

## O TESTACH Z MATEMATYKI NA ZDALNEJ PLATFORMIE

Elżbieta GALEWSKA<sup>1</sup>, Dorota KRAWCZYK-STANĀDO<sup>2</sup>

1. Politechnika Łódzka, Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki  
tel.: 42 631 36 11 e-mail: elzbieta.galewska@p.lodz.pl
2. Politechnika Łódzka, Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki  
tel.: 42 631 36 11 e-mail: dorota.krawczyk-stando@p.lodz.pl

**Streszczenie:** Zaprezentujemy testy online z matematyki dla studentów kierunków technicznych utworzone w miejsce tradycyjnych kolokwium i egzaminów przeprowadzanych bezpośrednio na uczelni. Analiza poprawności rozwiązania zadań polega na sprawdzaniu kolejnych etapów przy pomocy różnego rodzaju pytań dostępnych na zdalnej platformie: jednokrotnego wyboru, wielokrotnego wyboru, prawda-falsz, dopasowanie, zagnieżdżone. Za wskazanie poprawnej odpowiedzi student otrzymuje punkty dodatnie, a za wybór odpowiedzi niepoprawnej punkty ujemne. Odpowiedzi niepoprawne są starannie dobrane na podstawie zaobserwowanych, często popełnianych błędów w tradycyjnych kolokwium. Testy cechuje zróżnicowany stopień trudności adekwatnie do złożoności rozpatrywanych problemów. Ze względu na dużą liczebność studentów i losowy wybór testów obszerna jest baza różnych wersji tego samego zadania.

**Słowa kluczowe:** testy online, zdalna platforma, matematyka na uczelniach technicznych.

### 1. WSTĘP

Wraz z początkiem pandemii COVID-19 oraz przejściem uczelni w tryb nauczania zdalnego wszyscy nauczyciele akademicy stanęli przed wieloma dylematami takimi jak: efektywny sposób przekazywania wiedzy, metody aktywizacji studentów, wspomaganie indywidualnej pracy studenta oraz sprawdzanie nabytych kompetencji zgodnie z założonymi efektami uczenia się. Specyfika nauczania matematyki w jej tradycyjnej kredowo-tablicowej postaci, jak i późniejszej weryfikacji umiejętności przy pomocy prac pisemnych wzbogaconych odpowiedziami ustnymi została skonfrontowana z cyfrowym światem [1, 2], w którym młodzież odnajduje się znakomicie. System szkoleń wdrożonych przez Politechnikę Łódzką od marca 2020 roku pozwolił pracownikom zrozumieć bogactwo metod, które można stosować przy kształceniu na odległość oraz zapoznać ich z technikami sprawdzania wiedzy studentów [3]. Z trudnościami opisanymi powyżej zmierzaliśmy się prowadząc zajęcia dla studentów budownictwa na Wydziale Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska Politechniki Łódzkiej.

Celem pracy jest zaprezentowanie nowego sposobu konstruowania i oceniania zadań testowych z matematyki na zdalnej platformie. Testy umożliwiają sprawdzenie umiejętności studentów w zakresie rozwiązywania zadań, zrozumienia wykładanych pojęć i metod oraz stopnia zaawansowania wiedzy. Okazało się to niełatwe w sytuacji, gdy piszący test mieli możliwość korzystania z zasobów

internetu, materiałów dydaktycznych udostępnianych w ramach zajęć oraz pracy grupowej na platformach internetowych. Dodatkowym utrudnieniem jest brak fachowej literatury dydaktycznej związanej z zadaniami testowymi z matematyki, zwłaszcza w zakresie matematyki wyższej wykładanej w ramach studiów akademickich. O ile w zakresie omawianym w szkole średniej można odnaleźć podręczniki oferujące bogactwo zadań testowych, o tyle pozycji związanych z nauczaniem matematyki w szkołach wyższych przy wykorzystaniu zadań testowych jest niewiele. Poniżej przedstawimy przykładowe testy utworzone na opartej na środowisku Moodle platformie e-learnigowej WIKAMP na Politechnice Łódzkiej, omówimy ich konstrukcję i sposób, w jaki były stosowane na zaliczeniach i egzaminach. Na koniec opiszemy pewne nasuwające się z naszych doświadczeń wnioski.

