MINUT 2023 (5), s. 149–164
ISSN 2719-3063

Katarzyna ADRIANOWCZ[1], Iwona NOWAK[1]

[1]Katedra Zastosowań Matematyki i Metod Sztucznej Inteligencji, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Dlaczego eliminacja Gaussa działa i dlaczego jest taka pomocna?

Streszczenie. Proces eliminacji Gaussa kojarzony jest najczęściej z rozwiązywaniem układów równań liniowych, jednak metoda ta może być z powodzeniem stosowana do obliczania wyznaczników, wyznaczania macierzy odwrotnej lub obliczania rzędu macierzy.
W tej pracy pokażemy nie tyle jak stosować proces eliminacji Gaussa do wymienionych powyżej zagadnień, ile wytłumaczymy, dlaczego on działa.
Zakładamy, że Czytelnik zna podstawowe pojęcia związane z macierzami, wyznacznikami i układami równań liniowych.

Słowa kluczowe: eliminacja Gaussa, operacje elementarne na wierszach, macierze elementarne.

1. Wstęp

Metoda eliminacji Gaussa wykorzystywana do rozwiązywania układów równań liniowych polega na przekształcaniu układu równań do równoważnego mu układu w formie zredukowanej (często schodkowej), czyli takiego, w którym w każdym kolejnym równaniu jest coraz mniej niewiadomych. Przekształcając układ równań, w kolejnych krokach eliminujemy niewiadome z odpowiednich równań — stąd nazwa metody. Taki zredukowany układ jest znacznie łatwiejszy do rozwiązania.
Eliminacja Gaussa opiera się na trzech operacjach, które można wykonywać na układach równań i które przekształcają układ do układu równoważnego, czyli układu mającego te same rozwiązania co układ wyjściowy.
Te operacje to:

1) zamiana kolejności równań,

2) obustronne pomnożenie równania przez liczbę różną od zera,

3) dodanie stronami do wybranego równania innego równania pomnożonego (obustronnie) przez pewną liczbę.

Autor korespondencyjny: I.Nowak (Iwona.Nowak@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 14.07.2023.

Na zajęciach z algebry liniowej wykonywanie powyższych operacji na układzie równań zastępuje się przeprowadzaniem **operacji elementarnych** na tak zwanej macierzy rozszerzonej (lub uzupełnionej).
Poza rozwiązywaniem układów eliminacja Gaussa jest wykorzystywana także do obliczania wyznaczników, szukania macierzy odwrotnych oraz obliczania rzędu macierzy. W służących temu algorytmach również wymaga się przeprowadzania operacji elementarnych na odpowiednich macierzach. Przy takim podejściu pod pojęciem **eliminacji Gaussa** rozumiemy budowanie ciągu macierzy, które powstają dzięki wykonaniu na nich tzw. działań (operacji) elementarnych na wierszach lub kolumnach. Ostatnim elementem takiego ciągu, czyli wynikiem eliminacji Gaussa, jest macierz schodkowa lub schodkowa zredukowana. Działania elementarne czasami są nazywane **krokami Gaussa**.

2. Operacje elementarne

Rozważania zacznijmy od przypomnienia, co rozumiemy przez pojęcie operacji elementarnych na macierzach. Wyróżniamy trzy operacje elementarne, które można wykonywać na wierszach lub na kolumnach macierzy[1].

ERO1 Zamiana miejscami dwóch wierszy, lub ECO1 – zamiana dwóch kolumn.

ERO2 Pomnożenie wiersza (a dokładniej każdego elementu stojącego w danym wierszu), przez podaną liczbę różną od zera. Mnożenie kolumny przez liczbę będziemy oznaczać ECO2.

ERO3 Dodanie do wybranego wiersza innego wiersza pomnożonego przez wybraną liczbę (do każdego elementu wiersza dodajemy odpowiedni element innego wiersza pomnożony przez wybraną liczbę). ECO3 – analogiczne działanie na kolumnach.

Przykład 1. Zastosujmy kilka operacji elementarnych przekształcając macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 4 \\ \frac{3}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

Przyjmujemy oznaczenia: w_i – i-ty wiersz , k_j – j-ta kolumna macierzy $\mathbf{A}$. $\mathbf{A}^{(i)}$– oznacza macierz otrzymaną z macierzy $\mathbf{A}$ po i -tej operacji. Pod strzałką umieszczona jest informacja, która operacja elementarna jest wykonywana, a nad strzałką szczegóły tej operacji.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 4 \\ \frac{3}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[ERO1]{w_1 \leftrightarrow w_3} \mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[ERO2]{w_2 \cdot 2} \mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[ERO3]{w_2 + w_1 \cdot (-3)} \mathbf{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -16 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Jak widać, w trzech krokach został „wyeliminowany” element a_{12} macierzy $\mathbf{A}$ — w macierzy $\mathbf{A}^{(3)}$ ten element ma wartość zero.

[1] Przyjęłyśmy popularne oznaczenia pochodzące z języka angielskiego: ERO – Elementary Row Operations, ECO – Elementary Column Operations.

Przeprowadzony proces eliminacji można zapisać

$$\mathbf{A} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \mathbf{A}^{(1)} \xrightarrow{w_2 \cdot 2} \mathbf{A}^{(2)} \xrightarrow{w_2 + w_1 \cdot (-3)} \mathbf{A}^{(3)}. \qquad (1)$$

Uwaga 1. Pomiędzy kolejnymi macierzami w ciągu kroków Gaussa nie wstawiamy znaku równości, bo te macierze są różne!

3. Macierze elementarne

Wszystkie trzy opisane powyżej operacje elementarne mogą być wykonane przez wymnożenie danej macierzy przez odpowiednio dobraną macierz, nazywaną **macierzą elementarną**.

Mnożenie danej macierzy przez macierze elementarne po lewej stronie odpowiada działaniom na jej wierszach (ERO), a po prawej - na kolumnach (ECO).

