

Jacek Mikołajewicz, Rafał M. Wojciechowski  
Politechnika Poznańska, Poznań

## POLOWO-OBWODOWY MODEL OSIOWOSYMETRYCZNEGO AKTUATORA LINIOWEGO

### THE FIELD-CIRCUIT MODEL OF AXIS-SYMMETRICAL LINEAR ACTUATOR

**Streszczenie:** W artykule przedstawiono polowo-obwodowy model osiowosymetrycznego aktuatora liniowego. Rozpatrywano aktuator nurnikowy z nurem stożkowym. Parametry całkowite modelu, takie jak indukcyjność oraz siła, zostały wyznaczone na podstawie rozkładu dwuwymiarowego pola magnetycznego. Obliczone parametry skupione następnie zaimplementowano w modelu obwodowym przetwornika, tzn. modelu obejmującym układ sprzężonych równań obwodu elektrycznego oraz równania dynamiki. W rozważaniach pominięto tłumiący charakter prądów wirowych. Przedstawiono wybrane wyniki badań symulacyjnych.

**Abstract:** In the paper a field-circuit model of axis-symmetrical linear actuator has been presented. An actuator with conical armature has been considered and investigated. The integral parameters of the model, such as the inductance and the force have been determined on the basis of 2D electromagnetic field distributions, which have been obtained for the field model. Then, the calculated parameters have been implemented to the circuit model, i.e. the model of the system comprising the coupled equations of the electrical circuit and the mechanical equilibrium equation of the considered actuator. In the considerations, the eddy current effect has not been taken account. The selected results of simulations have been presented.

**Słowa kluczowe:** Model polowo-obwodowy, aktuator liniowy, analiza numeryczna

**Keywords:** Field-circuit model, linear actuator, numerical analysis

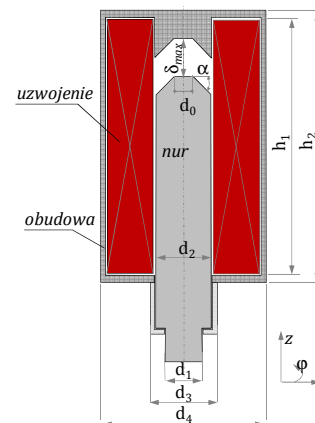
### 1. Wstęp

Aktuatorami liniowymi nazywamy siłowniki elektromagnetyczne realizujące ruch liniowy. Takie siłowniki znajdują swoje zastosowanie w wielu dziedzinach przemysłu, głównie w automatyce procesów. Ponadto coraz częściej stosuje się je również w urządzeniach przeznaczonych do rehabilitacji oraz układach bioelektromechanicznych.

Głównymi zaletami, które decydują o zastosowaniu aktuatorów elektromagnetycznych są: lekka i kompaktowa konstrukcja, wysoka sztywność, łatwy montaż urządzenia oraz niski poziom emitowanego hałasu. Obecnie istnieje wielka różnorodność aktuatorów o ruchu liniowym. Ewolucja systemów automatyki wymusiła w przypadku niektórych urządzeń stosowanie bardzo precyzyjnych jednostek liniowych. Takie aktuatory powstawały z myślą o aplikacjach, w których wymagany jest ruch liniowy z dokładnym sterowaniem prędkością i pozycjonowaniem siłownika, przy jednoczesnym zachowaniu dużej powtarzalności. Celem niniejszej pracy jest omówienie obwodowo-polowego modelu osiowosymetrycznego aktuatora liniowego. W pracy przedstawiono model matematyczny aktuatora oraz wybrane wyniki obliczeń stanów dynamicznych.

### 2. Polowy model elektromagnesu

Rozpatrywany aktuator liniowy pokazano na rysunku 1.



Rysunek 1. Badany aktuator liniowy

Podstawowe wymiary konstrukcyjne badanego aktuatora zestawiono w Tabeli 1.