### 2. KONSTRUKCJA TESTÓW

Przygotowując testy i sprawdziany, tak w wersji tradycyjnej realizowane w budynku uczelni, jak i testy w wersji zdalnej należy kierować się celem stawianym studentowi oraz efektem weryfikacji wiedzy zamierzonym przez nauczyciela. Idealnie skomponowany sprawdzian powinien obejmować:

- badanie zrozumienia stosowanych metod (a zatem proste rachunkowo zadania sprawdzające stopień rozumienia i umiejętność stosowania wykładanych treści),
- badanie poziomu zaawansowania umiejętności matematycznych (zadania wymagające pomysłowości rachunkowej, badające umiejętność rozwiązywania bardziej złożonych problemów).

Zadanie mocno skomplikowane rachunkowo w rzeczywistości nie sprawdza umiejętności stosowania podstawowej metody przez studenta, a jedynie jego rachunkową biegłość. Przy dostępnych powszechnie bezpłatnych programach algebry symbolicznej (Octave, Scilab), czy też umożliwiających łatwą wizualizację badanych zagadnień geometrycznych (GeoGebra) akcent dawniej kładziony na umiejętności rachunkowe powinien być przesuwany ku kompetencjom poznawczym, szerszemu i głębszemu rozumieniu, znajomości stosowania metody. Stanowi to dodatkowe wyzwanie dla nauczyciela, który musi z jednej strony zachować wysoki akademicki poziom zajęć i zaliczeń, z drugiej natomiast musi uwzględnić potrzeby zmieniającego się świata i związanych z nimi zmieniających się kompetencji i umiejętności. Rozwiązaniem takich

dylematów może być proponowanie studentom zadań o różnym stopniu trudności. Student rozwiązując zadanie łatwiejsze uzyskuje potwierdzenie właściwego efektu uczenia się na ocenę dostateczną, a rozwiązując zadanie trudniejsze na ocenę wyższą. Pozwala to zarówno na uzyskanie potwierdzenia efektów uczenia się, jak i na docenienie wkładu pracy, umiejętności, zdolności bardziej zaangażowanych studentów.

Biorąc pod uwagę opisane wyżej uwarunkowania, brak publikacji dydaktycznych zawierających propozycje gotowych testów, utrudnione kontakty społeczne w dobie pandemii, ograniczenia naturalnie wynikające ze zdalnego sposobu kształcenia, postanowiłyśmy zastosować różne typy testów dostosowane do badanego zagadnienia i najlepiej do niego pasujące. Uznałyśmy, że na przykład inny powinien być testowy sposób weryfikacji umiejętności znajdowania ekstremów lokalnych, gdzie stosowana jest dość schematyczna technika rachunkowa, a inny przy badaniu zbieżności szeregów, gdzie spora część rozwiązania bazuje na dogłębnym rozumieniu badanych treści. Dlatego tworząc testy wykorzystaliśmy różne typy pytań [3,4]. Omówimy poniżej sposób ich konstrukcji opisując przesłanki, jakimi kierowałyśmy się dokonując takiego właśnie doboru.

### 3. TESTY WIELOKROTNEGO WYBORU

Zagadnienie konstrukcji testu zawierającego pytania wielokrotnego wyboru stawia przed nauczycielem wiele wyzwań:

- jak sformułować pytanie?
- jakie podawać odpowiedzi poprawne?
- jak dobierać odpowiedzi niepoprawne?
- co sprawdzają odpowiedzi niepoprawne?