Macierze elementarne to zawsze macierze kwadratowe, a ich stopień jest taki, aby można było wykonać odpowiednie mnożenie. Oznacza to, że do działania na wierszach macierzy $\mathbf{A}$ stopień macierzy elementarnej musi być równy liczbie wierszy macierzy $\mathbf{A}$, a do działania na kolumnach – liczbie jej kolumn. Wyróżniamy trzy rodzaje macierzy elementarnych: macierze permutacji, macierze diagonalne i macierze unipotentne.

Macierz elementarna E_{kl} – macierz permutacji

Zauważmy, że działanie elementarne EO1 (zamiana kolejności wierszy/kolumn o numerach k oraz l) jest efektem mnożenia macierzy $\mathbf{A}$ przez macierz elementarną $\mathbf{E}_{kl}$

$$\mathbf{E}_{kl} = \mathbf{E} + [e_{ij}], \quad \text{gdzie} \quad e_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{gdy } i = j = k \vee i = j = l \\ 1, & \text{gdy } (i = k \wedge j = l) \vee (i = l \wedge j = k) \\ 0, & \text{w każdym innym przypadku.} \end{cases} \qquad (2)$$

Uwaga 2. Macierz $\mathbf{E}$ bez indeksów oznacza w całej pracy macierz jednostkową, o wymiarze umożliwiającym wykonywanie działań.

Uwaga 3. Macierz $\mathbf{E}_{kl}$ — to macierz powstała z macierzy jednostkowej (o odpowiednim wymiarze) przez zamianę wiersza (kolumny) o numerze k z wierszem (kolumną) o numerze l.

Przykład 2. Jeżeli macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 4 \\ \frac{3}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ z przykładu 1 pomnożymy lewostronnie przez macierz $\mathbf{E}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, to otrzymamy:

$$\mathbf{E}_{13} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 4 \\ \frac{3}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(\mathbf{1})},$$

czyli macierz z zamienionymi wierszami w_1 i w_3.

Przykład 3. Aby wykonać zamianę kolumn k_1 i k_3 trzeba pomnożyć macierz $\mathbf{A}$, z prawej strony, przez macierz elementarną $\mathbf{E'}_{13}$, która musi być w tym przypadku macierzą stopnia 4:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{E'}_{13}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 3 & 4\\ \frac{3}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2}\\ 1 & -1 & 4 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2 & 0 & 4\\ -2 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 4 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Macierz elementarna $E_k(\alpha)$ – macierz diagonalna

Mnożenie k-tego wiesza/kolumny macierzy $\mathbf{A}$ przez stałą $\alpha \neq 0$, czyli działanie elementarne EO2, uzyskuje się w wyniku mnożenia $\mathbf{A}$ przez macierz $\mathbf{E}_k(\alpha)$:

$$\mathbf{E}_k(\alpha)=[e_{ij}]\,,\quad \text{gdzie}\quad e_{ij}=\begin{cases}\alpha & \text{gdy } i=j=k\\ 1, & \text{gdy } i=j\neq k\\ 0, & \text{w każdym innym przypadku.}\end{cases}\tag{3}$$

Uwaga 4. Macierz $\mathbf{E}_k(\alpha)$ powstaje z odpowiedniej macierzy jednostkowej przez pomnożenie jej k-tego wiersza/kolumny przez liczbę α.

Przykład 4. Pomnóżmy macierz $\mathbf{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 4 & 0\\ \frac{3}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2}\\ 0 & -2 & 3 & 4\end{bmatrix}$ z lewej strony przez macierz elementarną $\mathbf{E}_2(2)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

$$\mathbf{E}_2(2)\cdot\mathbf{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & 4 & 0\\ \frac{3}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2}\\ 0 & -2 & 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 4 & 0\\ 3 & 2 & -4 & 1\\ 0 & -2 & 3 & 4\end{bmatrix}=\mathbf{A}^{(2)}.$$

Otrzymaliśmy macierz $\mathbf{A}^{(2)}$, w której elementy drugiego wiersza są dwa razy większe niż w $\mathbf{A}^{(1)}$.

Przykład 5. Przyjmijmy, że w rozwiązywanym problemie pojawiła się potrzeba pomnożenia trzeciej kolumny macierzy $\mathbf{A}^{(1)}$ przez 10. Oznacza to, że musimy macierz $\mathbf{A}^{(1)}$ pomnożyć z prawej strony przez macierz elementarną $\mathbf{E}_3(10)$.

$$\mathbf{A}^{(1)}\cdot\mathbf{E}_3(10)=\begin{bmatrix}1 & -1 & 4 & 0\\ \frac{3}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2}\\ 0 & -2 & 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&10&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 40 & 0\\ \frac{3}{2} & 1 & -20 & \frac{1}{2}\\ 0 & -2 & 30 & 4\end{bmatrix}.$$

Macierz elementarna $E_{kl}(\alpha)$ – macierz unipotentna

Ostatnie działanie elementarne EO3, polegające na dodaniu do wiersza/kolumny o numerze k, wiersza/kolumny o numerze l pomnożonego przez stałą α wymaga mnożenia danej macierzy przez macierz elementarną $\mathbf{E}_{kl}(\alpha)$

$$\mathbf{E}_{kl}(\alpha)=\mathbf{E}+[e_{ij}]\,,\quad \text{gdzie}\quad e_{ij}=\begin{cases}\alpha, & \text{gdy } i=l\wedge j=k\\ 0, & \text{w każdym innym przypadku.}\end{cases}\tag{4}$$

Uwaga 5. Macierz $\mathbf{E}_{kl}(\alpha)$ to macierz jednostkowa z dodatkowym elementem α stojącym na pozycji kl tzn. w wierszu k i kolumnie l.

Przykład 6. Macierz $\mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ pomnóżmy lewostronnie przez $\mathbf{E}_{12}(-3)$:

$$\mathbf{E}_{12}(-3) \cdot \mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -16 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(3)}.$$

Jak widać, powyższy iloczyn odpowiada operacji dodania do drugiego wiersza, wiersza pierwszego pomnożonego przez liczbę (-3).

