

Prof. dr hab. inż. Leszek MIESZKALSKI
Katedra Organizacji i Inżynierii Produkcji
Wydział Inżynierii Produkcji
SGGW w Warszawie

MATEMATYCZNY MODEL CECH GEOMETRYCZNYCH WYBRANYCH ODMIAN OWOCÓW ŚLIWY (*Prunus domestica L.*)[®]

Mathematical model of geometric features of selected varieties
of fruit plum (*Prunus domestica L.*)[®]

Słowa kluczowe: śliwka, odmiany: Amers, Bluefre, Węgierka Zwykła, kształt, powierzchnia zewnętrzna, równania parametryczne, model matematyczny.

W artykule przedstawiono metodę matematycznego modelowania kształtu powierzchni zewnętrznych śliwek odmian Amers, Bluefre, Węgierka Zwykła. Do modelowania kształtu, z prób po 100 owoców każdej odmiany, wybrano po trzy śliwki różniące się wymiarami i kształtem. Kształt powierzchni śliwki odwzorowano wykorzystując równania parametryczne. Proponowany matematyczny model 3D kształtu śliwek można wykorzystać w projektowaniu, modelowaniu i sterowaniu operacjami technologicznymi procesów produkcji i przetwarzania.

Key words: plum, varieties: Amers, Bluefre, Węgierka Zwykła, shape, the outer surface, parametric equations, mathematical model.

A method of mathematical modeling of the shape of the outer surface of the varieties of plums Amers, Bluefre, Węgierka Zwykła. To the modeling of the shape of samples with 100 fruit from each variety were selected after three plums different dimensions and shape. The shape of the surface of plums mapped using parametric equations. The proposed mathematical model of the 3D shape of plums can be used in the design, modeling and control of technological operations production and processing.

WSTĘP

Śliwa (*Prunus domestica L.*) reprezentowana przez dużą liczbę odmian jest gatunkiem znanym na całym świecie. Chiny, Stany Zjednoczone Ameryki, Francja, Włochy, Rumunia, Serbia, Turcja, Indie, Chile i Iran, to kraje, w których, według FAO Statistical Yearbook [1] i Rashidi, i in., [15] jest uprawianych najwięcej śliw. Śliwki, jako owoce pestkowe, stanowią cenny surowiec w przetwórstwie spożywczym i są wykorzystywane w polskiej kuchni. Minh [9] twierdzi, że dżem z śliwek wykazuje dla ludzi wiele właściwości zdrowotnych. Największe znaczenie w przetwórstwie spożywczym w Polsce mają śliwki z grupy odmianowej węgierki [17]. Śliwki



Rys. 1. Wybrane kształty śliwek odmian Amers, Bluefre, Węgierka Zwykła.

Fig. 1. Selected shapes varieties of plums Amers, Bluefre, Węgierka Zwykła.

Źródło: Opracowanie własne

Source: Own study

są owocem różnorodnym pod względem wielkości, koloru i kształtu (rys. 1).

Właściwości geometryczne śliwek, a szczególnie ich wielkość i kształt ma duże znaczenie w projektowaniu systemów automatycznego sortowania i pakowania oraz przenośników stosowanych na liniach produkcyjnych w zakładach przetwarzających owoce [10, 12, 13, 14, 16]. Rashidi, i in., [15] analizując wielkości śliwek w celu ich klasyfikacji wymiarowej posłużyli się modelem elipsoidy dokonując pomiaru długości, średnicy maksymalnej i średnicy minimalnej. Przy opisie odmian kształt owoców śliw jest określany, np.: kuliste, kulisto eliptycznie niesymetryczne, elipsoidalne, jajowate, po bokach spłaszczone, owalne, szeroko owalne, lekko owalne, owalne lekko spłaszczone, owalne wydłużone niesymetryczne, wydłużone, lekko wydłużone, wyraźnie wydłużone, butelkowate [4, 11, 17]. Obecnie do celów projektowych nie wystarcza określenie kształtu owocu śliwy w sposób umowny. Grafika komputerowa daje projektantom użyteczne narzędzia opisu kształtu brył [2, 3, 5, 6, 7]. Mieszkalski [5, 7] do opisu kształtu surowców pochodzenia roślinnego zastosował parametryczne krzywe przestrzenne oraz krzywe Béziera. Problemem do rozwiązania jest opracowanie metody, za której pomocą byłby możliwy opis 3D kształtu powierzchni zewnętrznej śliwek.

