 0$ wzrasta o $\varepsilon/2$ w punktach $k_{1,2}$ jednakowo odległych od wierzchołka paraboli o współrzędnej $k = 1/2$ i wynosi

$$k_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (27)$$

Niepewność estymowana metodą II jest w tych punktach większa niż niepewność estymowana wg metody I. Różnica kwadratów $\sigma_{nx}^2 - \sigma_{nk}^2 = -\varepsilon/2$ ma znak przeciwny niż w środku przedziału. Maksymalna różnica $(\sigma_{nx} - \sigma_{nk})_{max}$ niepewności wyznaczonych metodami I i II występuje blisko punktu k_{min} w punkcie k_{max} opisanym w (24) i wynosi:

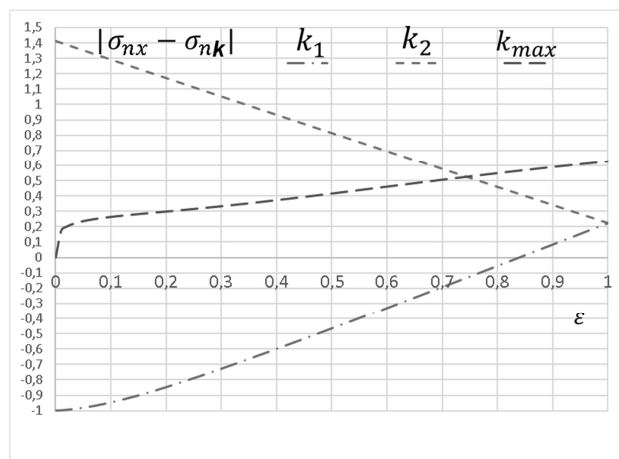
$$(\sigma_{nx} - \sigma_{nk})|_{max} = \varepsilon(1 - \rho_{x1,2}) \frac{\varepsilon + 1 - \sqrt{2\varepsilon(1 + \rho_{x1,2})}}{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\rho_{x1,2}} \quad (28)$$

Przypadek dla korelacji $\rho_{x1,2} = 0$ opisują wzory (28a) i (28b):

$$k_{max} = \frac{(1 - \varepsilon)\sqrt{2\varepsilon} + 2\varepsilon^2}{2(1 + \varepsilon^2)} \quad (28a)$$

$$(\sigma_{nx} - \sigma_{nk})|_{max} = \frac{\varepsilon(\varepsilon + 1 - \sqrt{2\varepsilon})}{1 + \varepsilon^2} \quad (28b)$$

Na rysunku 7 przedstawiono moduł różnicy niepewności z (28b) w funkcji ε dla dwóch punktów k_1 i k_2 spoza przedziału $\langle x_1, x_2 \rangle$ wg wzoru (26) i dla k_{max} ze wzoru (28a).



Rys. 7. Moduł różnicy znormalizowanych niepewności wg. metod I i II w punkcie k_{max} wewnątrz przedziału $\langle x_1, x_2 \rangle$ i poza nim w punktach k_1, k_2 w funkcji stosunku niepewności ε

Kilka przykładów różnic niepewności i ich kwadratów z rys. 7 przybliżonych do 2 cyfr po przecinku, podano w tabeli 1.

Tabela.1. Różnice znormalizowanych niepewności obu metod w kilku wybranych punktach o względnym położeniu k_1, k_2 .

ε	$\sigma_{nk} - \sigma_{nx}$	$\sigma_{nk} - \sigma_{nx}$	$\sigma_{nx} - \sigma_{nk}$		$\sigma_{nk}^2 - \sigma_{nx}^2$
	$k_1 = 1/2 - \sqrt{2}/2$	$k_2 = 1/2 + \sqrt{2}/2$	k_{max}	k_{min}	$k = 1/2 \pm \sqrt{2}/2$
0,5	$\approx 0,47$	$\approx 0,82$	$\approx 0,41$	$\approx 0,20$	0,25
0,8	$\approx 0,05$	$\approx 0,45$	0,55	$\approx 0,26$	0,4
1,0	$\approx 0,22$	$\approx 0,22$	$\approx 0,63$	$\approx 0,30$	0,5

Z tabeli wynika, że dla stosunku niepewności $\varepsilon \leq 0,8$ znormalizowane różnice niepewności bezwzględnych wyznaczone metodami I i II, nie przekraczają 0,4.