Jeśli porównać przykład 1 z przykładami 2, 4, 6, to widać, że proces eliminacji opisany zależnością (1) jest tym samym co lewostronne mnożenie macierzy $\mathbf{A}$ kolejno przez macierze elementarne $\mathbf{E}_{13}$, $\mathbf{E}_2(2)$, $\mathbf{E}_{12}(-3)$. Można to zapisać:

$$\mathbf{E}_{12}(-3) \cdot \mathbf{E}_2(2) \cdot \mathbf{E}_{13} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^{(3)}. \tag{5}$$

Równość (5) jest poprawnym zapisem operacji elementarnych na macierzy $\mathbf{A}$, ale zapis w postaci (1) jest zdecydowanie częściej używany.

Przykład 7. Pomnóżmy macierz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b & c & d & f \\ g & h & j & k & l \end{bmatrix}$ z prawej strony kolejno przez przez $\mathbf{E}_{25}$, $\mathbf{E}_3(5)$ oraz $\mathbf{E}_{14}(2)$.
Efektem takiego mnożenia jest

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}_{25} \cdot \mathbf{E}_3(5) \cdot \mathbf{E}_{14}(2) = \mathbf{B}^{(3)} = \begin{bmatrix} a+2d & f & 5c & d & b \\ g+2k & l & 5j & k & h \end{bmatrix},$$

co jest równoważne wykonaniu odpowiednich działań elementarnych na kolumnach

$$\mathbf{B} \xrightarrow{k_2 \leftrightarrow k_5} \mathbf{B}^{(1)} \xrightarrow{k_3 \cdot 5} \mathbf{B}^{(2)} \xrightarrow{k_1 + k_4 \cdot 2} \mathbf{B}^{(3)}.$$

Uwaga 6. W literaturze spotkać można alternatywne oznaczenia macierzy elementarnych Gaussa[2] zamiast proponowanych tutaj $\mathbf{E}_{kl}$, $\mathbf{E}_k(\alpha)$ oraz $\mathbf{E}_{kl}(\alpha)$.

Wyznaczniki macierzy elementarnych

Macierze elementarne są macierzami kwadratowymi, więc można wyliczyć ich wyznaczniki. Szczególnie łatwo obliczyć wyznaczniki macierzy trójkątnych $\mathbf{E}_k(\alpha)$ oraz $\mathbf{E}_{kl}(\beta)$. Z wniosku z twierdzenia Laplace'a (o rozwinięciu względem dowolnego wiersza/kolumny)[3] wynika, że wyznacznik macierzy trójkątnej równa się iloczynowi elementów na przekątnej głównej. Stąd, wobec definicji tych macierzy:

$$\det(\mathbf{E}_k(\alpha)) = \alpha, \qquad \det(\mathbf{E}_{kl}(\beta)) = 1.$$

[2] Na przykład $\mathbf{T}_{kl}$ lub $\mathbf{P}^{kl}$, $\mathbf{I}_k(\alpha)$ lub $\mathbf{D}_k(\alpha)$, $\mathbf{L}_{\mathbf{kl}}(\alpha)$ i inne.

[3] Twierdzenie wraz z dowodem i wnioskami znaleźć można w [1], s. 165 - 167.

Odrobinę bardziej złożone jest obliczenie wyznacznika macierzy elementarnej $\mathbf{E}_{kl}$.

$$\det(\mathbf{E}_{kl}) = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} & & \text{kol. } k & & \text{kol. } l & \end{array} \\
\begin{vmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{vmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{wiersz } k \\ \\ \text{wiersz } l \\ \\ \end{array}$$

Wykorzystajmy twierdzenie Laplace'a do rozwinięcia wyznacznika najpierw względem k-tego wiersza, w którym jest tylko jeden niezerowy element (równy 1), stojący w k-tym wierszu i l-tej kolumnie.

$$\det(\mathbf{E}_{kl}) = (-1)^{k+l} \cdot \begin{array}{c}
\text{kol. } k \\
\begin{vmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 1
\end{vmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{wiersz } l-1 \\ \\ \end{array}$$

Następnie stosujemy rozwinięcie Laplace'a do wiersza[4] $l-1$, w którym ponownie jest tylko jeden niezerowy element równy 1, w wierszu $l-1$ i k-tej kolumnie. W efekcie otrzymujemy:

$$\det(\mathbf{E}_{kl}) = (-1)^{k+l} \cdot (-1)^{l-1+k} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2k+2l-1} \det(\mathbf{E}) = -1.$$

4. Twierdzenie o procesie eliminacji Gaussa

Poza zaprezentowaniem jak działają macierze elementarne, przykłady przeliczone w poprzednich paragrafach pokazują, że proces eliminacji Gaussa polega na tworzeniu ciągu macierzy, z których każda kolejna jest uzyskiwana z poprzedniej przez mnożenie przez jedną z macierzy elementarnych. Zarówno (1) jak i (5) opisują początkowy etap w procesie eliminacji Gaussa – eliminację jednego elementu. Następne kroki eliminacji przeprowadza się analogicznie, eliminując kolejne elementy macierzy, tak długo, aż otrzymamy macierz schodkową/schodkową zredukowaną. W efekcie takiego postępowania generowany jest ciąg macierzy $(\mathbf{A}^{(0)}, \mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \ldots, \mathbf{A}^{(N)})$, w którym każda z macierzy $\mathbf{A}^{(i)}$ powstaje z poprzedniej przez pomnożenie jej przez jedną z macierzy elementarnych.
W przypadku, gdy ograniczymy się do działań na wierszach, możemy zapisać:

$$\mathbf{A}^{(N)} = \left(\prod_{n=1}^{N} \mathbf{E}_{G(n)} \right) \mathbf{A}^{(0)}, \tag{6}$$

gdzie $\mathbf{E}_{G(n)}$ jest jedną z macierzy elementarnych, $\mathbf{A}^{(0)}$ to pierwsza, a $\mathbf{A}^{(N)}$ ostatnia macierz występująca w ciągu macierzy uzyskanych w eliminacji Gaussa.
Sytuacja, w której działamy tylko na kolumnach jest analogiczna do powyższej i różni się tylko tym, że

[4] Rozwinięcie względem k-tego wiersza zmniejsza stopień wyznacznika o jeden, dlatego wiersz, który pierwotnie był wierszem o numerze l ma w „nowym" wyznaczniku numer $l-1$.