Tabela 1. Wymiary konstrukcyjne aktuatora

$d_0$	8 [mm]	$h_1$	138 [mm]
$d_1$	12 [mm]	$h_2$	146 [mm]
$d_2$	30 [mm]	$\delta_{\max}$	20 [mm]
$d_3$	34 [mm]	$\alpha$	45 [°]
$d_4$	88,36 [mm]		

W pracy do wyznaczania magnetostaticznego rozkładu pola oraz obliczania wartości para-

metrów całkowych dla rozpatrywanego aktuatora opracowano oprogramowanie wykorzystujące dwuwymiarowe ujęcie metody elementów skończonych (MES) [1]. W szczególności poszukiwano takich parametrów całkowych, jak indukcyjność uzwojenia  $L$  oraz siłę elektromagnetyczną działającą na nur aktuatora  $F_e$ . Wartości tych parametrów określano w funkcji położenia nura  $\delta$  i wartości prądu  $i_c$  w uzwojeniu. Ponieważ rozpatrywany w pracy aktuator charakteryzuje się symetrią osiową, rozkład pola magnetycznego w jego obrębie można wyznaczyć na podstawie równania pola o następującej postaci:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{\mu 2\pi r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\mu 2\pi r} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] = -J_\phi \quad (1)$$

gdzie:  $\phi$  opisuje krawędziowe wartości potencjału wektorowego  $A$  (strumienie oczkowe), które dla układu o symetrii osiowej określa się jako  $\phi = 2\pi A_\phi$ , a  $J_\phi$  jest składową obwodową wektora gęstości prądu. W celu rozwiązania równania (1) należy zdyskretyzować rozpatrywaną przestrzeń za pomocą elementów o prostych kształtach. W pracy do dyskretyzacji obszaru rozpatrywanego aktuatora zastosowano najprostsz rodzaj siatki złożony z elementów trójkątnych. Następnie przystąpiono do budowania funkcjonału energetycznego  $I$ . Po uformowaniu funkcjonału, jego zróżniczkowaniu oraz przyrównaniu do zera  $\partial I / \partial \phi = 0$  uzyskano równanie MES o następującej postaci:

$$\mathbf{R}_\mu(\delta, \phi) \cdot \phi = \Theta \quad (2)$$

w którym,  $\mathbf{R}_\mu$  jest macierzą reluktancji oczkowych [2],  $\phi$  jest wektorem strumieni oczkowych, a  $\Theta$  jest wektorem przepływów w uzwojeniu aktuatora wyznaczanym na podstawie iloczynu wektora  $\mathbf{z}$  opisującego rozłożenie zwojów i wartości prądu  $i_c$  w uzwojeniu, tj.

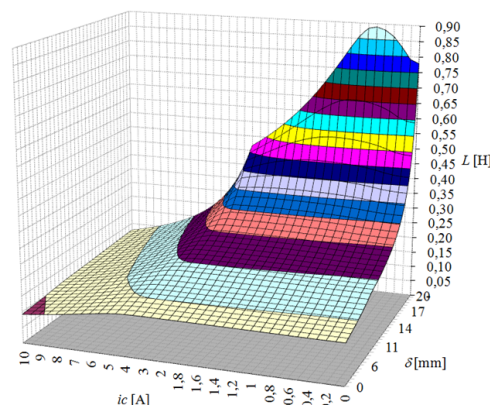
$$\Theta = \mathbf{z} \cdot i_c \quad (3)$$

W pracy równanie (1) rozwiązywano wielokrotnie dla zadanych wartości położenia nura  $\delta$  w zakresie  $\langle 0, \delta_{\max} \rangle$  oraz wartości prądu  $i_c$  w przedziale  $\langle 0, I_{\max} \rangle$ . Na podstawie przeprowadzonych obliczeń oraz uzyskanych wartości strumieni oczkowych  $\phi$  określono następnie

relacje pomiędzy indukcyjnością  $L$  oraz siłą elektromagnetyczną  $F_e$  w funkcji szczeliny powietrznej  $\delta$  oraz prądu  $i_c$ . Obliczając indukcyjności  $L$  uzwojenia dla kolejnych wariantów korzystano z zależności:

$$L = \mathbf{z}^T \cdot \phi \cdot i_c^{-1} \quad (4)$$

Wyniki uzyskanych obliczeń symulacyjnych ilustruje rysunek 2.