Z rysunku 7 wynika, że dla położenia k_1 w przedziale kontrolnym moduł różnicy między znormalizowanymi niepewnościami rośnie przy zmniejszaniu się parametru ε . Największy wzrost obserwuje się dla punktu k_2 . Odległość punktu k_2 od linii prostej w metodzie I jest mniejsza niż odległość maksymalna pomiędzy niepewnościami I i II wewnątrz przedziału. W punkcie k_1 przekracza się wartość maksymalną w przedziale o stosunku niepewności krańców $\varepsilon = 0,5$ i odległość pomiędzy krzywymi ekstrapolacyjnymi metod I i II jest o 0,08 większa od maksymalnej.

2.3. Ocena niepewności względnej dla wartości x_k

Z wzoru (16) wynika, że niepewność względna $\delta_k = \sigma_k/x_k$ punktu x_k o położeniu k względem punktów kontrolnych o skorelowanych wartościach x_1, x_2 opisuje wzór (29a), a po jej normalizacji do niepewności δ_{x2} – wzór (29b):

$$\delta_k = \frac{\sigma_k}{x_k} = \delta_{x2} \sqrt{\frac{\varepsilon^2(1-k_1)^2 + k_1^2 + 2\rho_{x1,2}(1-k_1)k_1\varepsilon}{(1-k_1)\gamma + k_1}} \quad (29a)$$

$$\frac{\delta_k}{\delta_{x2}} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2(1-k_1)^2 + k_1^2 + 2\rho_{x1,2}(1-k_1)k_1\varepsilon}{(1-k_1)\gamma + k_1}} \quad (29b)$$

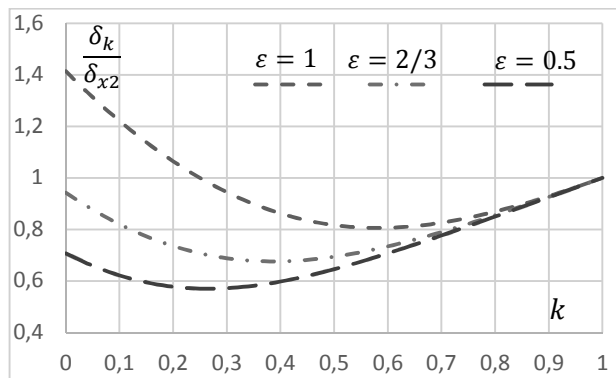
gdzie: $\gamma \equiv x_1/x_2, \varepsilon \equiv \sigma_{x1}/\sigma_{x2}$.

Zależność (29b) jest zbliżona do funkcji stożkowej drugiego stopnia o przebiegu paraboliczno-hiperbolicznym.

Znormalizowaną niepewność względną δ_k/δ_{x2} w funkcji względnego położenia k dla trzech stosunków niepewności $\varepsilon = (0,5; 2/3; 1)$ punktów kontrolnych x_1, x_2 i współczynnika korelacji $\rho_{x1,2} = 0$ przedstawiono na rys. 8. Podobne wykresy otrzyma się dla innych wartości parametrów γ i ε .