Stosunkowo najłatwiejsze jest zagadnienie sformułowania zadania, a zaraz po nim podania odpowiedzi poprawnych. Inaczej rzecz się ma z odpowiedziami niepoprawnym. Tutaj przychodzi z pomocą nasze wieloletnie doświadczenie akademickie wynikające z prowadzenia zajęć z matematyki na różnych kierunkach i rodzajach studiów wyższych. Analiza kolokwii oraz egzaminów z czasów sprzed pandemii COVID-19 pozwoliła nam na znalezienie takich niepoprawnych odpowiedzi, których wykluczenie nie jest w naszej opinii możliwe przy jedynie pobieżnej analizie. Podobnie rzecz się ma z odpowiedziami poprawnymi - nie powinny być one oczywiste, ale raczej wymagające namysłu, obliczeń, znajomości omawianych treści, pogłębionej analizie wykładu i rozwiązania odpowiedniej porcji zadań.

Testy zostały podzielone na dwa stopnie trudności: łatwiejszy A i trudniejszy B, pozwalające na dokonanie weryfikacji efektów uczenia się oraz zróżnicowanie ocen. Wyzwania stojące przy konstrukcji testów na obu poziomach są zbliżone. W przypadku testu B trzeba uwzględnić stopień skomplikowania proponowanego zadania i zważyć jakiego typu umiejętności oczekuje się od studenta. Opisane wyżej zagadnienia ilustrujemy na przykładzie zadania testowego dotyczącego znajdowania ekstremów lokalnych w obu wariantach (rys. 1 i 2).

Sposób doboru odpowiedzi i tych poprawnych i tych niepoprawnych jest podobny. Oba przykłady różnią się jedynie stopniem trudności. Nie na wszystkie pytania można udzielić odpowiedzi posługując się (nieomawianymi na prowadzonych przez nas zajęciach) programami algebry komputerowej. Ze względu na prostotę metody badania

istnienia ekstremów lokalnych dla funkcji klasy  $C^2$  wydaje się, iż tak przyjęta forma testowania jest właściwa. Nie pojawiają się tu bowiem subtelności natury teoretycznej, a jedynie poprawne stosowanie wprowadzonego algorytmu i rozumienie jego zastosowania oraz założeń.

Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji  $f(x, y) = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$

Wybierz wszystkie poprawne:

- Funkcja  $f$  ma jeden punkt stacjonarny
- Funkcja  $f$  ma maksimum lokalne równe 13 w punkcie  $(4, -2)$
- $f'_x = 6 - 2x - 3y$
- $f''_{xx}(4, -2) = -1$
- Dziedzina funkcji jest  $\mathbb{R}$
- Punkty  $(12, -6)$ ,  $(4, -2)$  są punktami stacjonarnymi funkcji  $f$
- Funkcja  $f$  ma minimum lokalne w punkcie  $(12, -6)$
- $f'_y = -x - 2y$
- $W(4, -2) > 0$
- Funkcja  $f$  nie posiada ekstremów lokalnych
- $f''_{xy} = -1$
- $f''_{yy} = 2$

Rys. 1. Test wielokrotnego wyboru – wersja A

Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji  $f(x, y) = \ln(6 - x^2 - y) + y$

Wybierz wszystkie poprawne:

- Funkcja  $f$  ma maksimum lokalne równe 5 w punkcie  $(0, 5)$
- Funkcja  $f$  ma minimum lokalne w punkcie  $(-1, 4)$
- Funkcja  $f$  ma jeden punkt stacjonarny
- Dziedzina funkcji jest  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$
- $f'_y = \frac{5-x^2-y}{6-x^2-y}$
- $f'_x = \frac{1}{6-x^2-y}$
- Punkty  $(-1, 4)$ ,  $(0, 5)$  są punktami stacjonarnymi funkcji  $f$
- $f''_{xx}(0, 5) = -1$
- $f''_{xy} = \frac{-2x}{(6-x^2-y)^2}$
- $W(0, 5) > 0$
- $f''_{yy} = \frac{2y-2x^2-12}{(6-x^2-y)^2}$
- Funkcja  $f$  nie posiada ekstremów lokalnych