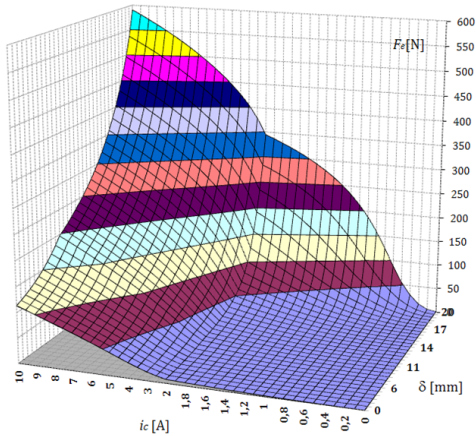
Rysunek 2. Wartości indukcyjności w funkcji położenia zwory  $\delta$  oraz prądu  $i_c$

Wartość siły  $F_e$  wyznaczono natomiast na podstawie formuły opisującej objętościową gęstość siły  $\mathbf{f}_e = \mathbf{J}_m \times \mathbf{B}$ , będącej iloczynem wektora gęstości prądów magnetyzacji  $\mathbf{J}_m$  i indukcji magnetycznej  $\mathbf{B}$ . Ponieważ w pracy rozpatruje się układ o symetrii osiowej, w którym przemieszczenie nura odbywa się w kierunku osi  $z$  układu współrzędnych, formuła opisująca objętościową gęstość siły upraszcza się do postaci  $f_e = J_{m\phi} \cdot B_r$ , w której  $J_{m\phi}$  jest składową kątową wektora gęstości prądu magnetyzacji, a  $B_r$  składową promieniową wektora indukcji magnetycznej. Wówczas wartość siły działającej na nur można obliczyć na podstawie poniższej całki:

$$F_e = 2\pi \iint_{S_n} J_{m\phi} B_r r dr dz = \sum_{i=1}^{l_{en}} \iint_{S_{ei}} \frac{1}{\Delta} (\mathbf{R}_{\mu 0}(\delta) - \mathbf{R}_\mu(\delta, \phi)) \cdot \phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} dr dz \quad (5)$$

przy czym  $S_n$  jest polem powierzchni stożka, na który działa siła  $F_e$ ,  $S_{ei}$  jest powierzchnią  $i$ -tego elementu skończonego,  $\Delta$  powierzchnią przyporządkowaną danemu węzłowi (krawędzi) siatki, dla której określono  $J_{m\phi}$ ,  $l_{en}$  liczbą elementów skończonych w obrębie nura, a  $\mathbf{R}_{\mu 0}$

macierzą reluktancji oczkowych wyznaczonych przy założeniu przenikalność rdzenia i nura aktuatora  $\mu=\mu_0$ . Siłę działającą na nur, w funkcji szczeliny powietrznej  $\delta$  oraz prądu  $i_c$ , wyznaczoną na podstawie zależności (5), ilustruje rysunek 3.



Rysunek 3. Wartości siły elektromagnetycznej w funkcji położenia zwory  $\delta$  oraz prądu  $i_c$

Uzyskane w ten sposób funkcje opisujące zależności indukcyjności  $L$  oraz siły  $F_e$  od położenia nura aktuatora  $\delta$  oraz prądu  $i_c$  zaimplementowano następnie w programie Matlab-Simulink, w którym, na podstawie modelu obwodowego, przeprowadzono analizę stanów dynamicznych badanego aktuatora [4].

### 3. Obwodowy model elektromagnesu

Model matematyczny rozpatrywanego w pracy elektromagnesu zawiera dwa sprzężone ze sobą równania: (a) równanie obwodu zasilającego:

$$L(i_c, \delta) \frac{\partial i_c}{\partial t} + i_c \frac{\partial}{\partial \delta} (L(i_c, \delta)) v + R i_c = U \quad (6)$$

oraz (b) równanie równowagi mechanicznej:

$$m(dv/dt) + k_t v = F_e - F_{obc} \quad (7)$$

przy czym, użyte w powyższych wzorach symbole oznaczają:  $L(i_c, \delta)$  – indukcyjność układu;  $i_c$  – natężenie prądu cewki;  $R$  – rezystancja uzwojenia cewki;  $U$  – napięcie zasilające;  $F_e$  – siła elektromagnetyczna działająca na nur;  $F_{obc}$  – siła obciążenia;  $m$  – masa nura;  $k_t$  – współczynnik tarcia. W rozważaniach założono, że rdzeń aktuatora wykonany jest z nieprzewodzącego materiału ferromagnetycznego. Pominięto w związku z tym tłumiący charakter prądów wirowych. W równa-