Celem artykułu jest przedstawienie opracowanego z dokładnością do 5% matematycznego modelu kształtu śliwek odmian Amers, Bluefre i Węgierka Zwykła.

Adres do korespondencji – Corresponding author: Leszek Mieszkalski, SGGW w Warszawie, Wydział Inżynierii Produkcji, Katedra Organizacji i Inżynierii Produkcji, ul. Nowoursynowska 164, 02-787 Warszawa, e-mail: mieszko@poczta.fm

MATERIAŁ I METODYKA BADAŃ

Materiałem do badań były śliwki odmian Amers, Bluefre i Węgierka Zwykła, pochodzące z sadów z rejonu Grójca. Ze złożeń owoców śliwy wybrano losowo po 100 śliwek każdej odmiany. Wymiary długości, szerokości oraz grubości śliwek zmierzono za pomocą suwmiarki z dokładnością do 0,1 mm. Wyznaczono wymiary minimalne, maksymalne, średnie i odchylenia standardowe. Z wylosowanych prób, do matematycznego modelowania, wybrano po 3 śliwki każdej odmiany różniące się pod względem wielkości i kształtu. Wybrane śliwki sfotografowano. Wykorzystano do tego celu aparat fotograficzny Panasonic LUMIX DMC-TZ3. Odległość od fotografowanych śliwek do obiektywu aparatu wynosiła 400 mm. Zdjęcia zapisywano w formacie JPEG o wymiarach 2560x1712 pikseli.

Kształt powierzchni śliwek opisano równaniami parametrycznymi. Wymiary długości odcinków łączących kontury w ustalonych przekrojach na wysokościach 5, 10, 15, 30, 35, 40, 50 mm rzutów na płaszczyznę XY modeli $3D$ śliwek porównano z odpowiednimi wymiarami długości odcinków rzeczywistych śliwek wyznaczając błąd względny.

Do matematycznego opisu współrzędnej $Z, Y1$ oraz $X1$ w zapisie macierzowym wykorzystano równania parametryczne opisane w pracy Mieszkalskiego [8].

$$Z_{i,j} = f(c, h, k, \varphi) \quad (1)$$

$$Y_{i,j} = f(b, f, g, \varphi, \vartheta) \quad (2)$$

$$X_{i,j} = f(a, d, e, \varphi, \vartheta) \quad (3)$$

$$Y1a_{i,j} = \text{Re}(Y1_{i,j}) \quad (4)$$

$$X1a_{i,j} = \text{Re}(X1_{i,j}) \quad (5)$$

$$Y1 = \frac{b}{\max(Y1a) - \min(Y1a)} \cdot Y1a \quad (6)$$

$$X1 = \frac{a}{\max(X1a) - \min(X1a)} \cdot X1a \quad (7)$$

gdzie:

$$\varphi_i = i \cdot \frac{\pi}{N} \quad (8)$$

$$\vartheta_j = j \cdot \frac{n \cdot \pi}{N} \quad (9)$$

$$i = j = 0 \dots N \quad (10)$$

N – rozmiar macierzy (liczba wierszy i kolumn).

Podstawiając do równań 1 – 7 wartości parametrów zapisanych w macierzy 11 otrzymuje się bryłę modelu śliwki.

$$\begin{bmatrix} f & h \\ d & k \\ g & n \\ e & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1 & 1 \\ 1,1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0,75 & 21 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Wymiary śliwek (c – długość, b – szerokość, a – grubość) pochodzą z pomiarów.

WYNIKI BADAŃ I ICH ANALIZA

W odniesieniu do długości, szerokości i grubości śliwek określonych z prób po 100 owoców wyznaczono wymiary minimalne, maksymalne, średnie i odchylenia standardowe, a wyniki zamieszczono w tabeli 1. Różnica między maksymalnym a minimalnym wymiarem długości w próbie dla odmiany Amers wynosi 16 mm natomiast 8,9 mm dla odmiany Bluefer i 6,3 mm dla Węgierki Zwykłej. Różnica między maksymalnym a minimalnym wymiarem szerokości w próbie dla odmiany Amers wynosi 9,7 mm oraz 13,5 mm dla Bluefer i 6,6 mm dla odmiany Węgierka Zwykła. Różnica między maksymalnym a minimalnym wymiarem grubości w próbie wynosi 7,8 mm dla odmiany Amers zaś 12,7 mm dla Bluefer i 6 mm dla Węgierki Zwykłej. Określono również wartości średnie podstawowych wymiarów śliwek w próbach. Z badanych odmian największe są śliwki odmiany Amers, a najmniejsze odmiany Węgierka Zwykła.

