

MODELOWANIE MATEMATYCZNE SIECI DOSTAW

W artykule przedstawiono na wybranych przykładach zagadnienie matematycznego modelowania sieci dostaw.

WSTĘP

Celem artykułu jest przedstawienie matematycznych metod modelowania sieci dostaw, z zastosowaniem znanych metod teorii grafów, teorii przepływów w sieciach transportowych i programowania sieciowego. Wybrane metody zaprezentowano na praktycznych przykładach obliczeniowych z zastosowaniem arkusza kalkulacyjnego Excel z modulem Solver.

W pierwszym rozdziale skoncentrowano się na przedstawieniu pojęć związanych z łańcuchami i sieciami dostaw. Opisano również podstawowe operacje związane z prawidłowym funkcjonowaniem łańcucha dostaw.

W drugim rozdziale omówiono zagadnienie transportowe z przykładem rozwiązania dwuetapowego otwartego zagadnienia transportowego.

Trzeci rozdział zawiera przykład rozwiązania problemu poszukiwania najkrótszej drogi. W obu przykładach problem sformułowano i rozwiązano jako poszukiwanie optymalnego przepływu w sieci.

W czwartym rozdziale zawarto przykłady analizy sieciowej przedsięwzięć metodami CPM i PERT.

Artykuł kończy podsumowanie oraz wnioski na podstawie przedstawionych przykładów.

1. MODELOWANIE SIECI I ŁAŃCUCHA DOSTAW ZA POMOCĄ GRAFÓW

1.1. Pojęcie łańcucha dostaw oraz sieci dostaw

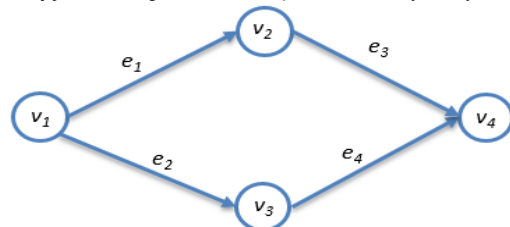
Często w terminologii logistycznej pojęcia łańcucha dostaw oraz sieci dostaw używane są zamiennie jako równoważne, co w terminologii matematycznej jest traktowane jako błąd. Nie wnikając w ścisłą definicję matematyczną, łańcuch stanowi jedną ze „ścieżek” dostaw w sieci, która może składać się z wielu, zwykle powiązanych ze sobą łańcuchów.

Łańcuchy dostaw powstały pod wpływem coraz większych wymagań klientów wobec przedsiębiorstw. Firmy wydobywcze, produkcyjne, handlowe oraz usługowe, aby sprostać coraz większym wymaganiom otoczenia zaczęły ściślej współpracować. Współpraca ta polegała na polepszeniu jakości przepływów produktów, informacji oraz środków finansowych. Dzięki takiej współpracy i zaufaniu firmy stawały się bardziej konkurencyjne oraz w lepszym stopniu optymalizowały przedsięwzięcia związane z produkcją jak i dystrybucją towarów. Rezultatem takich działań było polepszenie jakości produktów oraz zmniejszenie ich cen.

Jednak obecnie w wyniku umiędzynarodowienia procesów logistycznych, proste łańcuchy dostaw nie są wystarczająco konkurencyjnymi na rynku. Przedsiębiorstwa, które chcą zatrzymać swoich klientów jak i pozyskiwać nowych muszą zwiększać ilość ogniw objętych optymalizacją oraz współpracą. Wynikiem tego jest coraz wyraźniejsze rozszerzanie się zakresu działalności pojedynczych

łańcuchów dostaw czego skutkiem jest tworzenie powiązanych grup łańcuchów dostaw zwanych sieciami dostaw.

Ogólnie sieć można przedstawić jako zbiór węzłów, między którymi występują określone relacje. Sieć w znaczeniu matematycznym można przedstawić jako graf skierowany $G=(V, E)$ gdzie: V to zbiór węzłów, a E to zbiór krawędzi). Prosty graficzny obraz sieci dostaw w ujęciu teorii grafów został przedstawiony na rysunku 1.



Rys. 1. Graficzny obraz sieci $G=(V, E)$.

W interpretacji logistycznej węzły grafu sieciowego mogą reprezentować obiekty, firmy kooperujące albo stany procesu logistycznego, a krawędzie grafu procesy i operacje logistyczne np. planistyczne, wytwórcze, ładunkowe, transportowe.

1.2. Operacje wykonywane w ramach łańcucha dostaw

Operacje/procesy realizowane i modelowane w łańcuchach dostaw należą do czterech faz przedstawionych poniżej.

Planowanie

W logistyce wyróżnia się trzy rodzaje planowania:

- Planowanie strategiczne - dotyczy podejmowania decyzji w zakresie długiego horyzontu czasu. Dotyczy również kierunków przyszłej działalności firm łańcucha oraz ich rozwoju na rynku.
- Planowanie taktyczne - obejmuje szczebel niższego poziomu zarządzania. Plany te dotyczą ograniczonego i krótszego czasu działania oraz konkretnych wydziałonych przedsiębiorstwa łańcucha.
- Planowanie operacyjne - wynika z przekształcenia planów taktycznych. Są to zaplanowane krótkoterminowe działania, które zazwyczaj są wykonywane w ramach pojedynczych firm łańcucha dostaw.

Do planowania zalicza się też: prognozowanie popytu, ustalanie cen oraz zarządzanie zapasami [1].

Zaopatrzenie

Pozyskiwanie zasobów jest głównym zadaniem menadżera zakupów. Proces ten obejmuje czynności m.in. takie jak: wybór dostawców, negocjowanie kontraktów i zarządzanie kontraktami, zakup, odbiór i kontrola towarów [2].

Wytwarzanie

Projektowanie produktów oraz dobieranie komponentów potrzebnych do ich produkcji jest zależne zarówno od dostępnych technologii, jak i wymagań dotyczących jakości wyrobu. Obecnie zwraca się coraz większą uwagę na wpływ projektu oraz jego części składowych na funkcjonowanie łańcucha dostaw, od którego uzależnione jest wytwarzanie wyrobu [2].

Dostarczanie

Zarządzanie zamówieniami jest procesem, w którym przekazywane są informacje dotyczące zamówień złożonych przez klienta. Proces ten przebiega wzdłuż całego łańcucha dostaw. Obejmuje również przepływ informacji zwrotnych zawierających daty dostaw, substytucji produktów, jak i opóźnień realizacji konkretnych zamówień przez cały łańcuch dostaw [2].