$\mathbf{A}^{(N)} = \mathbf{A}^{(0)} \left(\prod_{n=1}^{N} \mathbf{E}_{G(n)} \right)$ (macierze w ciągu powstają przez pomnożenie ich przez macierz elementarną z prawej strony.

W przypadku gdy działamy i na wierszach i na kolumnach, macierze $\mathbf{A}^{(i)}$ mnożymy przez elementarne odpowiednio z lewej lub prawej strony.

Dla uporządkowania dalszych rozważań przyjmijmy od tego momentu, że operacje elementarne wykonujemy tylko na wierszach macierzy[5].

Zajmijmy się teraz twierdzeniem, które jest podstawą wszystkich, bardzo wygodnych, zastosowań eliminacji Gaussa.

Twierdzenie 1. *Dla każdej niezerowej macierzy* $\mathbf{A}$ *istnieje taki skończony ciąg* $\left(\mathbf{E}_{G(n)}\right)$ *macierzy elementarnych Gaussa, że*

$$\mathbf{B} = \left(\prod_{n=1}^{N} \mathbf{E}_{G(n)} \right) \mathbf{A}, \tag{7}$$

gdzie $\mathbf{B}$ *jest macierzą schodkową (schodkową zredukowaną).*

Innymi słowy, każda macierz $\mathbf{A}$ może zostać przekształcona w procesie eliminacji Gaussa w macierz $\mathbf{B}$, która jest macierzą schodkową (schodkową zredukowaną).

Dowód.

Dowód twierdzenia wynika bezpośrednio z poniższego algorytmu postępowania.

Niech i oznacza numer wiersza macierzy. Algorytm zaczynamy od wiersza pierwszego, przyjmując $i = 1$.

1. Niech j oznacza numer pierwszej[6] niezerowej kolumny w macierzy $\mathbf{A}$. Zatem w wierszu l (dla pewnego $l \in \{1, \ldots, m\}$) stoi element $a_{lj} \neq 0$. Wyznaczamy macierz $\mathbf{A}^{(1)}$ wykonując mnożenie $\mathbf{A}$ przez macierz elementarną $\mathbf{E}_{1l}$:
$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{E}_{1l}\mathbf{A}. \tag{8}$$
Jeżeli $l = i$, czyli $a_{1j} \neq 0$, to $\mathbf{E}_{1l} = \mathbf{E}_{11} = \mathbf{E}$ i $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{A}$.
W macierzy $\mathbf{A}^{(1)}$ element $a_{1j}^{(1)} \neq 0$.

2. Mnożymy pierwszy wiersz macierzy $\mathbf{A}^{(1)}$ przez $\frac{1}{a_{1l}^{(1)}}$:
$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{E}_1 \left(\frac{1}{a_{1l}^{(1)}} \right) \mathbf{A}^{(1)} \tag{9}$$
Mamy $a_{1j}^{(2)} = 1$.

[5] Eliminacja oparta tylko na wierszach często wystarcza, choć operacje wykonywane na wierszach i kolumnach mogą być bardziej wydajne i pozwalają skrócić obliczenia.

[6] Jej istnienie wynika z faktu, że macierz jest niezerowa.

3. Zerujemy pozostałe elementy kolumny k_j, wykonując dla $l = 2, \ldots, m$ operacje $w_1 \cdot (-a_{lj}^{(2)}) + w_l$, w wyniku których dostajemy kolejną macierz:

$$\mathbf{A}^{(3)} = \left(\prod_{l=2}^{m} \mathbf{E}_{1l} \left(-a_{lj}^{(2)} \right) \right) \mathbf{A}^{(2)} \tag{10}$$

   W macierzy $\mathbf{A}^{(3)}$ kolumna j składa się z jednej 1 i samych zer.

Niech n oznacza numer macierzy po kolejnym przekształceniu. Na tym etapie algorytmu $n = 3$. Kolejne punkty algorytmu powtarzamy dla następnych wierszy $w_2, \ldots w_m$.

4. Jeżeli w macierzy $\mathbf{A}^{(n)}$ nie ma wiersza o numerze $i + 1$, to kończymy algorytm – macierz $\mathbf{A}^{(n)}$ jest macierzą schodkową (zredukowaną).
   W przeciwnym razie zmieniamy wskaźnik numeru wiersza, przyjmując $i = i + 1$.
   Za s przyjmujemy numer kolejnej niezerowej kolumny ($s > j$). Jeżeli nie ma już niezerowej kolumny, to koniec algorytmu – mamy macierz schodkową zredukowaną.

5. Wiersz w_i zamieniamy z wierszem w_l (dla $l \geq i$), w którym stoi element różny od zera:

$$\mathbf{A}^{(n+1)} = \mathbf{E}_{il} \mathbf{A}^{(n)} \tag{11}$$

   W tej macierzy element $a_{is}^{(n+1)} \neq 0$.

6. Mnożymy wiersz w_i macierzy $\mathbf{A}^{(n+1)}$ przez $\frac{1}{a_{is}^{(n+1)}}$:

$$\mathbf{A}^{(n+2)} = \mathbf{E}_i \left(\frac{1}{a_{is}^{(2+i)}} \right) \mathbf{A}^{(n+1)}. \tag{12}$$

   Mamy $a_{is}^{(n+2)} = 1$.

7. Zerujemy kolumnę k_s, wykonując dla $l = 1, 2, \ldots, m$ i $l \neq i$ operacje $w_i \cdot (-a_{ls} + w_l)$, w wyniku których dostajemy kolejną macierz:

$$\mathbf{A}^{(n+3)} = \left(\prod_{l=1, l \neq i}^{m} \mathbf{E}_{il} (-a_{ls}^{(n+2)}) \right) \mathbf{A}^{(n+2)}. \tag{13}$$

   W macierzy $\mathbf{A}^{(n+3)}$ kolumna s składa się z jednej 1 i samych zer.