Współczynnik korelacji $\rho_{k1,2}$ w punktach x_{k1}, x_{k2} o estymowanych niepewnościach σ_{k1}, σ_{k2} opisany jest wzorem (10). Jest on taki sam dla niepewności względnych i bezwzględnych. Z analizy (10) wynika, że $\rho_{k1,2}$ nieznacznie wzrasta wraz ze stosunkiem niepewności ε punktów kontrolnych, maleje nieliniowo ze wzrostem odległości względnej $\Delta k = k_2 - k_1$ i zależy od położenia Δk . Maksimum $\rho_{k1,2} \rightarrow 1$ uzyskuje się dla $k_1 \rightarrow k_2$, czyli dla wartości x_{k1}, x_{k2} równych sobie w dowolnym punkcie przedziału x_1, x_2 . Jeśli $(k_1 - k_2) \rightarrow 1$ to $\rho_{k1,2} \rightarrow \rho_{x1,2}$.

Znaczna i intuicyjnie nieoczywista jest zależność $\rho_{k1,2}$ dla dużych ujemnych wartości współczynnika korelacji $\rho_{x1,2}$, rzadko spotykanych w praktyce. Wówczas dla stałej długości odcinka Δk i przy $\rho_{x1,2} < 0$ minimum niepewności występuje dla k_1 na początku przedziału kontrolnego (x_1, x_2), ze wzrostem $\rho_{k1,2}$ przechodzi do wartości dodatnich i wzrasta dla $k_1 < 1$. Wymaga to jeszcze bardziej szczegółowych badań



Rys. 8. Znormalizowane niepewności względne δ_k/δ_{x2} w funkcji położenia k dla stosunku niepewności $\varepsilon = (0,5; 2/3; 1)$ w punktach kontrolnych $\gamma = 0,5; \rho_{x1,2} = 0$

3. PRZYKŁADY

3.1. Niepewności sumy i różnicy dwu wartości estymowane z pomiarów w punktach kontrolnych

Ze wzorów (7a) i (7b) wynika, że sumę i różnicę wartości interpolowanych wyrażają równania (30a) i (30b):

$$x_{k1} + x_{k2} = (2 - k_1 - k_2)x_1 + (k_1 + k_2)x_2 \quad (30a)$$

$$x_{k1} - x_{k2} = (k_1 - k_2)x_1 + (k_2 - k_1)x_2 \quad (30b)$$

Wektorowe równanie propagacji wariancji dla wyrażeń opisanych wzorami (30a) i (30b) można zapisać w postaci

$$\mathbf{U}_{k+/-} = \mathbf{S}_{k+/-} \cdot \mathbf{U}_X \cdot \mathbf{S}_{k+/-}^T \quad (31)$$

w którym macierze kowariancji \mathbf{U}_X i $\mathbf{U}_{k+/-}$ oraz czułości \mathbf{S} dla $\mathbf{X} = [x_1, x_2]^T$ i $\mathbf{X}_{k+/-} = [x_{k1+k2}, x_{k1-k2}]^T$ są następujące

$$\mathbf{U}_{k+/-} = \begin{bmatrix} \sigma_{k1+k2}^2 & \rho_{k+/-} \sigma_{k1+k2} \sigma_{k1-k2} \\ \rho_{k+/-} \sigma_{k1+k2} \sigma_{k1-k2} & \sigma_{k1-k2}^2 \end{bmatrix} \quad (31a)$$

$$\mathbf{U}_X = \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & \rho_{x1,2} \sigma_{x1} \sigma_{x2} \\ \rho_{x1,2} \sigma_{x1} \sigma_{x2} & \sigma_{x2}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_{k+/-} = \begin{bmatrix} 2-k_1-k_2 & k_1+k_2 \\ k_2-k_1 & k_1-k_2 \end{bmatrix} \quad (31b, c)$$

Po wykonaniu mnożenia wg równania (31) jako elementy diagonalne macierzy kowariancji $\mathbf{U}_{k+/-}$ otrzyma się kwadraty bezwzględnych niepewności sumy i różnicy. Po normalizacji do σ_{x1}^2 , dla przypadku ogólnego $\rho_{k1,2} \neq 0$ otrzymuje się:

$$\frac{\sigma_{k1+k2}^2}{\sigma_{x2}^2} = \varepsilon^2(2 - k_\Sigma)^2 + k_\Sigma^2 + 2\varepsilon\rho_{x1,2}(2 - k_\Sigma)k_\Sigma \quad (32a)$$

$$\frac{\sigma_{k1-k2}^2}{\sigma_{x2}^2} = \Delta k^2(1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\rho_{x1,2}) \quad (32b)$$

gdzie: $k_\Sigma = k_1 + k_2, \Delta k = k_2 - k_1$.