Rys. 2. Test wielokrotnego wyboru – wersja B

### 4. TESTY ZAGNIEŹDZONE

Innym typem testu jest test zawierający pytania zagnieżdżone. Warto stosować go wszędzie tam, gdzie znanemu algorytmowi rozwiązania towarzyszy pogłębiona analiza teoretyczna. Z takimi zagadnieniami studenci mają najczęściej spore trudności wynikające po części z braku umiejętności rozumienia zapisu matematycznego, a po części z nawyku rozwiązywania zadań w sposób algorytmiczny, bez sprawdzania poprawności stosowanej metody, weryfikacji założeń, opisu i konkluzji. Test zagnieżdżony pozwala pewne luki, wzmiankowane powyżej, uzupełnić i wykształcić w studentach innego typu umiejętności niż opisywane w poprzednim paragrafie.

Testy zagnieżdżone zaproponowałyśmy przy okazji sprawdzania nabytych przez studentów umiejętności związanych z badaniem obszaru i promienia zbieżności szeregu potęgowego. Wymaga to łączenia różnych pozornie prostych technik. Z doświadczeń dydaktycznych wynika, że studenci w przypadku takich zadań stosowali szczątkowe opisy, co mogło sugerować niepełne zrozumienie omawianych treści programowych.

Wyznaczyć promień, przedział i obszar zbieżności szeregu potęgowego (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{7n+8}$

**Rozwiązanie**

Przyjmijmy: a)  $(-1)^n \frac{x^n}{7n+8}$  b)  $\frac{x^n}{7n+8}$  c)  $(-1)^n \frac{1}{7n+8}$  d)  $\frac{1}{7n+8}$

• zgodnie z twierdzeniem d'Alemberta obliczamy granicę  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ , gdzie  $a_n =$

Przyjmijmy: e)  $\infty$  f) 7 g) 1 h)  $\frac{1}{7}$  i) 0

• granica  $g$  równa się

• promień zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy

Przyjmijmy: j)  $\{0\}$  k)  $(-\frac{1}{7}, \frac{1}{7})$  l)  $(-1, 1)$  m)  $(-7, 7)$  n)  $(-\infty, +\infty)$

• przedział zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy

Badamy zbieżność szeregu potęgowego (1) na krańcach przedziału zbieżności

• dla  $x =$  "lewy kraniec" otrzymujemy

szereg liczbowy  na podstawie

• dla  $x =$  "prawy kraniec" otrzymujemy

szereg liczbowy  na podstawie

Przyjmijmy: aa)  $\{0\}$  bb)  $(-\frac{1}{7}, \frac{1}{7})$  cc)  $(-\frac{1}{7}, \frac{1}{7})$  dd)  $(-\frac{1}{7}, \frac{1}{7})$  ee)  $(-\frac{1}{7}, \frac{1}{7})$  ff)  $(-7, 7)$  gg)  $(-7, 7)$  hh)  $(-7, 7)$  ii)  $(-7, 7)$  jj)  $(-1, 1)$  kk)  $(-1, 1)$  ll)  $(-1, 1)$

warunku koniecznego zbieżności szeregu  
kryterium d'Alemberta  
kryterium Cauchy'ego  
kryterium Leibniza

• obszar zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy

Rys. 3. Test zagnieżdżony – wersja A

Wyznaczyć promień, przedział i obszar zbieżności szeregu potęgowego (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-4x)^n}{2^n \cdot n^5}$

**Rozwiązanie**

• Podstawiając  $t = 3 - 4x$  otrzymujemy szereg potęgowy (3) postaci , gdzie

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^n \cdot n^5}$  b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^n \cdot n^5}$  c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^n n^5$  d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^5}$

Badamy zbieżność szeregu potęgowego (3)

Przyjmijmy: e)  $\frac{t^n}{2^n \cdot n^5}$  f)  $2^n \cdot n^5$  g)  $\frac{1}{2^n \cdot n^5}$  h)  $\frac{1}{n^5}$

• zgodnie z twierdzeniem Cauchy'ego-Hadamarda obliczamy granicę  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ , gdzie  $a_n =$