Tabela 1. Wymiary minimalne, maksymalne, średnie, odchylenia standardowe podstawowych wymiarów śliwek odmian Amers, Bluefre, Węgierka Zwykła

Table 1. Dimensions minimum, maximum, average, standard deviation basic dimensions of plum varieties Amers, Bluefre, Węgierka Zwykła

Odmiana Cultivar	Wyszczególnienie Specification	Długość Length	Szerokość Width	Grubość Thickness
		mm	mm	mm
Amers	min /min	45	37,5	36,3
	max /max	61	47,2	44,1
	średnia/average	53,5	42,9	40,9
	od. standardowe/standard deviation	4,53	3,19	2,43
Bluefre	min /min	43,9	34,8	30,5
	max /max	52,8	48,3	43,2
	średnia/average	49,1	41	39,1
	od. standardowe/standard deviation	2,42	2,79	2,76
Węgierka Zwykła	min /min	33,1	24,8	24,1
	max /max	39,4	31,4	30,1
	średnia/average	36,8	28,3	26,9
	od. standardowe/standard deviation	1,54	1,52	1,54

Źródło: Opracowanie własne

Source: Own study

W tabeli 2 zamieszczono podstawowe wymiary wybranych do modelowania po trzy śliwki odmian Amers, Bluefre i Węgierka Zwykła różniące się kształtem.

Tabela 2. Podstawowe wymiary wybranych do modelowania śliwek odmian Amers, Bluefre, Węgierka Zwykła

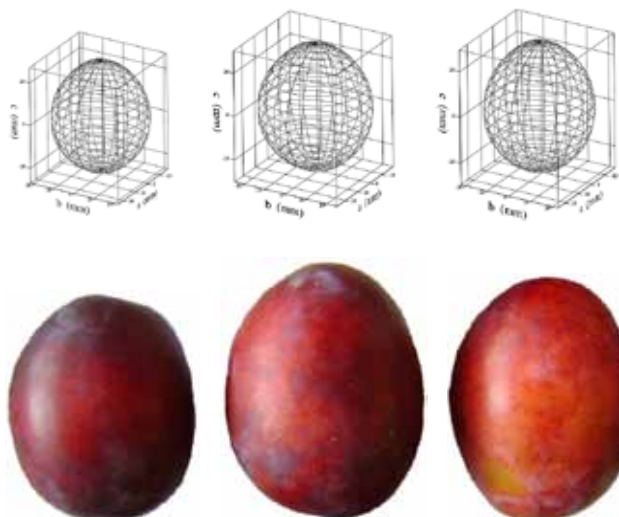
Table 2. Basic dimensions selected for modeling plum varieties Amers, Bluefre, Węgierka Zwykła

Odmiana Cultivar	Numer śliwki Number plums	Długość Length	Szerokość Width	Grubość Thickness
		mm	mm	mm
		<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
Amers	I	51,1	41	39,2
	II	57,2	46,8	43,2
	III	55,6	42,1	41,5
Bluefre	I	43,9	35,2	30,5
	II	50,9	44,1	41,5
	III	52,8	44,5	43,2
Węgierka Zwykła	I	37,4	30,3	27,1
	II	36,8	27,8	25,6
	III	35,8	27,2	27,2

Źródło: Opracowanie własne

Source: The own study

Modele 3D śliwek odmiany Amers zamieszczono na rysunku 2.