Zaś współczynnik korelacji wynosi

$$\rho_{k+/-} = \frac{\Delta k[2(k_\Sigma - 1)\rho_{x1,2}\sigma_{x1}\sigma_{x2} + (2 - k_\Sigma)\sigma_{x1}^2 - k_\Sigma\sigma_{x2}^2]}{\sigma_{k1+k2} \sigma_{k1-k2}} \quad (33)$$

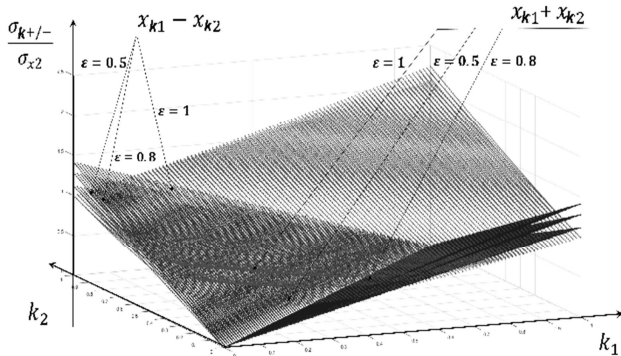
W przypadku szczególnym dla $\rho_{x1,2} = 0$ otrzymuje się wzory:

$$\sigma_{k+/-}^2 = (1 \pm 1 - k_1 \mp k_2)^2 \sigma_{x1}^2 + (k_1 \pm k_2)^2 \sigma_{x2}^2 \quad (34)$$

$$\frac{\sigma_{k_1+k_2}^2}{\sigma_{x_2}^2} = \varepsilon^2(2 - k_x)^2 + k_x^2 \quad (35a)$$

$$\frac{\sigma_{k_1-k_2}^2}{\sigma_{x_2}^2} = \Delta k^2(1 + \varepsilon^2) \quad (35b)$$

Wykresy 3D znormalizowanych niepewności wg (35a) i (35b) dla sumy i różnicy w funkcji parametrów położenia k_1 i k_2 , współczynnika korelacji $\rho_{x_1,2} = 0$ i stosunku niepewności punktów kontrolnych ε wynoszących 0,8; 1 i 0,5 przedstawiono na rysunku 9.



Rys. 9. Znormalizowane niepewności bezwzględne σ_{k+}/σ_{x_2} sumy i σ_{k-}/σ_{x_2} różnicy estymowanych wartości x_{k_1} i x_{k_2} w funkcji ich położenia k_1, k_2 dla stosunku niepewności $\varepsilon = \sigma_{x_1}/\sigma_{x_2} = 0,5; 2/3; 0,8$ i współczynnika korelacji $\rho_{x_1,2} = 0$ punktów kontrolnych

Ze wzorów (32a) i (32b) oraz z rysunku 9 wynika, że ze wzrostem stosunku niepewności ε zwiększa się bezwzględna niepewność sumy i różnicy estymowanych wartości. Dla sumy jest ona zawsze większa niż dla różnicy. Wraz z wartością współczynnika korelacji $\rho_{x_1,2}$ wzrasta też niepewność sumy i maleje jej różnica.