Przyjmijmy: i) 0 j)  $\frac{1}{2}$  k) 1 l) 2 m)  $\infty$

• granica  $g$  równa się

• promień zbieżności szeregu potęgowego (3) jest równy

Przyjmijmy: n)  $(-\infty, +\infty)$  o)  $(-2, 2)$  p)  $(-1, 1)$  r)  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  s)  $\{0\}$

• przedział zbieżności szeregu potęgowego (3) jest równy

Badamy zbieżność szeregu potęgowego (3) na krańcach przedziału zbieżności

• dla  $t =$  "lewy kraniec" otrzymujemy

szereg liczbowy  na podstawie

• dla  $t =$  "prawy kraniec" otrzymujemy

szereg liczbowy  na podstawie

Przyjmijmy: aa)  $(-\infty, +\infty)$  bb)  $(-2, 2)$  cc)  $(-2, 2)$  dd)  $(-2, 2)$  ee)  $(-2, 2)$  ff)  $(-1, 1)$  gg)  $(-1, 1)$  hh)  $(-1, 1)$  ii)  $(-1, 1)$  jj)  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  kk)  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  ll)  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  mm)  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  nn)  $\{0\}$

• obszar zbieżności szeregu potęgowego (3) jest równy

Powracamy do podstawienia i szeregu potęgowego (2)

Przyjmijmy: AA)  $(-\infty, +\infty)$  BB)  $(-2, 2)$  CC)  $(-2, 2)$  DD)  $(-2, 2)$  EE)  $(-2, 2)$  FF)  $(-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4})$

GG)  $(-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4})$  HH)  $(-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4})$  II)  $(-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4})$  JJ)  $(\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$  KK)  $(\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$  LL)  $(\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$  MM)  $(\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$  NN)  $\{0\}$

• obszar zbieżności szeregu potęgowego (2) jest równy

• przedział zbieżności szeregu potęgowego (2) jest równy

Przyjmijmy: O) 0 P)  $\frac{3}{4}$  R)  $\frac{1}{2}$  S) 1 T) 2 U)  $\infty$

• promień zbieżności szeregu potęgowego (2) jest równy

Rys. 4. Test zagnieżdżony – wersja B

Dlatego do badania umiejętności studentów związanych z szeregami potęgowymi wybrałyśmy testy zagnieżdżone (rys. 3 i rys. 4). Podobnie jak poprzednio zastosowałyśmy dwa stopnie trudności, uwzględniając tym razem nie tyle stopień skomplikowania rachunkowego, co aspekt stosowalności i różnorodności podejść do rozważanego zagadnienia.

## 5. TESTY NA DOPASOWANIE

Test, w którym występują pytania na dopasowanie, polega na łączeniu w pary pytań składowych z odpowiedziami cząstkowymi wybieranymi z rozwijalnej listy. Aby utrudnić takie parowanie można zamieścić dodatkowe błędne odpowiedzi. W teście należy dokonać kilku połączeń i każde takie dopasowanie ma automatycznie przydzielaną liczbę punktów proporcjonalnie rozdzielonych w zależności od ilości pytań. Tego typu test był przez nas stosowany do sprawdzania zadań z łatwiejszej kategorii (rys. 5).

Obliczyć masę obszaru  $D$  ograniczonego prostymi:  $y = \frac{1}{2}x$ ,  $y = x - 3$ ,  $y = 1$ , jeżeli jego gęstość powierzchniowa  $\rho(x, y) = 6y$ .

**PRZYJMujemy:**

a) podwójnej po obszarze  $D$  b) potrójnej po obszarze  $D$  c)  $OX$  d)  $OY$   
e) 1 f) 2 g) 3 h) 4 i) 6 j) 20 k) inna odpowiedź l)  $x$  m)  $\frac{1}{2}x$  n)  $2y$  o)  $x - 3$  p)  $y + 3$  q)  $6(-y^2 + 3y)$  r)  $6(-y + 3)$

• masę płaskiego obszaru  $D$  obliczamy za pomocą całki

• obszar  $D$  zapisujemy jako normalny względem osi

• oznacza to, że  $x \geq$

• oznacza to, że  $x \leq$

• oznacza to, że  $y \geq$

• oznacza to, że  $y \leq$

• zewnętrzną całką jest całka po zmiennej

• po obliczeniu całki wewnętrznej otrzymujemy

całkę pojedynczą oznaczoną z funkcji

• ostatecznie masa obszaru  $D$  wynosi

Wybierz...