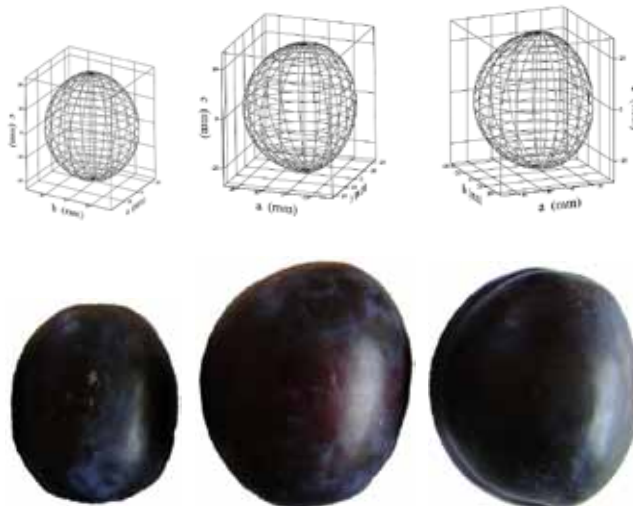
Rys. 2. Modele 3D śliwek I, II, III odmiany Amers.

Fig. 2. 3D model plums I, II, III varieties Amers.

Źródło: Opracowanie własne

Source: Own study

Na rysunku 3 zamieszczono modele 3D wybranych śliwek odmiany Bluefre.



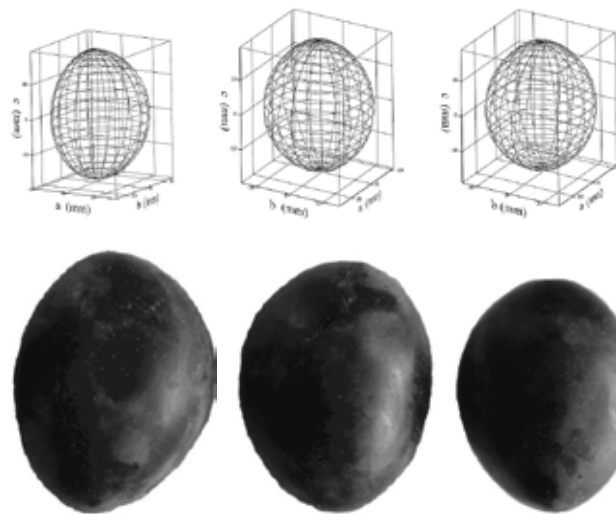
Rys. 3. Modele 3D śliwek I, II, III odmiany Bluefre.

Fig. 3. 3D model plums I, II, III varieties Bluefre.

Źródło: Opracowanie własne

Source: Own study

Na rysunku 4 zamieszczono modele 3D wybranych śliwek odmiany Węgierka Zwykła.



Rys. 4. Modele 3D śliwek I, II, III odmiany Węgierka Zwykła.

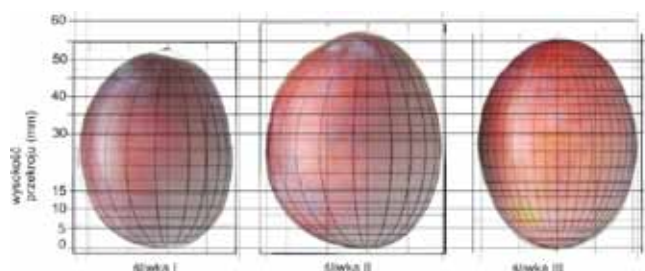
Fig. 4. 3D model plums I, II, III varieties Węgierka Zwykła.

Źródło: Opracowanie własne

Source: Own study

WERYFIKACJA MODELU

W celu weryfikacji modelu matematycznego opisującego kształt śliwek (wymiarów w tabeli 2) wykonano nałożone na siebie rzutowane na płaszczyznę *XZ* fotografie śliwek oraz ich modeli i pokazano je na tle poziomych linii wykresu (rys. 5 - 7). Linie poziome przecinają kontury rzutów modeli i kontury rzutów rzeczywistych śliwek i wskazują długości zaznaczonych przekrojów. Na podstawie różnic wyznaczonych długości tych przekrojów dla śliwek oraz modeli obliczono błąd względny (tabela 3).

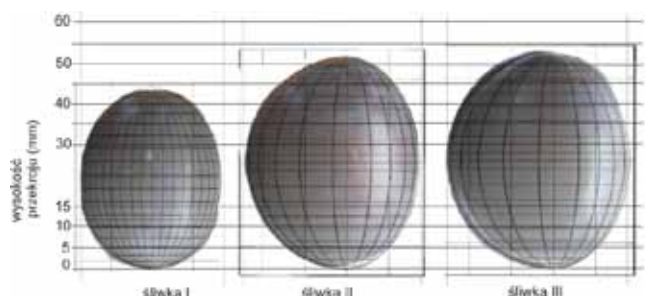


Rys. 5. Rzuty śliwek I, II, III odmiany Amers ich modeli na płaszczyznę XZ.