3.2. Przykłady obliczenia niepewności wg podanej metody

Maksymalny błąd dopuszczalny miernika cyfrowego (MBD): jest to wartość $\pm a_{Re}$ (Reading w %) od wartości odczytu x_1 powiększona o $\pm b_{Rg}$ (%) od wartości zakresu X_R – (Range) lub powiększona o $\pm m_d$ CNZ (najmniej znaczących cyfr wskazania). Wówczas przy założeniu rozkładu jednostajnego bezwzględna niepewność standardowa wskazania (odczytu) miernika jest obliczana wg wzoru:

$$u_B(x_x) = \frac{a_{Re}|x_1| + b_{Rg}|X_R|}{100\sqrt{3}} = \frac{a_{Re}|x_1| + m_d CNZ}{100\sqrt{3}} \quad (36)$$

Jeśli np. woltomierzem DC z zakresem $U_R = \pm 100$ V mierzy się napięcie stałe, a wartość MBD zdefiniowano jako: ± 0.05 (%) od wartości odczytu ± 3 CNZ, to bezwzględna niepewność standardowa dla wskazania wartości $U_{V1} = 80.01$ V (CNZ = 0.01 V) jest równa:

$$u_B(U_{V1}) = \frac{0.05|90.05 \text{ V}|}{100} + \frac{3 \cdot 0.01 \text{ V} \approx 0.0433 \text{ V}}{\sqrt{3}} \quad (37)$$

Podobnie, bezwzględna niepewność standardowa wskazania woltomierza $U_{V2} = -70.13$ V jest równa:

$$u_B(U_{V2}) = \frac{0.05|-70.13 \text{ V}|/100 + 3 \cdot 0.01 \text{ V}}{\sqrt{3}} \approx 0.038 \text{ V} \quad (38)$$

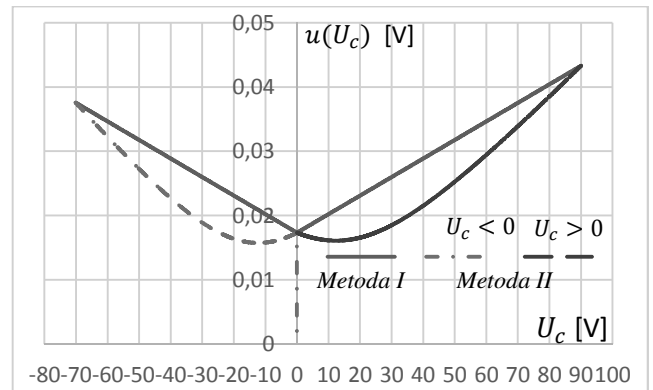
W metodzie drugiej dla ujemnych x stosuje się inną prostą i trzeba policzyć niepewności dla napięcia $U_{V0} = 0$ V, gdyż w tym punkcie obie proste łączą się:

$$u_B(U_{V0}) = \frac{0.05|0 \text{ V}|/100 + 3 \cdot 0.01 \text{ V}}{\sqrt{3}} \approx 0.0173 \text{ V} \quad (39)$$

Według wzoru (14) przy np. $k = 0.5$, niepewność wartości napięcia dla zakresu ujemnego

$$U_c = (1-k) \cdot U_{V2} + k \cdot U_{V0} = (U_{V2} + U_{V0})/2 = -35,065 \text{ V} \quad (40)$$

$$u(U_c) = \frac{\sqrt{0.017321^2 + 0.0376^2}}{2} \approx 0.021 \text{ V} \quad (41)$$



Rys. 10. Charakterystyka niepewności miernika cyfrowego dla zakresu ujemnych i dodatnich napięć dla Metody I i Metody II, opartej na skrajnych punktach

Według wzoru (14) przy $k=0.5$, niepewność wartości napięcia dla zakresu dodatniego, przy napięciu

$$U_c = (1-k) \cdot U_{V0} + k \cdot U_{V1} = (U_{V0} + U_{V1})/2 = 45,025 \text{ V} \quad (42)$$

$$u(U_c) = \frac{\sqrt{0.017321^2 + 0.0433^2}}{2} \approx 0.023 \text{ V} \quad (43)$$