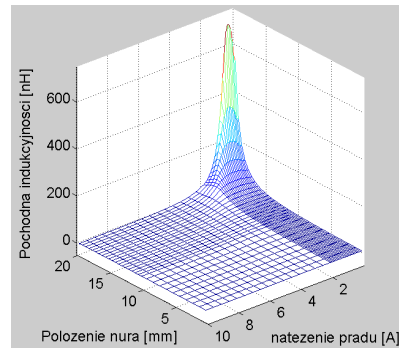
niu obwodu zasilającego (6) występuje człon  $\partial(L(i_c, \delta))/\partial \delta$  związany z pochodną cząstkową względem współrzędnej  $\delta$ . W obliczeniach polowych, ze względu na bardzo dużą czasochłonność obliczeń oraz zapotrzebowanie na pamięć operacyjną, wyznaczono indukcyjność  $L$  dla kilkunastu ( $n=36$ ) wartości prądu  $i_c$  i ( $m=31$ ) dyskretnych położenia nura. W celu zwiększenia dokładności obliczeń, dla każdej wartości prądu  $i_c$  zbudowano wielomian interpolacyjny Lagrange'a pozwalający w sposób analityczny (przy założonym prądzie  $i_c$ ) wyznaczyć indukcyjność  $L$  dla dowolnego położenia zwory [3]. Wielomian ten, dla  $k=m-1$ , przyjmuje postać:

$$L(i_c = \text{const.}, \delta) = \sum_{j=0}^k a_{(k-j)} \delta^{(k-j)} \quad (8)$$

Natomiast po różniczkowaniu otrzymuje się:

$$L'(i_c = \text{const.}, \delta) = \sum_{j=0}^{k-1} (k-j) a_{(k-j)} \delta^{(k-j-1)} \quad (9)$$

Na rysunku 4 pokazano wyznaczone w ten sposób wartości pochodnych indukcyjności.

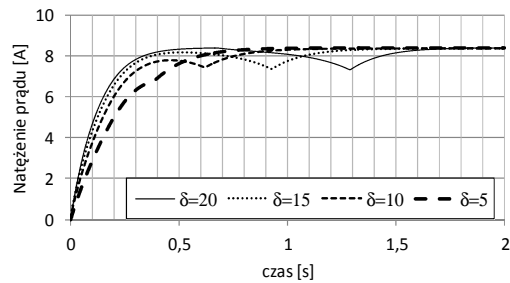


Rysunek 4. Wartości pochodnej indukcyjności w funkcji położenia zwory  $\delta$  oraz prądu  $i_c$

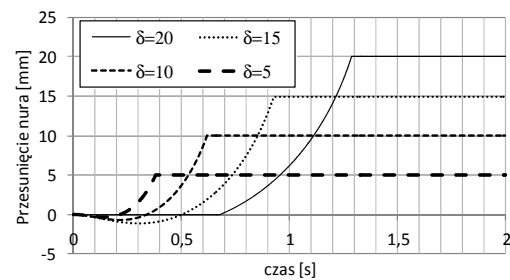
### 4. Wyniki obliczeń symulacyjnych

Badany aktuator zasilono ze źródła napięcia stałego o wartości DC=9V. Liczba zwojów cewki aktuatora wynosiła  $l_z = 840$ . Rezystancja uzwojenia wynosi 1,073Ω, a masa nura 0,77 kg. Na początku obliczeń aktuator obciążono siłą oporową o wartości  $F_{obc} = 60N$ . Obliczenia symulacyjne wykonano dla czterech różnych wstępnych szczelin powietrznych (położenia nura) wynoszących odpowiednio:  $\delta = 20$  mm,  $\delta = 15$  mm,  $\delta = 10$  mm oraz

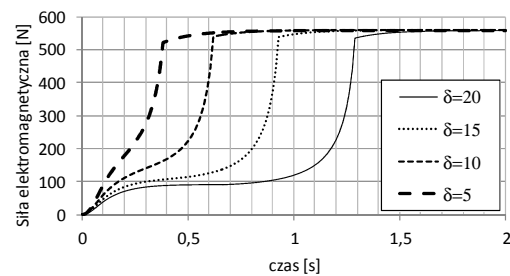
$\delta = 5$  mm. Wyniki obliczeń zestawiono na rysunkach 5-7.