8. Przyjmujemy $j = s$, $n = n + 3$ i powtarzamy algorytm od punktu 4.

Maksymalna ilość mnożeń macierzy $\mathbf{A}$ przez macierze elementarne wynika z powyższego algorytmu. W działaniach (8), (9), (11) i (12) jest po jednej macierzy elementarnej, w działaniach (10) i (13) mamy $(m - 1)$ macierzy elementarnych. Przy czym działania (11), (12), (13) mogą się powtórzyć $m - 1$ razy. Ogólnie, maksymalna liczba macierzy elementarnych jaka może się pojawić w tym algorytmie wynosi:

$$1 + 1 + (m - 1) + (m - 1)(1 + 1 + (m - 1)) = m(m + 1),$$

czyli jest liczbą skończoną. $\square$

Uwaga 7. Jeśli macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą kwadratową, to macierz $\mathbf{B}$ będzie macierzą trójkątną górną/diagonalną.

Przykład 8. Przekształćmy macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ do macierzy schodkowej, stosując powyższy algorytm.
Zaczynamy stosować algorytm od pierwszego wiersza macierzy, przyjmując $i = 1$.

1. Zauważmy, że już pierwsza kolumna macierzy jest niezerowa, czyli $j = 1$ i $l = 1$, a to daje nam $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{A}$.

2. Zgodnie z (9) mamy $\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{E}_1(\frac{1}{2}) \cdot \mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Na podstawie (10) $\mathbf{A}^{(3)} = \prod_{l=2}^{4} \mathbf{E}_{1l}(-a_{l1}^{(2)}) \cdot \mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -9 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Numer macierzy po przekształceniach to $n = 3$.

4. Przechodzimy do następnego wiersza przyjmując $i = 2$. Zauważmy, że $s = 2$.

5. Ponieważ element $a_{22} \neq 0$, więc $l = 2$ i z (11) mamy $\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{A}^{(3)}$.

6. Zgodnie z (12) $\mathbf{A}^{(5)} = \mathbf{E}_2(-1) \cdot \mathbf{A}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -9 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

7. Z (13) dostajemy $\mathbf{A}^{(6)} = \prod_{l=1, l\neq 2}^{4} \mathbf{E}_{2l}(-a_{l2}^{(5)}) \cdot \mathbf{A}^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -1 \end{bmatrix}$.

8. Przyjmujemy $j = s = 2$, $n = n + 3 = 6$ i powtarzamy algorytm od punktu 4.

4. $i = 3$, $s = 4$.

5. $l = 4$, czyli $\mathbf{A}^{(7)} = \mathbf{E}_{34} \cdot \mathbf{A}^{(6)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

6. $\mathbf{A}^{(8)} = \mathbf{E}_3(\frac{1}{6}) \cdot \mathbf{A}^{(7)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$

7. $\mathbf{A}^{(9)} = \prod_{l=1, l\neq 3}^{4} \mathbf{E}_{3l}(-a_{l3}^{(8)}) \cdot \mathbf{A}^{(8)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$

8. Przyjmujemy $j = s = 4,\ n = n + 3 = 9$ i powtarzamy od punktu 4.

4. $i = 4,\ s = 5.$

5. Ponieważ $l = 4$ to $\mathbf{A}^{(10)} = \mathbf{E}_{44} \cdot \mathbf{A}^{(9)} = \mathbf{A}^{(9)}$.

6. $\mathbf{A}^{(11)} = \mathbf{E}_5(\frac{1}{5}) \cdot \mathbf{A}^{(10)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

7. $\mathbf{A}^{(12)} = \prod_{l=1}^{3} \mathbf{E}_{4l}(-a_{l5}^{(11)}) \cdot \mathbf{A}^{(11)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

8. $j = 5, n = 12, i = 5$, a ponieważ nie ma już kolejnej niezerowej kolumny, to kończymy algorytm, a macierz $\mathbf{A}^{(12)}$ jest oczekiwaną macierzą schodkową zredukowaną.

5. Zastosowania

Jak już wspomniano, twierdzenie 1 ma bardzo użyteczne konsekwencje. Możliwość przekształcenia danej macierzy do macierzy schodkowej/schodkowej zredukowanej przy pomocy trzech typów macierzy elementarnych przekłada się na kilka wygodnych zastosowań eliminacji Gaussa.

5.1. Wyznacznik

Załóżmy na potrzeby całego podrozdziału, że $\mathbf{A}$ jest macierzą kwadratową oraz przypomnijmy ważne twierdzenie, którego dowód znaleźć można np. w [1] s.241.

Twierdzenie 2. *(Cauchy'ego o wyznacznikach) Jeżeli* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *są macierzami kwadratowymi o takim samym rozmiarze, to*

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}).$$

Zauważmy, że z tego że

$$\det(\mathbf{E}_{kl}) = -1, \quad \det(\mathbf{E}_k(\alpha)) = \alpha, \quad \det(\mathbf{E}_{kl}(\alpha)) = 1 \tag{14}$$

wynikają własności wyznaczników związane z wykonywaniem działań elementarnych.

- Jeśli zamienimy kolejność wierszy o numerach k i l, tzn. gdy $\mathbf{A} \xrightarrow{w_k \leftrightarrow w_l} \mathbf{A}^{(1)}$, czyli $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{E}_{kl} \cdot \mathbf{A}$, to
$$\det \mathbf{A}^{(1)} = \det \mathbf{E}_{kl} \cdot \det \mathbf{A} = (-1) \cdot \det \mathbf{A} = -\det \mathbf{A}.$$
- Jeśli mnożymy wiersz o numerze k przez stałą $\alpha \neq 0$, tzn. gdy $\mathbf{A} \xrightarrow{w_k \cdot \alpha} \mathbf{A}^{(1)}$, czyli $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{E}_k(\alpha) \cdot \mathbf{A}$, to
$$\det \mathbf{A}^{(1)} = \det \mathbf{E}_k(\alpha) \cdot \det \mathbf{A} = \alpha \cdot \det \mathbf{A}.$$
- Jeśli do wiersza o numerze k dodamy wiersz o numerze k pomnożony przez stałą α, tzn. gdy $\mathbf{A} \xrightarrow{w_k + w_l \alpha} \mathbf{A}^{(1)}$, czyli $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{E}_{kl}(\alpha) \cdot \mathbf{A}$, to
$$\det \mathbf{A}^{(1)} = \det \mathbf{E}_{kl}(\alpha) \cdot \det \mathbf{A} = 1 \cdot \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}.$$

Uwaga 8. Takie same własności wyznacznika istnieją dla działań elementarnych na kolumnach, ponieważ w tym wypadku np. $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_G$ skąd $\det \mathbf{A}^{(1)} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{E}_G$.