Dla napięcia wybranego w sposób dowolny np. $U_c = 9,96$ V

$$U_c = (1-k) \cdot U_{V0} + k \cdot U_{V1} = 9,96 \text{ V} \quad k = 9.96/90.05 \approx 0,11$$

$$u(U_c) = \sqrt{(1-k)^2 u_0^2 + k^2 u_2^2} \approx 0.016 \text{ V} \quad (44)$$

Natomiast, jeśli podstawimy wartość $U_c = 9.96$ V bezpośrednio do wzoru, wg którego obliczana jest niepewność standardowa, to uzyskamy

$$u_B(U_c) = \frac{0.05|9.96 \text{ V}|/100 + 3 \cdot 0.01 \text{ V}}{\sqrt{3}} \approx 0.0202 \text{ V} \quad (45)$$

W każdym przypadku niepewność wyznaczana metodą II jest mniejsza niż metodą I, co zilustrowano na rysunku liniami przerywanymi.

4. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

W pracy zaproponowano, by macierzowe równanie propagacji wariancji podane w Suplemencie 2 Przewodnika [1, 2] użyć do estymacji niepewności dowolnej liczby punktów funkcji opisującej mierzoną charakterystykę badanego obiektu, np. przyrządu, układu pomiarowego, urządzenia, procesu lub produktu. Wyznaczono i omówiono wzory dla estymacji wartości niepewności bezwzględnych i względnych oraz współczynnika korelacji dla punktów

funkcji liniowej na podstawie pomiarów w dwu jej punktach kontrolnych. Dotyczy to m.in. przyrządów pomiarowych i systemów o bezpośrednim odczycie mierzonej wielkości i mnożnikowej zmianie zakresu. Ich charakterystyka wejście-wyjście jest linią prostą o nachyleniu równym 1. Niepewności dla punktów funkcji nieliniowej wyznacza się z jej liniowej zależności pomiędzy macierzami kowariancji.

Rozpatrzono dwie metody estymacji niepewności w wybranych punktach charakterystyki, nazwane jako I i II. W metodzie I założono liniową zależność między niepewnością bezwzględną typu B i wartością wielkości mierzonej, otrzymaną jako $1/\sqrt{3}$ dopuszczalnego błędu maksymalnego przyrządu (MBD). Błąd ten stosują producenci aparatury do oceny dokładności przyrządów, np. woltomierza cyfrowego. W metodzie I dla całego zakresu pomiarowego trzeba przyjąć współczynnik korelacji równy 1. Stosuje się ją do estymacji niepewności składowej typu B przyrządów. Jeśli, w pomiarach stosuje się kilka przyrządów i urządzeń pomiarowych z podobnym wpływem warunków otoczenia, to należy uwzględnić korelacje typu B.

W metodzie II dla kontrolowanych i estymowanych wartości przyjęto model statystyczny. Wartości w punktach badanej funkcji interpolowano jako liniową superpozycję wartości zmierzonych w punktach kontrolnych i ich wariancji. Z niepewności i współczynnika korelacji dla tych punktów estymuje się bezwzględne i względne niepewności dla dowolnych punktów funkcji opisującej badaną charakterystykę. Uzyskano paraboliczne przebiegi niepewności z minimum wewnątrz przedziału pomiędzy punktami kontrolnymi oraz znaczny wzrost niepewności poza jego krańcami. Względne położenie minimum i jego obniżenie zależy od stosunku niepewności i współczynnika korelacji jego krańców. Nie zależy zaś od położenia tego przedziału, wzdłuż zakresu pomiarowego. Metodą II wyznacza się niepewność całkowitą u i jej składową typu A. Metoda I jest jej szczególnym przypadkiem, gdy wartości w punktach kontrolnych mają współczynnik korelacji równy 1. Znormalizowano parametry punktów kontrolnych oraz porównano wyniki przykładów uzyskane dwoma metodami. Jeśli dla sąsiednich punktów pomiarowych niepewności różnią się co najmniej tak samo jak wartości wielkości badanej, to np. dla stosunku tych niepewności $\varepsilon = 0,5$ znormalizowana różnica wynosi 0,2, a dla $\varepsilon = 1/3$ ok. 0,15.