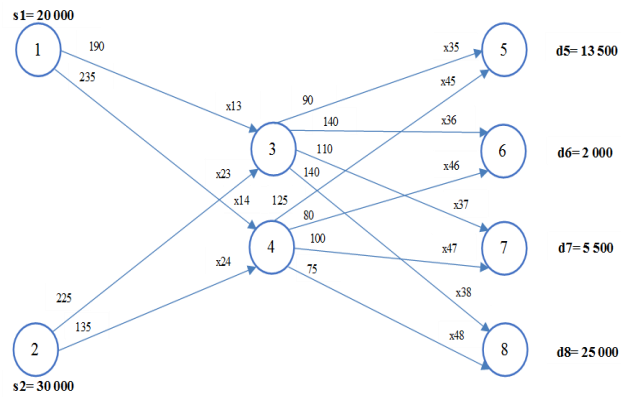
2. WIELOETAPOWE ZAGADNIENIE TRANSPORTOWE

Problemem wieloetapowego zagadnienia transportowego jest transport towarów przez określony punkt pośredni, np. magazyn, punkt przeładunkowy, co powoduje, że zadanie transportu jest etapowe, powszechne dla wielu procesów logistycznych.

Zadanie można rozwiązać efektywnie za pomocą specjalnego algorytmu zwanego algorytmem lub sympleksem transportowym. Do rozwiązania można użyć modułu Solver arkusza Microsoft Excel, w którym nie jest konieczne przekształcenie modelu niezbilansowanego w zbilansowany. Moduł Solver umożliwia rozwiązanie wymienionego problemu programowania liniowego [3] modelowanego jako zagadnienie przepływu w sieci transportowej.

2.1. Dwuetapowe otwarte zagadnienie transportowe na przykładzie handlowej sieci dystrybucji

W zamieszczonym poniżej przykładzie, przedsiębiorstwo handlowe zajmujące się dystrybucją artykułów kosmetycznych posiada dwa główne centra dostaw towarów, dwa główne magazyny oraz czterech docelowych klientów. Produkty dostarczane są w europaletach do dwóch magazynów hurtowych, a następnie z magazynów hurtowych do odbiorców. Węzły o numerach 1 i 2 reprezentują centra dostaw towarów (tzw. węzły dostawców). Węzły 3 i 4 prezentują magazyny hurtowe (tzw. węzły pośrednie). Natomiast węzły 5, 6, 7 i 8 reprezentują klientów (tzw. węzły odbiorców). Oferowane przez każde centrum dystrybucji ilości produktów wynoszą odpowiednio s_1 i s_2 , natomiast zapotrzebowanie zgłaszane przez każdego klienta odpowiednio d_5 , d_6 , d_7 i d_8 europalet na rok. Jednostkowe koszty transportu pomiędzy danymi ogniwami sieci dostaw zapisanych przy krawędziach/lukach grafu. Szukane wartości przepływów towaru po danych łukach oznaczono zmiennymi decyzyjnymi x_{ij} . W zadaniu optymalizacyjnym należy zminimalizować koszt transportu towarów w ciągu roku w taki sposób, aby zostały zaspokojone potrzeby klientów. Model sieci dystrybucji został przedstawiony na rysunku 2.



Rys. 2. Graficzna prezentacja sieci dystrybucji

2.2. Model matematyczny i rozwiązanie w arkuszu kalkulacyjnym

Analizując zadanie, należy zwrócić uwagę na zbilansowanie problemu, koszt całkowity przepływu, ilość transportową dla każdego łuku, ilość towarów wpływających do węzła oraz ilość towarów wpływających z węzła. Łączna oferta dostawców wynosi $20\ 000 + 30\ 000 = 50\ 000$, natomiast łączne zapotrzebowanie klientów wynosi $13\ 500 + 2\ 000 + 5\ 500 + 25\ 000 = 46\ 000$, co pokazuje, że problem nie jest zbilansowany (tzw. otwarte zagadnienie transportowe). Aby pominąć opcję wprowadzenia fikcyjnego odbiorcy w celu sformułowania modelu programowania liniowego, należy przyjąć określoną konwencję bilansów przepływu w sieci na podstawie tabel 1 lub 2.

Tab. 1. Zasady równoważenia przepływów – niejednakowa konwencja bilansów w węzłach [3].

Relacja pomiędzy łączną podażą a łącznym popytem	Warunki zapewnienia przepływu w sieci	
	Każdy węzeł dostawcy	Każdy węzeł odbiorcy
łączna podaż = łączny popyt	wpływ – wypływ = podaż	wpływ – wypływ = popyt
łączna podaż > łączny popyt	wpływ – wypływ <= podaż	wpływ – wypływ >= popyt
łączna podaż < łączny popyt	wpływ – wypływ >= podaż	wpływ – wypływ <= popyt

Tab. 2. Zasady równoważenia przepływów – jednakowa konwencja bilansów w węzłach [3].

Relacja pomiędzy łączną podażą a łącznym popytem	Warunki zapewnienia przepływu w sieci	
	Każdy węzeł dostawcy	Każdy węzeł odbiorcy
łączna podaż = łączny popyt	wpływ – wypływ = podaż	wpływ – wypływ = popyt
łączna podaż > łączny popyt	wpływ – wypływ >= - podaż	wpływ – wypływ >= popyt
łączna podaż < łączny popyt	wpływ – wypływ <= - podaż	wpływ – wypływ <= popyt

Na podstawie analizy rysunku 2 i tabeli 2 przyjmujemy konwencję „wpływ – wypływ >= -podaż” i formułujemy warunki ograniczające. Dla węzła 1 uwzględnione są tylko dwa wpływy, x_{13} i x_{14} , na ich podstawie formułujemy warunek ograniczający w postaci $-x_{13} - x_{14} \geq -20\ 000$. Po pomnożeniu przez -1 otrzymujemy $x_{13} + x_{14} \leq 20\ 000$ co pokazuje nam, że w związku z niezbilansowaniem problemu tj. łączna podaż > łączny popyt, z węzła może być dostarczonych mniej produktów, ale nie więcej niż jego podaż. Podobna zależność występuje w węźle 2.

Dla węzłów 3 i 4 suma odpowiednich wpływów i wypływów wynosi zero. Dla węzłów 5, 6, 7 i 8 z przyjętej na podstawie tabeli 2 konwencji „wpływ – wypływ >= popyt” - wobec braku wpływów -

wynika wyłącznie suma wpływów. Powinna ona być większa od danych wartości popytu w konkretnym węźle bądź im równa. Pomiędzy zastosowania operatora „>=” ze względu na kryterium minimalizacji Solver’a, nie jest możliwe dopuszczenie większego wpływu, niż wynika to z wartości popytu. Podsumowując, można wywnioskować, iż prowadzi to do poniżej wymienionych bilansów przepływu w węzłach, które stanowią warunki ograniczające problemu.

- Węzeł 1: $-X_{13}-X_{14} \geq -20000$,
- Węzeł 2: $-X_{23}-X_{24} \geq -30000$,
- Węzeł 3: $X_{13}+X_{23}-X_{35}-X_{36}-X_{37}-X_{38} \geq 0$,
- Węzeł 4: $X_{14}+X_{24}-X_{45}-X_{46}-X_{47}-X_{48} \geq 0$,
- Węzeł 5: $X_{35}+X_{45} \geq 13500$,
- Węzeł 6: $X_{36}+X_{46} \geq 2000$,
- Węzeł 7: $X_{37}+X_{47} \geq 5500$,
- Węzeł 8: $X_{38}+X_{48} \geq 25000$,

Ponieważ w sieci dostaw nie ma zwrotów, zmienne decyzyjne są nieujemne $X_{ij} \geq 0$.