Rysunek 5. Przebiegi prądu cewki w funkcji czasu dla kilku różnych wstępnych położeń nura



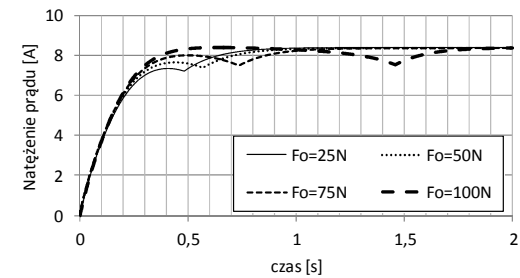
Rysunek 6. Przebiegi położenia nura w funkcji czasu dla jego kilku wstępnych położeń



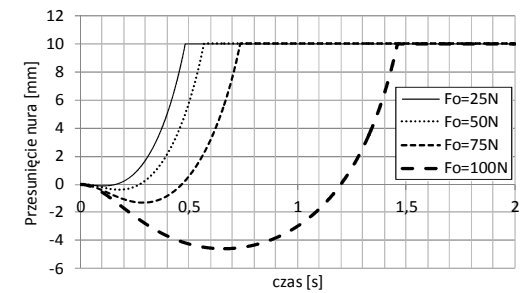
Rysunek 7. Przebiegi siły działającej na nur w funkcji czasu dla jego kilku wstępnych położeń

We wszystkich przypadkach zarówno prąd jak i siła elektromagnetyczna uzyskują tą samą wartość ustaloną. Czas zadziałania jest najmniejszy dla najmniejszej szczeliny powietrznej i rośnie wraz z jej wzrostem. Kolejne obliczenia wykonano dla stałej szczeliny początkowej wnoszącej 10 mm i kilku różnych sił obciążenia. Wyniki obliczeń ilustrują rysunki 8-9. W tym przypadku prąd i siły (nie pokazane w artykule) zachowują się podobnie jak poprzednio, przyjmując te same wartości ustalone. Różnice uwidaczniają się natomiast w przebiegach położenia nura. Zgodnie z oczekiwaniami czas osiągnięcia położenia ustalonego (10 mm) wzrasta wraz z rosnącą siłą ob-

ciążenia. Widoczny jest także efekt cofania się nura. Nur bowiem ma w tym przypadku możliwość cofnięcia się o 10 mm.



Rysunek 8. Przebiegi prądu cewki w funkcji czasu dla kilku różnych sił obciążenia nura



Rysunek 9. Przebiegi położenia nura w funkcji czasu dla kilku różnych sił obciążenia

## 5. Podsumowanie

W artykule przedstawiono polowo-obwodowy model aktuatora liniowego. Wyniki przeprowadzonych badań symulacyjnych są zgodne z literaturowymi. Pozwala to wykorzystać opracowany model do dalszych, bardziej zaawansowanych badań. Kolejnym etapem badań będzie analiza pracy aktuatora w układzie zamkniętym, pozwalającym na precyzyjne, powtarzalne odtwarzanie zadanego ruchu.

## 6. Literatura

- [1] Zienkiewicz O. C., „Metoda elementów skończonych”, Wydawnictwo Arkady, Warszawa, 1974.
- [2] Wojciechowski R. M., Jędrzycka C., Demenko A., Sykułski J. K., „Strategies for 2D and 3D field computation in the design of permanent magnet motors”, IET Sci., Meas. & Techn. Vol. 9, No. 2, 2015, p. 224-233.
- [3] J. Mikołajewicz „Model of dynamic operation of stepper linear reluctance motor based on field approach”, COMPEL, Vol. 32 No. 4, 2013, pp. 1255-1266.
- [4] Tomczuk B., Waindok A., Wajnert D.: Transients in the electromagnetic actuator with the controlled supplier, Journal of Vibro-engineering, March 2012, vol. 14, Issue 1, pp. 39-44.