Zgodnie z twierdzeniem 1 istnieje taka macierz trójkątna górna, że
$$\mathbf{B} = \left(\prod_{n=1}^{N} \mathbf{E}_{G(n)} \right) \mathbf{A},$$
Z twierdzenia 2 wynika, że
$$\det(\mathbf{B}) = \left(\prod_{n=1}^{N} \det\left(\mathbf{E}_{G(n)}\right) \right) \det(\mathbf{A}),$$
a to oznacza, że
$$\det(\mathbf{A}) = \frac{\det(\mathbf{B})}{\prod\limits_{n=1}^{N} \det\left(\mathbf{E}_{G(n)}\right)}. \tag{15}$$
Fakt, że wyznacznik macierzy trójkątnej jest iloczynem elementów na przekątnej wraz z (14) oznacza, że łatwo znaleźć wyznacznik macierzy $\mathbf{A}$.

Przykład 9. Obliczmy wyznacznik macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

Proces Gaussa, którego celem jest przekształcenie danej macierzy do macierzy trójkątnej górnej przebiega w następujący sposób:
$$\mathbf{A} \xrightarrow[w_4 + w_1 \cdot (-2)]{w_2 + w_1 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 + w_2 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}$$
co oznacza, że
$$\mathbf{B} = \mathbf{E}_{42}(-1) \cdot \mathbf{E}_{23} \cdot \mathbf{E}_{41}(-2) \cdot \mathbf{E}_{21}(-1) \cdot \mathbf{A}.$$

Łatwo obliczyć, że $\det(\mathbf{B}) = 6$, bo macierz $\mathbf{B}$ jest trójkątna. Z tego, że

$$\det\left(\mathbf{E}_{42}(-1)\right) = \det\left(\mathbf{E}_{41}(-2)\right) = \det\left(\mathbf{E}_{21}(-1)\right) = 1, \qquad \text{oraz} \qquad \det\left(\mathbf{E}_{23}\right) = -1$$

wynika

$$\det(\mathbf{A}) = \frac{\det(\mathbf{B})}{\det\left(\mathbf{E}_{42}(-1)\right) \cdot \det\left(\mathbf{E}_{23}\right) \cdot \det\left(\mathbf{E}_{41}(-2)\right) \cdot \det\left(\mathbf{E}_{21}(-1)\right)} = -6$$

5.2. Odwracanie macierzy

Załóżmy, że macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą kwadratową, nieosobliwą. Z twierdzenia 1 wynika, że istnieje ciąg macierzy elementarnych $\mathbf{E}_{G(1)}, \ldots, \mathbf{E}_{G(N)}$, taki że

$$\mathbf{E} = \left(\prod_{n=1}^{N} \mathbf{E}_{G(n)}\right) \mathbf{A}, \tag{16}$$

gdzie $\mathbf{E}$ jest macierzą jednostkową. Czyli przeprowadzając proces eliminacji Gaussa, można przekształcić macierz $\mathbf{A}$ do macierzy jednostkowej $\mathbf{E}$.

Zgodnie z założeniem macierz $\mathbf{A}$ jest nieosobliwa, zatem istnieje do niej macierz odwrotna $\mathbf{A}^{-1}$. Zauważmy, że mnożąc prawe strony równanie (16) przez $\mathbf{A}^{-1}$, dostajemy

$$\mathbf{A}^{-1} = \prod_{n=1}^{N} \mathbf{E}_{G(n)}, \tag{17}$$

co oznacza, że macierz odwrotna jest iloczynem macierzy elementarnych Gaussa użytych w eliminacji (16).

Umówmy się, że przez macierz $[\mathbf{A} \vdots \mathbf{P}]$ o rozmiarze $n \times 2n$ rozumiemy macierz, której pierwsze n kolumn tworzą kolumny macierzy $\mathbf{A}$, a kolejne n, kolumny macierzy $\mathbf{P}$. Zapis $\mathbf{E}_G \cdot [\mathbf{A} \vdots \mathbf{P}]$ oznacza wymnożenie przez macierz $\mathbf{E}_G$ zarówno macierzy $\mathbf{A}$ jak i macierzy $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{E}_G \cdot [\mathbf{A} \vdots \mathbf{P}] = [\mathbf{E}_G \cdot \mathbf{A} \vdots \mathbf{E}_G \cdot \mathbf{P}].$$

Przeprowadzając proces eliminacji Gaussa na macierzy $\mathbf{A}$, możemy równocześnie przekształcać macierz jednostkową $\mathbf{E}$.

$$[\mathbf{A} \vdots \mathbf{E}] \longrightarrow \mathbf{E}_{G(1)} \cdot [\mathbf{A} \vdots \mathbf{E}] = [\mathbf{E}_{G(1)} \mathbf{A} \vdots \mathbf{E}_{G(1)} \mathbf{E}] \longrightarrow \mathbf{E}_{G(2)} \cdot [\mathbf{E}_{G(1)} \mathbf{A} \vdots \mathbf{E}_{G(1)} \mathbf{E}] = [\mathbf{E}_{G(2)} \mathbf{E}_{G(1)} \mathbf{A} \vdots \mathbf{E}_{G(2)} \mathbf{E}_{G(1)} \mathbf{E}] \longrightarrow \ldots$$
$$\longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathbf{E}_{G(N)} \cdot \left[\prod_{n=1}^{N-1} \mathbf{E}_{G(n)} \mathbf{A} \vdots \prod_{n=1}^{N-1} \mathbf{E}_{G(n)}\right] \longrightarrow \left[\prod_{n=1}^{N} \mathbf{E}_{G(n)} \mathbf{A} \vdots \prod_{n=1}^{N} \mathbf{E}_{G(n)}\right].$$