Po uwzględnieniu kosztów jednostkowych transportu, jak to zaprezentowano na rysunku 2, formuluje się funkcję celu, która jest sumą iloczynów podanych kosztów jednostkowych oraz nieznanymi wartościami przepływów po łukach, stanowiących zmienne decyzyjne X_{ij} .

$$f(x_{ij}) = 190x_{13} + 235x_{14} + 225x_{23} + 130x_{24} + 90x_{35} + 140x_{36} + 110x_{37} + 140x_{38} + 125x_{45} + 100x_{46} + 80x_{47} + 75x_{48} \rightarrow \min.$$

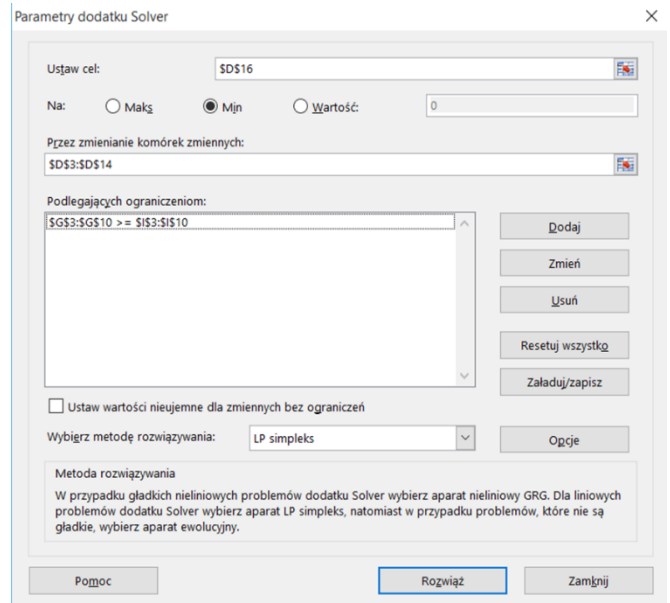
Organizację poszczególnych komórek arkusza kalkulacyjnego Excel z zadanym modelem matematycznym i rozwiązaniem optymalnym powyższego zadania handlowej sieci dystrybucji przedstawiono na rysunku 3. Wykaz formuł użytych w arkuszu kalkulacyjnym przedstawiono w tabeli 3. Polecenia, które zostały wpisane do okna dialogowego Solver pokazano na rysunku 4.

Tab. 3. Wykaz formuł użytych w arkuszu kalkulacyjnym.

Komórka	Formuła	Skopiowana do
G3	=SUMA.JEŻELI(\$B\$3:\$B\$14;F3;\$D\$3:\$D\$14)-SUMA.JEŻELI(\$A\$3:\$A\$14;F3;\$D\$3:\$D\$14)	G4:G11
D16	=SUMA.ILOCZYNÓW(C3:C14;D3:D14)	

Łuk	Z	Do	Koszt jednostkowy zł/ europaletę	Przepływ europalet/rok	Węzeł	Wpływ	Wyływ	Podaż, popyt
1 3	1	3	190	16 000	1	-16 000	>=	-20 000
1 4	1	4	235	0	2	-30 000	>=	-30 000
2 3	2	3	225	0	3	0	>=	0
2 4	2	4	130	30 000	4	0	>=	0
3 5	3	5	90	13 500	5	13 500	>=	13 500
3 6	3	6	140	0	6	2 000	>=	2 000
3 7	3	7	110	2 500	7	5 500	>=	5 500
3 8	3	8	140	0	8	25 000	>=	25 000
4 5	4	5	125	0				
4 6	4	6	100	2 000				
4 7	4	7	80	3 000				
4 8	4	8	75	25 000				
Koszt całkowity zł/rok				10 745 000				
f(x) → min								

Rys. 3. Model arkusza z rozwiązaniem zadania handlowej sieci dystrybucji.



Rys. 4. Okno dialogowe Solver dla zadania handlowej sieci dystrybucji

Rozwiązanie optymalne wynosi 10 745 000 zł/rok. Jest to minimalny całkowity koszt przepływu towarów. Wszystkie warunki ograniczające zostały spełnione. Całkowity minimalny koszt transportu będzie osiągnięty, gdy przepływ nastąpi na łukach: (4, 8), (4, 7), (4, 6), (3, 7), (3,5), (2, 4) i (1, 3). Oznacza to, że z węzła dostaw 1, czyli centrum dostaw 1, dostawy towarów powinny być dostarczane do węzła nr 3, czyli magazynu hurtowego, w liczbie 16 000 europalet/rok. Oznacza to, że w centrum dostaw węzła 1 pozostanie 4 000 (20000 – 16000 = 4000) niewykorzystanej oferty. Natomiast z centrum dostaw węzła 2, dostarczanie produktów powinno następować do magazynu hurtowego węzła 4 w liczbie 30 000 europalet/rok. Z magazynu hurtowego węzła 3 dostawy powinny być realizowane do dwóch klientów, odpowiednio do klienta reprezentowanego przez węzeł 5 w liczbie 13 500 europalet/rok oraz do klienta reprezentowanego przez węzeł 7 w liczbie 2 500 europalet/rok. Natomiast z magazynu hurtowego węzła 4 dostawy powinny być realizowane do trzech klientów, reprezentowanych odpowiednio przez węzeł 6, w liczbie 2 000 europalet/rok, węzeł 7 w liczbie 3 000 europalet/rok oraz węzeł 8 w liczbie 25 000 europalet/rok.

3. PROBLEM OPTYMALNEJ DROGI

3.1. Wybór najkrótszej trasy

W poniższym praktycznym przykładzie przedsiębiorca z Rybnika ma dostarczyć przesyłkę do Buska-Zdroju. Postanowił na podstawie obliczeń wybrać możliwie najkrótszą trasę. W tym celu ustalił odległości i czasy przejazdu między poszczególnymi miejscowościami brany pod uwagę. Zebrał wszystkie dane, przedstawił je w postaci sieci, którą uwidoczniono na rysunku 6. Problem modelowany jest jak przepływ w sieci transportowej. Na przywołanym rysunku węzeł pochodzenia 1 (Rybnik) ma dostawę w ilości -1, węzeł przeznaczenia 12 (Busko-Zdrój) ma odbiór w ilości 1, natomiast wszystkie pośrednie węzły mają odbiór i dostawę równą 0 [3].

3.2. Model matematyczny oraz opis i rozwiązanie w arkuszu kalkulacyjnym

Pojedynczą zmienną decyzyjną jest przepływ x_{ij} z węzła i do węzła j . W zadaniu każda pojedyncza zmienna decyzyjna przypada dla jednego łuku w modelu sieci. Sieć, która została przedstawiona

na rysunku 6 zawiera 15 węzłów, dlatego należy zdefiniować 15 zmiennych decyzyjnych.