Estymację niepewności dla nieliniowego przetwarzania badanej funkcji wyznacza się tą samą metodą macierzową.

Możliwość zastosowania metody II do estymacji niepewności funkcji nieliniowych z zastosowaniem większej liczby punktów kontrolnych przeanalizowano wstępnie w [6]

Jako przykład użycia podanych wzorów ogólnych, metodą statystyczną II wyznaczono przebiegi niepewności sumy i różnicy dwu dowolnych wartości badanej funkcji estymowanych z pomiarów w dwu punktach kontrolnych.

Zaproponowana w pracy metoda stanowi uzupełnienie metod regresji. Jest ona dość prosta jako oparta na wynikach pomiarów o wymaganej odpowiedniej dokładności tylko w dwu punktach zakresu liniowej lub nieliniowej funkcji przetwarzania. Umożliwia ona kontrolę zmian parametrów znamionowych charakterystyki po kalibracji lub poprzednich pomiarach kontrolnych. Może być samodzielnie stosowana w wielu pomiarach, w tym w automatycznej kalibracji i kontroli, monitoringu i diagnostyce charakterystyki o znanej funkcji.

W prezentacji prac [4] i w kilku innych poprzednich publikacjach w czasopiśmie PAR autorzy omówili różne przykłady szacowania niepewności układów do pośrednich pomiarów wieloparametrowych. Wykaz tych prac podaje publikacja [6] zawarta w tym zeszycie konferencji MKM 51.

5. BIBLIOGRAFIA

1. JCGM100:2008, Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement.
2. JCGM102:2011 Supplement 2 to the 'GUM- Extension to any number of output quantities'.
3. Warsza, Z. L., Metody rozszerzenia analizy niepewności pomiarów. Monografia PIAP Warszawa 2016
4. Warsza, Z.L. Part 1; and Z.L. Warsza, J. Puchalski: Part 2. Mat. Konf. (CD): Problems and Progress of Metrology ppm'18 Szczyrk 04-06 June 2018 r. Series: Conferences No. 22, Metrology Commission of Katowice Branch of the Polish Academy of Science.
5. Warsza, Z.L., Puchalski, J.: Estymacja niepewności charakterystyki z pomiarów w punktach kontrolnych *Pomiary Automatyka Robotyka*. R.22, 4/2018, pp.39 -50 DOI: 1014311 /PAR_230/39
6. Warsza, Z.L., Puchalski, J. Niepewność wieloparametrowych pomiarów wielkości skorelowanych. *Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej*, Nr 66 s. 95-100.

ESTIMATION UNCERTAINTIES OF POINTS OF FUNCTION FROM TWO CONTROL MEASUREMENTS

The estimation of the uncertainty of points of the function describing the tested characteristics based on measurement results at two control points is discussed. Two methods were used. By method I, the type B uncertainty component is estimated from the permissible values of the maximum error of the apparatus used for measurements at the controlled points of this tested characteristic. With stable measurement conditions and negligible uncertainty of type A of measurements, a correlation coefficient equal to 1 should be assumed for results of several points measured by the same instrument. The method II is statistical. It is based on measurement data at control points and is used for estimation of type A and combined uncertainties of the function values of the points being tested. Correlation coefficient between their results are also estimated. Used for that is the equation binding the covariance matrices in indirect multiparameter measurements according to the Supplement 2 of the GUM Guide. Relative and absolute uncertainties for the sum and difference of values of two points were also determined and few examples of calculations were given. With a limited number and duration of measurements, this method can be used in the monitoring, automatic control and diagnosis of various objects.

Keywords: indirect measurements, permissible maximum measurement error, uncertainty estimation, values of the characteristic, control points, , covariance matrix, correlation coefficient.