Co po uwzględnieniu (17) daje

$$\left[\prod_{n=1}^{N} \mathbf{E}_G \mathbf{A} \vdots \prod_{n=1}^{N} \mathbf{E}_G\right] = \left[\prod_{n=1}^{N} \mathbf{E}_G \mathbf{A} \vdots \mathbf{A}^{-1}\right] = [\mathbf{E} \vdots \mathbf{A}^{-1}]$$

i oznacza, że

$$[\mathbf{A} \vdots \mathbf{E}] \xrightarrow{\textit{elim. Gaussa}} [\mathbf{E} \vdots \mathbf{A}^{-1}].$$

Powyższe rozważania uzasadniają działanie, niezwykle wydajnego, algorytmu odwracania macierzy przy pomocy eliminacji Gaussa.

Przykład 10. Znaleźć macierz odwrotną do $\mathbf{A}$ i pokazać, że $\mathbf{A}^{-1} = \prod_{n=1}^{N} \mathbf{E}_{G(n)}$, dla ciągu macierzy elementarnych Gaussa $\left(\mathbf{E}_{G(n)}\right)$ odpowiadającego przeprowadzonej eliminacji.

$$[\mathbf{A} \vdots \mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_3 + w_1 \cdot (1)]{w_2 + w_1 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & \vdots & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_3 + w_2 \cdot (2)]{w_1 + w_2 \cdot (-1)}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_2 + w_3 \cdot (2)]{w_1 + w_3 \cdot (-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{E} \vdots \mathbf{A}^{-1}]$$

Powyższa eliminacja na wierszach zapisana przy pomocy macierzy elementarnych Gaussa ma postać:

$$\mathbf{E}_{23}(2) \cdot \mathbf{E}_{13}(-2) \cdot \mathbf{E}_{32}(2) \cdot \mathbf{E}_{12}(-1) \cdot \mathbf{E}_{31}(1) \cdot \mathbf{E}_{21}(-1) \cdot [\mathbf{A} \vdots \mathbf{E}] = [\mathbf{E} \vdots \mathbf{A}^{-1}]$$

Łatwo sprawdzić, że

$$\mathbf{E}_{23}(2) \cdot \mathbf{E}_{13}(-2) \cdot \mathbf{E}_{32}(2) \cdot \mathbf{E}_{12}(-1) \cdot \mathbf{E}_{31}(1) \cdot \mathbf{E}_{21}(-1) = \begin{bmatrix} 4 & -5 & -2 \\ -3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}$$

5.3. Wyznaczanie rzędu macierzy

W literaturze rząd macierzy definiowany jest na różne sposoby. Można powiedzieć, że macierz $\mathbf{A}$ jest rzędu k, co zapisujemy $r(\mathbf{A}) = k$, jeżeli istnieje chociaż jeden różny od zera wyznacznik stopnia k utworzony z elementów tej macierzy (przy czym elementy bierze się w tej kolejności, w jakiej są one rozmieszczone w danej macierzy), a wszystkie wyjęte z tej macierzy wyznaczniki stopnia wyższego niż k mają wartość zero.

Funkcjonuje też bardzo formalna definicja bazująca na przestrzeniach liniowych.

Definicja 1. *Rzędem macierzy nazywamy wymiar przestrzeni liniowej rozpiętej przez jej kolumny (lub wiersze), czyli przestrzeni składającej się z wszystkich możliwych do uzyskania kombinacji liniowych*[7] *kolumn (lub wierszy).*

Nie wchodząc w szczegóły algebry liniowej, powyższa definicja tak naprawdę oznacza, że rząd macierzy to maksymalna liczba liniowo niezależnych wektorów będących wierszami (lub kolumnami) macierzy $\mathbf{A}$. Przypomnijmy, że wiersze/kolumny macierzy są *liniowo niezależne*, jeśli żadnego/żadnej z nich nie można przedstawić jako kombinacji liniowej pozostałych.

[7] Wektor $\vec{x}$ jest kombinacją liniową kolumn (wektorów kolumnowych) $k_1, k_2, \ldots, k_n$ jeśli istnieją liczby rzeczywiste $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ takie, że $\vec{x} = \alpha_1 \cdot k_1 + \alpha_2 \cdot k_2 + \cdots + \alpha_n \cdot k_n$.

Przykład 11. W macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- liniowo niezależne są kolumny $\{k_1, k_2, k_4\}$, ale nie są $\{k_1, k_2, k_3\}$ bo $k_3 = (-3) \cdot k_1 + 3 \cdot k_2$ ani $\{k_3, k_4, k_5\}$ bo $k_5 = (-\frac{11}{3}) \cdot k_3 + 5 \cdot k_4$
- liniowo niezależne są wiersze $\{w_1, w_2, w_3\}$, ale nie są $\{w_1, w_4\}$ bo $w_4 = 0 \cdot w_1$.

Zauważmy, że liczbę liniowo niezależnych wierszy/kolumn łatwo znaleźć, jeśli macierz jest macierzą schodkową, bo liniowo niezależnych kolumn w macierzy $\mathbf{A}$ jest dokładnie tyle ile niezerowych wierszy. Twierdzenie 1 mówi, że w procesie Gaussa każdą macierz można sprowadzić do macierzy schodkowej. Jeśli więc wykażemy, że macierz $\prod_{n=1}^{N} \mathbf{E}_{G(n)}$ nie zmienia rzędu macierzy $\mathbf{A}$, to będzie oznaczało, że rząd macierzy $\mathbf{A}$ łatwo wyznaczymy na podstawie rzędu macierzy schodkowej uzyskanej w procesie eliminacji Gaussa $\mathbf{B} = \left(\prod_{n=1}^{N} \mathbf{E}_{G(n)} \right) \mathbf{A}$.