Przepływ rozpoczyna się w węźle pochodzenia, czyli w węźle 1 (Rybnik), a kończy w węźle przeznaczenia, czyli w węźle 12 (Busko-Zdrój). Przepływ następuje poprzez nieznanne węzły pośrednie. Wypływ z węzła 1 (Rybnik) o wartości -1 następuje do węzła 2 (Katowice) lub węzła 8 (Wieliczka), co daje równanie $-1 = -x_{12} - x_{18}$. Analogicznie przepływ o wartości $x_{ij} = 1$ przedstawia przepływ paczki z miejscowości i do miejscowości j , natomiast przepływ $x_{ij} = 0$ informuje o tym, że paczka nie jest przesyłana pomiędzy tymi miejscowościami.

W przypadku węzłów pośrednich musi zachodzić równość między wpływem do danego węzła, a wypływem z tego węzła, co odzwierciedla prawa przepływu. Oznacza to, że bilans przepływu w tych węzłach jest równy zeru. Wpływ do węzła 3 (Sosnowiec) jest jeden - z węzła 2 (Katowice) - i wynosi x_{23} . Wpływ ten musi być równy dwóm wypływom z węzła 3 (Katowice): x_{34} i x_{35} , odpowiednio do węzłów 4 (Dąbrowa Górnicza) i 5 (Olkusz), czyli $x_{23} = x_{34} + x_{35}$, lub $x_{23} - x_{34} - x_{35} = 0$. Analitycznie podobnie jest w pozostałych węzłach pośrednich.

Opisując wszystkie węzły, można zestawić warunki ograniczające przepływu:

- Węzeł 1: $-x_{12} - x_{18} = -1$,
- Węzeł 2: $x_{12} - x_{23} = 0$,
- Węzeł 3: $x_{23} - x_{34} - x_{35} = 0$,
- Węzeł 4: $x_{34} - x_{46} = 0$,
- Węzeł 5: $x_{35} - x_{57} = 0$,
- Węzeł 6: $x_{46} - x_{6,10} - x_{67} = 0$,
- Węzeł 7: $x_{67} + x_{57} - x_{7,10} - x_{79} = 0$,
- Węzeł 8: $x_{18} - x_{8,11} = 0$,
- Węzeł 9: $x_{79} - x_{9,12} = 0$,
- Węzeł 10: $x_{6,10} + x_{7,10} - x_{10,12} = 0$,
- Węzeł 11: $x_{8,11} - x_{11,12} = 0$,
- Węzeł 12: $x_{9,12} + x_{10,12} + x_{11,12} = 1$,

$x_{ij} \geq 0$ dla wszystkich zmiennych decyzyjnych.

Warunki ograniczające od 1 do 12 opisują bilans przepływu dla wszystkich dwunastu węzłów analizowanej sieci. Warunki wyrażone wzorem $x_{ij} \geq 0$ to warunki nieujemności.

Analogicznie można stwierdzić, iż w zadaniu całkowita dostawa odpowiada całkowitemu zaopatrzeniu. Wynika stąd, że warunki ograniczające powinny być równościami. W pierwszym równaniu 1 ilość wysyłana z węzła 1 (Rybnik) jest jednością, podobnie jak w ostatnim równaniu 12, zgodnie z którym ilość dostarczona do węzła 12 (Busko-Zdrój) również jest jednością. Równania pośrednie przedstawiają, że przesyłana do każdej miejscowości ilość jest równa ilości z niej wysyłanej. Ta zależność odpowiada przepływowi 1 jednostki dostarczanej do węzła pochodzenia oraz odebranej w węźle przeznaczenia. Wynika stąd, że przez pozostałe węzły pośrednie paczka ta przepływa.

Przepływ, który opisuje wartość $x_{ij} = 1$, można interpretować w taki sposób, że paczka jest przesyłana z miejscowości i do miejscowości j , natomiast wartość $x_{ij} = 0$ informuje o tym, że paczka nie jest przesyłana między danymi miejscowościami.

Przed rozwiązaniem zadania, nieznanne są łuki przez które będzie następował przepływ w sieci, natomiast znane są długości łuków c_{ij} . Dlatego jeśli nastąpi przepływ przez dany łuk, to iloczyn długości łuku oraz wartość przepływu $c_{ij} \cdot x_{ij}$, stanowić będzie długość tego łuku ponieważ $x_{ij} = 1$. Jeżeli jednak przez dany łuk nie będzie przebiegał żaden przepływ, to iloczyn $c_{ij} \cdot x_{ij}$ będzie miał

wartość równą zero, ponieważ $x_{ij} = 0$. Sumując wszystkie iloczyny dostaniemy sumę długości drogi przepływu paczki na całej trasie. Ze względu na cel analizowanego modelu przepływu należy wprowadzić funkcję celu, wyrażającą długość trasy w kryterium optymalizacji. Funkcję celu, która oblicza trasę najkrótszej długości, należy sformułować następująco:

$$f(x_{ij}) = C_{12}x_{12} + C_{18}x_{18} + C_{23}x_{23} + C_{34}x_{34} + C_{35}x_{35} + C_{46}x_{46} + C_{57}x_{57} + C_{67}x_{67} + C_{6,10}x_{6,10} + C_{79}x_{79} + C_{7,10}x_{7,10} + C_{8,11}x_{8,11} + C_{9,12}x_{9,12} + C_{10,12}x_{10,12} + C_{11,12}x_{11,12} \rightarrow \min.$$

Funkcja ma postać iloczynów długości łuków oraz przepływów na tych łukach.

Organizację poszczególnych komórek arkusza kalkulacyjnego z rozwiązaniem problemu najkrótszej trasy Rybnik - Busko-Zdrój przedstawiono na rysunku 5. Wykaz poszczególnych formuł użytych w arkuszu kalkulacyjnym przedstawiono w tabeli 3, natomiast wpisy parametrów do okna dialogowego Solver - na rysunku 6.

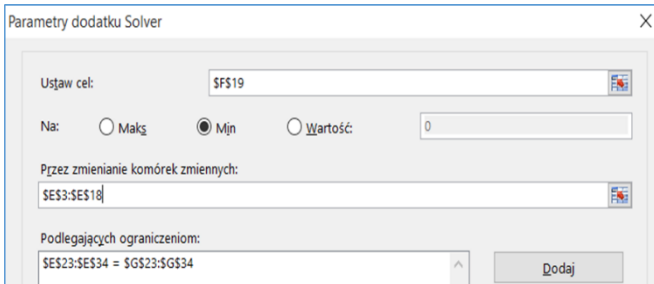
A		B		C		D		E		F		G	
Najkrótsza trasa Rybnik - Busko-Zdrój													
Z	Do			Xij- wybrana droga	Odległość [km]	Czas jazdy [min]							
1 Rybnik	2 Katowice			1	52	42							
1 Rybnik	8 Wieliczka			0	142	90							
2 Katowice	3 Sosnowiec			1	7	7							
3 Sosnowiec	4 Dąbrowa górnicza			0	16	16							
3 Sosnowiec	5 Olkusz			1	37	37							
4 Dąbrowa górnicza	6 Zawiercie			0	29	31							
5 Olkusz	7 Miechów			1	39	38							
5 Olkusz	8 Wieliczka			0	65	56							
6 Zawiercie	10 Pińczów			0	90	89							
6 Zawiercie	7 Miechów			0	53	56							
7 Miechów	10 Pińczów			1	52	45							
7 Miechów	9 Wiślica			0	51	47							
8 Wieliczka	11 Dąbrowa Tarnowska			0	97	62							
9 Wiślica	12 Busko- Zdrój			0	16	17							
10 Pińczów	12 Busko- Zdrój			1	15	18							
11 Dąbrowa Tarnowska	12 Busko- Zdrój			0	52	47							
				f(xij) → min	202	187							
				długość [km]		czas [min]							
				Węzły	Przepływ netto	Dostawa/Odbiór							
				1 Rybnik	-1	-1							
				2 Katowice	0	0							
				3 Sosnowiec	0	0							
				4 Dąbrowa górnicza	0	0							
				5 Olkusz	0	0							
				6 Zawiercie	0	0							
				7 Miechów	0	0							
				8 Wieliczka	0	0							
				9 Wiślica	0	0							
				10 Pińczów	0	0							
				11 Dąbrowa Tarnowska	0	0							
				12 Busko- Zdrój	1	1							