Fig. 5. Projections plums I, II, III Amers varieties of models on the XZ plane.

Źródło: Opracowanie własne

Source: Own study

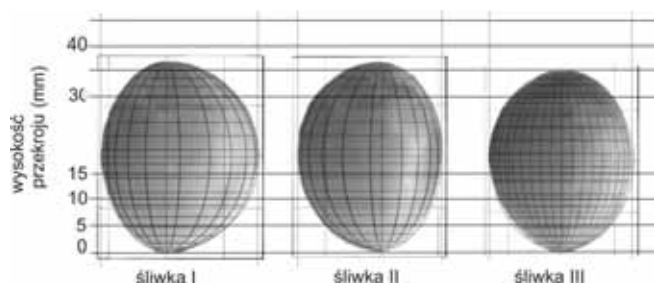


Rys. 6. Rzuty śliwek I, II, III odmiany Bluefre ich modeli na płaszczyznę XZ.

Fig. 6. Projections plums I, II, III Bluefre varieties of models on the XZ plane.

Źródło: Opracowanie własne

Source: Own study



Rys. 7. Rzuty śliwek I, II, III odmiany Węgierka Zwykła ich modeli na płaszczyznę XZ.

Fig. 7. Projections plums I, II, III Węgierka Zwykła varieties of models on the XZ plane.

Źródło: Opracowanie własne

Source: Own study

W proponowanym modelu kształtu powierzchni zewnętrznych śliwek odmian Amers, Bluefre i Węgierka Zwykła, błąd względny odwzorowania nie przekraczał 5%, za wyjątkiem III śliwki odmiany Bluefre na przekroju 50 mm (15,4%).

Na podstawie porównania nałożonych na płaszczyznę XZ rzutów śliwek i ich modeli (rys. 5 – 7) oraz z wyników zawartych w tabeli 3 uznano, że proponowana metoda odwzorowuje podstawowe wymiary i kształt śliwek. Z analizy danych zawartych w tabeli 3 wynika, że dokładność modeli kształtu śliwek jest wystarczająca do celów praktycznych, ponieważ błąd względny nie przekracza 5%.

Tabela 3. Wartości błędu względnego (%) dla wymiarów śliwek (I, II, III) odmian Amers, Bluefre, Węgierka Zwykła i ich modeli 3D

Tabela 3. The values of relative error (%) for the dimensions of plum (I, II, III) varieties Amers, Bluefre, Węgierka Zwykła and their 3D models

Wysokość przekroju Sectionheight (mm)	Numer śliwki Numberplums		
	I	II	III
Śliwka odmiany Amers Plum varieties Amers			
5	0,4	3,1	4,4
10	0	1,3	2,4
15	-1,6	0,2	-0,8
30	0	0,6	0
40	4,3	2,4	0
50	2,8	5	1,2
Śliwka odmiany Bluefre Plum varieties Bluefre			
5	3,3	0	2,7
10	0	0	1,1
15	0	-0,8	0
30	0	0	0
40	3,6	0,8	0,8
50		0,7	15,4
Śliwka odmiany Węgierka Zwykła Plum varieties Węgierka Zwykła			
5	-1,5	-2,2	-3,2
10	-0,8	-0,4	-0,8
15	0	-1,1	-0,4
30	1,8	2,8	0
35	3,5	4,7	

Źródło: Opracowanie własne

Source: Own study

WNIOSKI

1. Równania parametryczne, w proponowanym modelu, mogą być stosowane do modelowania kształtów powierzchni zewnętrznej śliwek odmian Amers, Bluefre i Węgierka Zwykła.
2. Opracowany model 3D powierzchni zewnętrznej śliwek (Amers, Bluefre, Węgierka Zwykła) odwzorowujący kształt śliwki może służyć do reprezentowania rzeczywistych owoców wszędzie tam, gdzie jest wymagana dokładność odwzorowania kształtu na poziomie błędu względnego wynoszącego do 5 %.