Zacznijmy od udowodnienia następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3. *Rząd macierzy* $\mathbf{A}$ *nie zmienia się, jeśli macierz ta jest mnożona przez macierz kwadratową odwracalną* $\mathbf{P}$ *(o rozmiarze umożliwiającym mnożenie), tzn.*

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{AP}) \qquad \text{oraz} \qquad r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{PA})$$

Dowód. Ponieważ rząd macierzy to wymiar przestrzeni liniowej rozpiętej przez jej kolumny (lub wiersze), udowodnimy, że $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{AP})$, co wynika z tego, że przestrzenie generowane przez kolumny macierzy $\mathbf{A}$ i macierzy $\mathbf{AP}$ są takie same (a więc mają taki sam wymiar).
Ustalmy, że macierz $\mathbf{A}$ ma rozmiar $m \times n$, a macierz odwracalna $\mathbf{P}$ rozmiar $n \times n$. Oznaczamy przez $\mathcal{S}$ przestrzeń generowaną przez kolumny macierzy $\mathbf{A}$. Dowolny wektor $\vec{s} \in \mathcal{S}$ można zapisać jako kombinację liniową kolumn macierzy $\mathbf{A}$:

$$\vec{s} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \vec{\alpha}$$

gdzie $\vec{\alpha}$ to wektor współczynników kombinacji liniowej wektora $\vec{s}$.
Ponieważ $\mathbf{P}$ jest macierzą odwracalną, jej wszystkie kolumny są liniowo niezależne i w konsekwencji przestrzeń przez nie generowana to $\mathbb{R}^n$. Można więc $\vec{\alpha}$ zapisać jako kombinację liniową kolumn macierzy $\mathbf{P}$:

$$\vec{\alpha} = \mathbf{P} \cdot \vec{\beta}$$

a to oznacza, że

$$\vec{s} = \mathbf{A} \cdot \vec{\alpha} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{P} \cdot \vec{\beta}) = (\mathbf{AP}) \cdot \vec{\beta}.$$

To zaś oznacza, że dowolny wektor $\vec{s} \in \mathcal{S}$ można zapisać jako liniową kombinację kolumn macierzy $\mathbf{AP}$.

Zauważmy ponadto, że kolumny $\mathbf{AP}$ nie generują żadnego wektora $\vec{s} \notin \mathcal{S}$. Dla dowolnego wektora współczynników $\vec{\gamma}$, z tego, że

$$\vec{s} = (\mathbf{AP}) \cdot \vec{\gamma} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{P} \cdot \vec{\gamma})$$

wynika, że $\vec{s} \in \mathcal{S}$ bo $\vec{s}$ jest kombinacją liniową kolumn macierzy $\mathbf{A}$ (ze współczynnikami $\mathbf{P} \cdot \vec{\gamma}$).

Udowodniliśmy więc, że przestrzeń rozpięta przez kolumny $\mathbf{A}$ i przestrzeń rozpięta przez kolumny $\mathbf{AP}$ pokrywają się. W konsekwencji również ich wymiary (które z definicji są równe rzędom $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$) są identyczne, tzn. $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{AP})$

Dowód faktu, że $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{PA})$ przeprowadza się analogicznie do powyższego, z tą tylko różnicą, że rozważamy kombinacje liniowe wierszy. $\square$

W twierdzeniu 3 ważnym założeniem jest to o odwracalności macierzy P. Wiemy jednak, że każda z macierzy elementarnych ma wyznacznik różny od zera, czyli jest odwracalna.

Wniosek 1. *Mnożenie macierzy* $\mathbf{A}$ *przez macierz elementarną nie zmienia rzędu macierzy.*

Uzasadnione jest więc twierdzenie, że

$$r(\mathbf{B}) = r\left(\left(\prod_{n=1}^{N} \mathbf{E}_{G(n)}\right)\mathbf{A}\right) = r(\mathbf{A})$$

i metoda określania rzędu macierzy na podstawie macierzy schodkowej uzyskanej w procesie Gaussa.

5.4. Rozwiązywanie układów równań liniowych

Z rozdziału powyżej wiemy, że operacje elementarnie nie zmieniają rzędu macierzy. Oznacza to, że proces Gaussa nie zmienia rzędu macierzy układu, a co za tym idzie, nie zmienia się liczba jego rozwiązań (gwarantuje to tw. Kroneckera-Capellego). Łatwo zauważyć, że w procesie eliminacji nie tylko nie zmienia się liczba rozwiązań, ale nie zmieniają się też same rozwiązania, ponieważ kolejne macierze w ciągu $(\mathbf{A}^{(0)}, \mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \ldots, \mathbf{A}^{(N)})$ reprezentują układy mające identyczne rozwiązanie. Wynika to z faktu, że jeżeli kolejne wiersze macierzy reprezentują kolejne równania układu równań, to działania elementarne na wierszach macierzy są tym samym, co przytoczone w 1. rozdziale operacje na równaniach tego układu. Działania wykonywane na równaniach nie zmieniają rozwiązania układu. Jeśli do reprezentacji układu równań wykorzystamy zapis macierzowy, to macierz schodkowa uzyskana na końcu procesu eliminacji Gaussa odpowiada układowi „schodkowemu" (o identycznym rozwiązaniu jak układ wyjściowy), który łatwo rozwiązać np. metodą podstawiania.

Wykorzystywanie procesu eliminacji Gaussa do rozwiązywania układu równań jest najbardziej naturalną i powszechnie stosowaną metodą opartą na operacjach elementarnych. Proces ten pojawia się już w szkole średniej, gdzie nazywany jest metodą przeciwnych współczynników.

Literatura

1. M. Białynicki-Birula, *Algebra liniowa z geometrią.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1976.
2. D. Poole, *Linear Algebra: A Modern Introduction.* (2nd ed.), Brooks/Cole, 2006.
3. H. Anton, *Elementary Linear Algebra (Applications Version)* (9th ed.), Wiley International 2005.