Rys. 5. Rozwiązanie optymalne problemu najkrótszej trasy przedstawiające trasę o najkrótszej długości.

Przedstawione na rysunku 5 parametry to: czasy przejazdu pomiędzy węzłami, odległości pomiędzy węzłami oraz numery węzłów i ich nazwy. Zadane parametry wprowadzono odpowiednio do komórek F3:G18 i A3:D18. Komórki E3:E18 przeznaczono na zmienne decyzyjne. Strony lewe warunków ograniczających, które obliczają wartości przepływów netto dla każdego węzła, wpisano w zawartość komórek E23:E34. Natomiast prawe strony, które określają przepływ wymagany dla każdego węzła, wprowadzono do komórek G23:G34. Do komórki E29 wprowadzono formułę przedstawioną w tabeli 3, a następnie skopiowano do komórek z zakresu E24:E34.

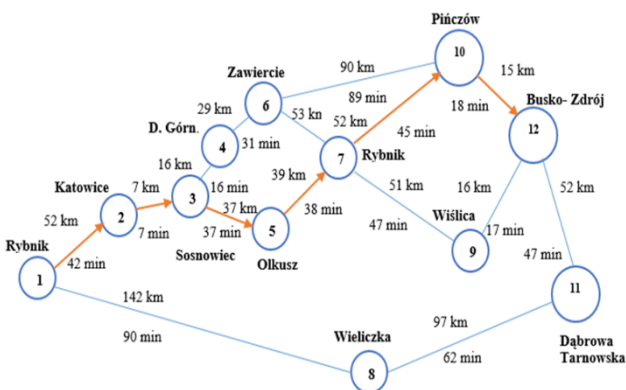
Tab. 3. Wykaz formuł dla modelu najkrótszej trasy Rybnik- Busko-Zdrój [3].

Komórka	Formuła	Skopiowana do
B3	=WYSZUKAJ(A3:\$C\$23:\$D\$34)	B4:B18
F19	=SUMA.ILOCZYNÓW(\$E\$3:\$E\$18;F3:F18)	
G19	=SUMA.ILOCZYNÓW(E3:E18;G3:G18)	
E22	=SUMA.JEŻELI(\$C\$3:\$C\$18;C23;\$E\$3:\$E\$18)-SUMA.JEŻELI(\$A\$3:\$A\$18;C23;\$E\$3:\$E\$18)	E23:E34



Rys. 6. Okno dialogowe Solver dla zadania najkrótszej trasy

Formułę funkcji celu $F(x_{ij})$, która oblicza długość trasy przepływu między Rybnikiem, a Buskiem-Zdrój, wpisano do komórki F19. Formułę obliczającą czas przejazdu między Rybnikiem a Buskiem-Zdrój, wpisano do komórki G19. Na rysunku 5 przedstawiono arkusz z zawartym rozwiązaniem optymalnym dla minimalizowanej komórki celu F19 ($f(x_{ij}) \rightarrow \min$), obliczającej minimalną długość trasy przejazdu.



Rys. 7. Sieć problemu najkrótszej trasy

Uzyskane wartości optymalnego rozwiązania wskazują, że najkrótsza trasa przejazdu z Rybnika do Buska-Zdrój przepływa przez łuki z następującymi węzłami: 1 (Rybnik) - 2 (Katowice) - 3 (Sosnowiec) - 5 (Olkusz) - 7 (Rybnik) - 10 (Pińczów) - 12 (Busko-Zdrój) i ma długość 202 km z czasem przejazdu 187 min.

4. ANALIZA SIECIOWA PRZEDCIĘWZIĘĆ LOGISTYCZNYCH

4.1. Przykład modelowania i analizy sieciowej w metodzie CPM

Poniżej przedstawiono przykład programowania sieciowego w metodach CPM (*ang. Critical Path Method*) i PERT (*ang. Program Evaluation and Review Technique*).

W przykładowym przedsiębiorstwie produkcyjnym niemal 50% kosztów produkcji stanowią koszty związane z zakupem części produkowanych przez zewnętrznych dostawców. Zarząd firmy postanowił, że chce:

- wyszukać, przeanalizować oferty i wybrać dostawców części,

- opracować kryteria oraz system odpowiedzialny za ocenę dostawców,
- wdrożyć system komputerowy, odpowiedzialny za porównanie ofert dostawców oraz bieżącą ocenę wybranych dostawców.

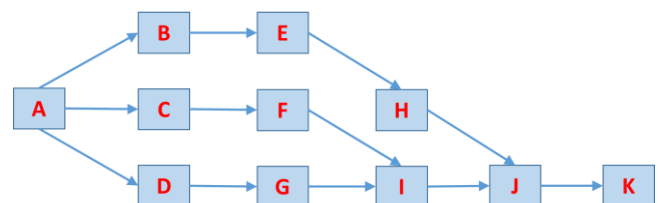
Menadżer odpowiedzialny za realizację projektu wyznaczył czynności niezbędne do realizacji projektu oraz poszczególne czasy potrzebne dla ich wykonania. W tabeli 4 zostały przedstawione informacje wraz z kolejnością relacji występujących między czynnościami.

Tab. 4. Czynności projektu wyboru dostawców.

Czynność	Opis czynności	Czas wymagany [dni]	Czynność bezpośrednio poprzedzająca
A	Skompletowanie zespołu projektowego	12	
B	Określenie wymagań wobec programu komputerowego	25	A
C	Wyszukanie dostawców	40	A
D	Opracowanie kryteriów oceny dostawców	20	A
E	Analiza i napisanie programu komputerowego	60	B
F	Analiza sytuacji finansowej dostawców	12	C
G	Opracowanie formularza oceny	20	D
H	Test systemu	15	E
I	Spotkania z dostawcami	50	F,G
J	Zestawienie i porównanie wyników wizyt	30	H,I
K	Wybór dostawców	14	J

Tworzenie sieci projektu

Sieć jest zestawem węzłów połączonych łukami skierowanymi, przyjmuje się, że węzły w danej sieci przedstawiają czynności projektu. Zastosowano projekt sieci zwany Activity-On-Arrow (AOA). Typ powyższej sieci dla analizowanego przykładu został przedstawiony na rysunku 8.