3. Odwzorowane równaniami parametrycznymi powierzchnie zewnętrzne modeli 3D śliwek (Amers, Bluefre, Węgierka Zwykła) mają identyczne wymiary podstawowe jak rzeczywiste śliwki.
4. Proponowana metoda modelowania powierzchni śliwek może być stosowana przez projektantów do konstruowania przenośników, separatorów, pakowarek i urządzeń do drylowania.

LITERATURA

- [1] **FAO Statistical Yearbook. 2010.** Food and Agriculture Organization of the United Nations.
- [2] **FOLEY J. D., A. van DAM, S.K. FEINER, J.F. HUGHES, R.L. PHILLIPS. 2001.** Wprowadzenie do grafiki komputerowej. Warszawa: WNT, ISBN 83-204-2662-6.
- [3] **KICIAK P. 2000.** Podstawy modelowania krzywych i powierzchni. Zastosowania w grafice komputerowej. Warszawa: WNT, ISBN 83-204-2464-X.
- [4] **Lista odmian roślin sadowniczych wpisanych do krajowego rejestru w Polsce. 2007.** Słupia Wielka. Wydawnictwo: COBORU.
- [5] **MIESZKALSKI L. 2011a.** „Metoda matematycznego modelowania kształtu bryły ziarna pszenicy za pomocą parametrycznej krzywej przestrzennej i czterowęzłowej siatki”. *Postępy Techniki Przetwórstwa Spożywczego* 1: 41-45.
- [6] **MIESZKALSKI L. 2011b.** Agriculture and Food Machinery, Application of Physics For Improving. Gliński J., Horabik J., Lipiec J. (edited by). *Encyklopedia of Agrophysics*. Institute of Agrophysics Polish Academy of Sciences. Lublin, Poland, Springer. ISBN 978 – 90 – 481 - 3584 – 4:14-26.
- [7] **MIESZKALSKI L. 2014.** „Bezier curves in modeling the shapes of biological objects. *Annals of Warsaw University of Life Sciences – SGGW, Agriculture*”. *Agricultural and Forest Engineering* 64: 117-128.
- [8] **MIESZKALSKI L. 2015.** „Matematyczne modelowanie kształtu owoców śliwy (*Prunus domestica* L.)”. *Postępy Techniki Przetwórstwa Spożywczego* 2: 38 – 42.
- [9] **MINH N. P. 2014.** „Various factors affecting to the production of marian plum (ThanhTra) jam”. *International Journal of Multidisciplinary Research and Development* 2014 1(5): 127-131
- [10] **KESHAVARZPOUR F. and M. RASHIDI. 2010.** „Classification of apple size and shape based on mass and outer dimensions”. *Am-Euras. J. Agric. and Environ. Sci.* 9(6): 618-621.
- [11] **Odmiany roślin sadowniczych. 2008.** Stowarzyszenie Polskich Szkółkarzy, Skierniewice.
- [12] **POLDER G., G.W.A.M. van der HEIJDEN and I.T. YOUNG. 2003.** „Tomato sorting using independent component analysis on spectral images”. *Real-Time Imaging* 9: 253-259.
- [13] **RASHIDI M. and F. KESHAVARZPOUR. 2011.** „Classification of tangerine size and shape based on mass and outer dimensions”. *Agricultural Engineering Research Journal* 1(3): 51-54.
- [14] **RASHIDI M. and K. SEYFI. 2007.** „Classification of fruit shape in cantaloupe using the analysis of geometrical attributes”. *World Appl. Sci. J.* 3(6): 735-740.
- [15] **RASHIDI M., M.S. BENI, P. MOHSENI, F. KESHAVARZPOUR. 2014.** „Plum Size and Shape Classification Based on Mass and Dimensions”. *American-Eurasian J. Agric.&Environ. Sci.*, 14 (1): 29-32. DOI: 10.5829/idosi.ajeaes.2014.14.01.12277
- [16] **SADRNI H., A. RAJABIPOUR, A. JAFARY, A. JAVADI and Y. MOSTOFI. 2007.** „Classification and analysis of fruit shapes in long type watermelon using image processing”. *Int. J. Agric. Biol.* 9: 68-70.
- [17] **ŚWIETLIKOWSKA K. (red). 2008.** *Surowce spożywcze pochodzenia roślinnego*. Warszawa: Wydawnictwo SGGW, ISBN 978-83-7244-929-0.