Rys. 8. Reprezentacja sieci projektu typu AON

Przejsięcie w przód

$$EF_i = ES_i + t_i \quad (1)$$

Pierwszym krokiem w metodzie CPM po utworzeniu sieci projektu, jest określenie najwcześniejszego czasu, dla którego i-ta czynność w sieci może się rozpocząć (ES_i) oraz zakończyć (EF_i). Terminem „czas zero” określa się moment od którego rozpoczyna się pierwsza czynność projektu, stąd czynność $ES(A) = 0$.

Najwcześniejszy czas, w którym konkretna czynność może się zakończyć (EF_i), jest czasem najwcześniejszym, w którym może się ona rozpocząć, plus czas wymagany do wykonania tej czynności. Powyższe można określić za pomocą wzoru dla dowolnej czynności:

Zestawienie wszystkich czynności i ich najwcześniejszych czasów rozpoczęcia (ES) oraz zakończenia (EF) z obliczeń przejścia w przód przedstawiono w tabeli 5.

$$ES_J = \text{MAX}(EF_H, EF_I) = \text{MAX}(112, 114) = 114 \quad (2)$$

Obliczenia najwcześniejszego czasu rozpoczęcia czynności I i J są inne niż reszty, ponieważ czynności te mają więcej niż jedną czynność poprzedzającą. Czynność I nie może się rozpocząć przed zakończeniem czynności F i G. Dlatego po wyliczeniu najwcześniejszych czasów zakończenia czynności F i G najdłuższy z nich przedstawia najwcześniejszy czas, po którym czynność I może zostać rozpoczęta. Analogicznie oblicza się czasy dla czynności J:

Najwcześniejszy czas rozpoczęcia konkretnej czynności jest równy najpóźniejszemu lub maksymalnemu z najwcześniejszych czasów zakończenia bezpośrednio poprzedzających ją czynności.

Tab. 5. Zestawienie obliczeń przejścia w przód

Najwcześniejsze czasy rozpoczęcia	Najwcześniejsze czasy zakończenia
$ES_A = 0$	$EF_A = ES_A + t_A = 0 + 12 = 12$
$ES_B = EF_A = 12$	$EF_B = ES_B + t_B = 12 + 25 = 37$
$ES_C = EF_A = 12$	$EF_C = ES_C + t_C = 12 + 40 = 52$
$ES_D = EF_A = 12$	$EF_D = ES_D + t_D = 12 + 20 = 32$
$ES_E = EF_B = 37$	$EF_E = ES_E + t_E = 37 + 60 = 97$
$ES_F = EF_C = 52$	$EF_F = ES_F + t_F = 52 + 12 = 64$
$ES_G = EF_D = 32$	$EF_G = ES_G + t_G = 32 + 20 = 52$
$ES_H = EF_E = 97$	$EF_H = ES_H + t_H = 97 + 15 = 112$
$ES_I = \max(EF_F, EF_G) = \max(64, 52) = 64$	$EF_I = ES_I + t_I = 64 + 50 = 114$
$ES_J = \max(EF_H, EF_I) = \max(112, 114) = 114$	$EF_J = ES_J + t_J = 114 + 30 = 147$
$ES_K = EF_I = 147$	$EF_K = ES_K + t_K = 147 + 14 = 161$

Przejście w tył

Kolejnym krokiem po zakończeniu „przejścia w przód”, jest wykonanie „przejścia w tył”, którego celem jest określenie najpóźniejszego czasu, podczas którego każda czynność w sieci może się rozpocząć i zakończyć bez jakichkolwiek opóźnień zakończenia realizacji projektu. Proces „przejścia w tył” odpowiada za identyfikację czynności, które muszą się zacząć i zakończyć w najwcześniejszych możliwych czasach, dlatego, aby zakończyć projekt w możliwie jak najwcześniejszym czasie, który został określony w przejściu w przód.

W metodzie przejścia w tył należy rozpocząć od czynności końcowej w analizowanej sieci i wykonać obliczenia, przesuując się w odwrotnym kierunku w sieci. Celem tych obliczeń jest określenie najpóźniejszego czasu, dla którego dana czynność może być zakończona bez opóźnienia projektu. Analizując czynność K można stwierdzić, że jeżeli projekt będzie zakończony w ciągu 161 dni, to analogicznie czas zakończenia czynności K wynosi 161, $LF_K = 161$.

$$LS_i = LF_i - t_i \quad (3)$$

Biorąc pod uwagę wszystkie analizowane czynności w sieci, można stwierdzić, że najpóźniejszy czas, dla którego dana czynność może się rozpocząć nie ingerując w opóźnienie projektu, jest najpóźniejszym czasem dla którego musi ona być zakończona, odejmując czas wymagany do wykonania czynności. Dlatego dla danej czynności i przyjmujemy wzór numer 3:

Natomiast zestawienia i obliczenia przejścia w tył, najpóźniejszych czasów zakończenia (LF) oraz rozpoczęcia (LS) przedstawiono w tabeli 6.

Podsumowując, najwcześniejszy czas zakończenia konkretnej czynności równa się najwcześniejszemu lub minimalnemu z najpóźniejszych czasów rozpoczęcia danej czynności bezpośrednio po niej następujących [3].

Określenie ścieżki krytycznej

Ścieżka w danej sieci czynności jest jedną z tras przejścia węzłów należących do sieci w kolejności oraz kierunku określanych przez łuki, zaczynająca się od węzła początkowego i kończąca na węźle końcowym. Długość ścieżki określana jest na podstawie sumy czasów trwania czynności na danej ścieżce. Wszystkie możliwe ścieżki w badanym projekcie przedstawiono w tabeli 7.

Tab. 6. Zestawienie obliczeń przejścia w tył

Najpóźniejsze czasy zakończenia	Najpóźniejsze czasy rozpoczęcia
$LF_K = EF_K = 161$	$LS_K = LF_K - t_K = 161 - 14 = 147$
$LF_J = LS_K = 147$	$LS_J = LF_J - t_J = 147 - 30 = 114$
$LF_I = LS_J = 114$	$LS_I = LF_I - t_I = 114 - 50 = 64$
$LF_H = LS_I = 114$	$LS_H = LF_H - t_H = 114 - 15 = 99$
$LF_G = LS_I = 64$	$LS_G = LF_G - t_G = 64 - 20 = 44$
$LF_F = LS_I = 64$	$LS_F = LF_F - t_F = 64 - 12 = 52$
$LF_E = LS_H = 99$	$LS_E = LF_E - t_E = 99 - 60 = 39$
$LF_D = LS_G = 44$	$LS_D = LF_D - t_D = 44 - 20 = 24$
$LF_C = LS_F = 52$	$LS_C = LF_C - t_C = 52 - 40 = 12$
$LF_B = LS_E = 39$	$LS_B = LF_B - t_B = 39 - 25 = 14$
$LF_A = \min(LS_B, LS_C, LS_D) = \min(14, 12, 24) = 12$	$LS_A = LF_A - t_A = 12 - 12 = 0$

Tab. 7. Ścieżki i długości ścieżek w sieci czynności projektu

Ścieżka	Długość
A → B → E → H → J → K	12 + 25 + 60 + 15 + 30 + 14 = 156
A → C → F → I → J → K	12 + 40 + 12 + 50 + 30 + 14 = 158
A → D → G → I → J → K	12 + 20 + 20 + 50 + 30 + 14 = 146

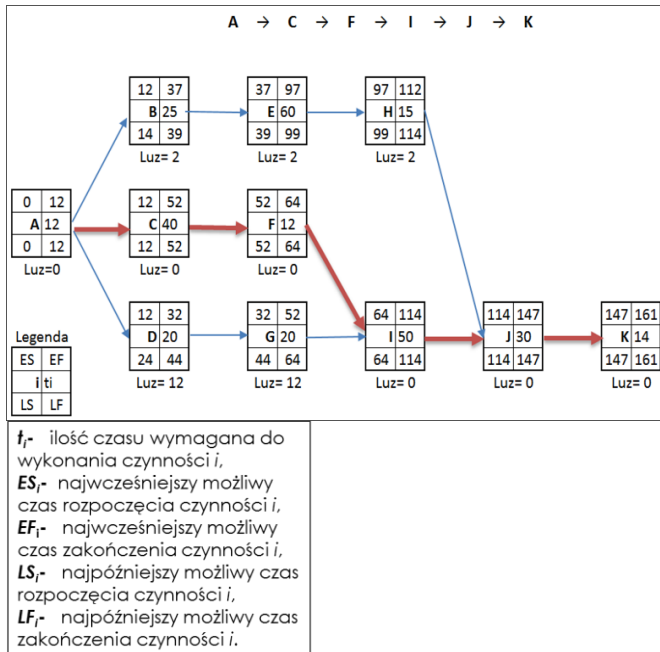
Czas wykonania badanego projektu sieci jest równy długości najdłuższej ścieżki zawartej w nim. Najdłuższa ścieżka nazywana jest ścieżką krytyczną. Ścieżka ta składa się z czynności, w wypadku których jakiegokolwiek opóźnienie będzie wiązało się z opóźnieniem całego projektu. Czynności ścieżki krytycznej należy zidentyfikować na podstawie wyników analiz przejścia w przód i przejścia w tył. Czynności, których najpóźniejszy czas rozpoczęcia jest równy ich najwcześniejszemu czasowi rozpoczęcia, tworzą ścieżkę krytyczną. Takimi czynnościami mogą być też węzły w których najpóźniejszy czas zakończenia jest równy ich najwcześniejszemu czasowi zakończenia.

W analizowanym przykładzie sieci czynności, ścieżka krytyczna została przedstawiona pogrubionymi strzałkami w kolorze czerwonym na rysunku 9.

Jeżeli jakkolwiek czynność na zaznaczonej ścieżce krytycznej nie rozpocznie się w czasie rozpoczęcia (ES_i) danej ścieżki, nastąpi opóźnienie zakończenia projektu.

Czynności niewchodzące w skład ścieżki krytycznej wyróżniają się posiadaniem zapasu czasu zwanego inaczej luzem, czyli czasem, o który rozpoczęcie czynności może się opóźnić bez konsekwencji opóźnienia zakończenia projektu. Czynności należące do ścieżki krytycznej, nie mają zapasu czasu. Zapasy czasu dla danych czynności można obliczyć za pomocą wzorów numer 4:

$$\begin{aligned} \text{Zapas czasu dla czynności } i &= LS_i - ES_i \\ &\text{lub} \\ \text{Zapas czasu dla czynności } i &= LF_i - EF_i \end{aligned} \quad (4)$$



Rys. 9. Ścieżka krytyczna i wartości zapasów czasu dla czynności badanego projektu

4.2. Przykład modelowania analizy PERT

Analiza PERT jest przeprowadzana na tym samym projekcie jak w metodzie CPM. Metoda PERT bierze pod uwagę, że w rzeczywistości czas wykonania każdej z czynności jest zmienną swobodną, która ma pewien rozkład prawdopodobieństwa [3].

Podejście trzech oszacowań czasów

W metodzie PERT należy uzyskać trzy oszacowania czasu dla każdej czynności:

- najbardziej prawdopodobne oszacowanie (m) - jest to oszacowanie najbardziej prawdopodobnej wartości czasu,
 - optymistyczne oszacowanie (o) - jest to oszacowanie czasu dla najbardziej sprzyjających warunków,
 - pesymistyczne oszacowanie (p) - jest to oszacowanie czasu dla najbardziej niesprzyjających warunków,
- dla których musi być spełniona relacja $o \leq m \leq p$.

W analizowanej metodzie PERT oblicza się oczekiwane czasy trwania czynności μ oraz wariancję oczekiwanego czasu trwania czynności σ^2 . Poniżej zaprezentowano wzory odpowiednio dla obliczenia oczekiwanego czasu trwania czynności μ :

$$\mu = \frac{o + 4m + p}{6} \quad (5)$$

oraz dla obliczenia wariancji σ^2 :

$$\sigma^2 = \left(\frac{p - o}{6}\right)^2 \quad (6)$$

W analizowanym problemie wariancja jest miarą rozbieżności pomiędzy dwoma ocenami czasu trwania czynności: pesymistyczną, a optymistyczną. Dla wariancji bliższej zero prawdopodobieństwo, że czynność w projekcie zostanie zrealizowana, będzie większa. Wyniki odpowiednich czasów oraz obliczenia wariancji dla danych czynności projektu zostały przedstawione w tabeli 8.

Tab. 8. Oszacowania czasów trwania (o, m, p), wartości oczekiwane czasów μ i wariancja czasu trwania czynności projektu

Czynność	o - optymistyczne	m - najbardziej prawdopodobne	p - pesymistyczne	Średnia $\mu =$ $\frac{o + 4m + p}{6}$	Wariancja $\sigma^2 = \left(\frac{p - o}{6}\right)^2$
A	10	12	13	11,83	0,2500
B	22	25	29	25,17	1,3611
C	37	40	44	40,17	1,3611
D	18	20	21	19,83	0,2500
E	56	60	63	59,83	1,3611
F	11	12	15	12,33	0,4444
G	18	20	22	20,00	0,4444
H	13	15	17	15,00	0,4444
I	47	50	51	49,67	0,4444
J	28	30	33	30,17	0,6944
K	12	14	16	14,00	0,4444

Ścieżka krytyczna

W metodzie PERT zakłada się, że czasy wymagane do wykonania czynności zawarte wzdłuż ścieżki są zmiennymi swobodnymi, wynika stąd, że wymagany czas do przejścia badanej ścieżki jest również zmienną swobodną z daną średnią i wariancją. Oczekiwany czas lub średnia, które są wymagane do ukończenia danej ścieżki są sumą czasów oczekiwanych czynności na ścieżce. Przyjmując, że czasy pojedynczych czynności są niezależne od siebie, można obliczyć czasy zakończenia dla dowolnej ścieżki, sumując wariancje czynności na ścieżce. Aby projekt został pomyślnie ukończony, wszystkie ścieżki muszą zostać zakończone. W metodzie PERT przyjmuje się, że ścieżka z największą wartością oczekiwanego czasu do ukończenia jest ścieżką krytyczną.

W analizie można przyjąć trzy upraszczające założenia:

- ścieżka krytyczna jest najdłuższą ścieżką w projekcie,
- czasy wykonania czynności zawierające się na ścieżce krytycznej są statystycznie niezależne od siebie,
- rozkład prawdopodobieństwa czasów do wykonania projektu jest rozkładem normalnym.

Przyjmując powyższe założenia czas oczekiwany wykonania projektu jest określany jako:

μ_p = suma czasów oczekiwanych wykonania czynności na ścieżce krytycznej.

Wariancja czasu oczekiwanego wykonania projektu jest określany jako:

σ_p^2 = suma wariancji czasów wykonania czynności na ścieżce krytycznej.

Obliczenia oczekiwanego czasu zakończenia realizacji badanego projektu oraz jego wariancji i odchylenia standardowego zaprezentowano w tabeli 9.

Tab. 9. Obliczenia μ_p i σ_p^2 dla badanego projektu

Czynności na ścieżce krytycznej	Średnia	Wariancja
A	11,83	0,2500
C	40,17	1,3611
F	12,33	0,4444
I	49,67	0,4444
J	30,17	0,6944
K	14,00	0,4444
Oczekiwany czas realizacji projektu i jego wariancja	158,17	3,6389
Odchylenie standardowe		1,8194

Realny termin wykonania założeń całego projektu, w którym oczekiwany czas realizacji wynosi $\mu_p = 158,17$ dnia dla wariancji $\sigma_p^2 = 3,6389$, może się różnić o wartość odchylenia standardowego $\sigma_p = \sqrt{3,6389} = 1,8194$ dnia.

Prawdopodobieństwo wykonania projektu w wyznaczonym czasie

Oczekiwany czas zakończenia projektu μ_p oraz wariancja ścieżki krytycznej σ_p^2 służą do oszacowania prawdopodobieństwa wykonania projektu w zadany czas, tzw. terminie dyrektywnym. Aby określić powyższe prawdopodobieństwo należy obliczyć zmienną standaryzowaną x :

$$x = \frac{d - \mu_p}{\sigma_p} \quad (7)$$

gdzie:

d - termin dyrektywny zakończenia projektu,

μ_p - oczekiwany czas wykonania projektu,

σ_p - odchylenie standardowe oczekiwanego czasu wykonania projektu.

Dla obliczonej wartości x można odczytać prawdopodobieństwo dotrzymania terminu dyrektywnego, czyli prawdopodobieństwo, że czas wykonania badanego projektu T będzie nie większy niż d :

$$P\{T \leq d\} = F(x) \quad (8)$$

gdzie: $F(x)$ jest dystrybuanta zmiennej x .

Prawdopodobieństwo zakończenia projektu w czasie np. 160 dni wynosi:

$$P\{T \leq 160\} = F\left(\frac{160 - 158,17}{1,8194}\right) = F(1,0058) \quad (9)$$

$$P\{T \leq 160\} \approx 0,5$$

Jeżeli prawdopodobieństwo dotrzymania terminu dyrektywnego mieści się w przedziale (0,25,0,6), to wg teorii metody PERT dotrzymanie terminu jest realne.

PODSUMOWANIE

Celem przedsiębiorstw współpracujących w sieci dostaw jest minimalizacja kosztów wytwarzania i przepływu produktów w sieci. Firmy, które odpowiednio zbilansują dostawy, mogą w dużym stopniu zmniejszyć koszty transportu, które stanowią dużą część kosztów całkowitych. Minimalizacja kosztów transportu jest celem rozwiązania zagadnienia transportowego. W sieciach dostaw mamy do czynienia zwykle z wieloetapowym zagadnieniem transportowym.

Ustalenie najkrótszej drogi w sieci dostaw oparte jest na minimalizacji całkowitej drogi przepływu między punktem początkowym, a punktem docelowym, poprzez punkty pośrednie. Dzięki odpowiedniemu zaplanowaniu trasy przepływu, firmy mogą zmniejszyć

czas dostaw jak i koszty związane z paliwem oraz czasem pracy kierowców.

Pomocnym narzędziem w rozwiązaniu w/w problemów może być arkusz kalkulacyjny Excel z modułem Solver, w którym oba zagadnienia mogą być modelowane jak przepływ w sieci transportowej i rozwiązywane jako problem programowania liniowego z wykorzystaniem metody sympleksu.

Zamieszczone w pracy przykłady, uwidaczniają jak istotne w praktyce inżynierskiej problemy logistyczne mogą być w prosty sposób rozwiązywane z wykorzystaniem powszechnie dostępnego pakietu informatycznego MS Office.

W pracy pokazano również jak pomocne mogą być metody programowania sieciowego w planowaniu projektów i analizie czasowej sieci dostaw.

Przedstawiony przykład analizy CPM, służy do określenia czasu trwania i zakończenia projektu w sieci przedsięwzięć oraz wyznaczenia ścieżki krytycznej. Metodę CPM stosujemy wtedy gdy, znane są czasy przebiegu oraz zależności między poszczególnymi czynnościami. Ścieżka krytyczna pozwala na wykrycie łańcucha czynności, które w skutek jakichkolwiek opóźnień spowodują opóźnienie całego projektu. W konsekwencji firmy zwracają szczególną uwagę na te czynności i starają się zorganizować takie działania, aby te opóźnienia nie nastąpiły.

Analiza PERT podobnie jak analiza CPM stosowana jest w zarządzaniu dużymi projektami logistycznymi. Istotą metody PERT jest również wyznaczenie ścieżki krytycznej. Różnice między obiema metodami polegają na tym, że w metodzie PERT czas trwania poszczególnych zadań jest traktowany jako zmienna losowa czyli oprócz najbardziej prawdopodobnych czasów trwania poszczególnych czynności, bierzemy pod uwagę czasy optymistyczne zakończenia zadania oraz czasy pesymistyczne zakończenia zadania. Analiza PERT pozwala na oszacowanie prawdopodobieństwa wykonania poszczególnych zadań jak i całego projektu w zadany terminie tzw. terminie dyrektywnym.

Metody CPM i PERT poprzez możliwość zarządzania dużymi i złożonymi projektami, graficzną prezentację i możliwość oszacowania ryzyka czasowego ukończenia projektu są cennym narzędziem w logistyce sieci i łańcuchów dostaw.

BIBLIOGRAFIA

1. Grzybowska K.: Podstawy logistyki, Difin, Warszawa 2009
2. Michael H.: Zarządzanie łańcuchem dostaw. Podstawy. Wydanie II, HELION, Gliwice 2011
3. Węgrzyn J.: Analiza i optymalizacja sieci przepływu i czynności, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2013.

Autorzy:

dr inż. Piotr Kisielewski – Politechnika Krakowska.

inż. Kamil Wijas – Polonia Logistyka Sp. z o.o.