Wybierz...

Wybierz...

a  
o  
j  
i  
m  
g  
i  
k  
h  
ł  
r  
l  
p  
e  
d  
b  
n  
f  
q  
c

Rys. 5. Test na dopasowanie – wersja A

Ponieważ procentowa ocena przydzielana jest przez platformę automatycznie, nie mamy możliwości niezaliczenia zadania natychmiast w przypadku popełnienia poważnego błędu. Dlatego też do sprawdzania zadań z trudniejszej kategorii najczęściej stosowane były pytania wielokrotnego wyboru. Pozwalały one na przydzielanie punktów dodatnich i ujemnych zgodnie z intencją autora zadania. Dzięki temu możliwe było wystawianie oceny za zadanie śledząc etapy rozwiązania tak, jakby odbywało się to na tradycyjnym kolokwium. W przypadku wybrania odpowiedzi zawierającej poważny błąd przyznawanych było tyle punktów ujemnych, że zadanie nie zostało zaliczone. Odpowiedzi niepoprawne dobierane były na podstawie typowych błędów popełnianych w tradycyjnych kolokwium takich, jak brak Jakobianu, czy niepoprawne granice całkowania przy obliczaniu całki podwójnej (rys. 6).

Obliczyć objętość bryły  $V$  ograniczonej powierzchniami:  $z = 2$ ,  $z = -3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $x^2 + y^2 + 2y = 0$

Wybierz wszystkie poprawne:

- objętość bryły  $V$  wynosi:  $|V| = 20 + \pi$
- po dokonaniu zamiany zmiennych otrzymujemy:  $0 \leq \phi \leq 2\pi$
- objętość bryły  $V$  wynosi:  $|V| = 5\pi + \frac{32}{9}$
- objętość bryły  $V$  wskazanej w zadaniu wyznaczmy ze wzoru  $|V| = \iint_D (f_2(x, y) - f_1(x, y)) dx dy$   
 $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \wedge f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$
- po dokonaniu zamiany zmiennych otrzymujemy:  $\pi \leq \phi \leq 2\pi$
- objętość bryły  $V$  wskazanej w zadaniu wyznaczmy ze wzoru  $|V| = \iint_D (f_1(x, z) - f_2(x, z)) dx dz$   
 $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in D \wedge f_1(x, z) \leq y \leq f_2(x, z)\}$
- po dokonaniu zamiany zmiennych otrzymujemy:  $0 \leq r \leq 1$
- objętość bryły  $V$  wskazanej w zadaniu wyznaczmy ze wzoru  $|V| = \iint_D (f_2(x, z) - f_1(x, z)) dx dz$   
 $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in D \wedge f_1(x, z) \leq y \leq f_2(x, z)\}$
- po obliczeniu całki wewnętrznej otrzymujemy całkę pojedynczą z funkcji:  $-\frac{8}{3} \sin^3 \phi$
- po dokonaniu zamiany zmiennych otrzymujemy:  $|V| = \iint_{\Delta} (5r + r^2) dr d\phi$
- po obliczeniu całki wewnętrznej otrzymujemy całkę pojedynczą z funkcji:  $10 \sin^2 \phi - \frac{8}{3} \sin^3 \phi$
- po dokonaniu zamiany zmiennych otrzymujemy:  $-2 \sin \phi \leq r \leq 0$
- po dokonaniu zamiany zmiennych otrzymujemy:  $|V| = \iint_{\Delta} (5 + r) dr d\phi$
- po dokonaniu zamiany zmiennych otrzymujemy:  $0 \leq r \leq -2 \sin \phi$

Rys. 6. Test wielokrotnego wyboru – wersja B

## 6. PREZENTACJA WYNIKÓW TESTÓW I INFORMACJA ZWROTNA

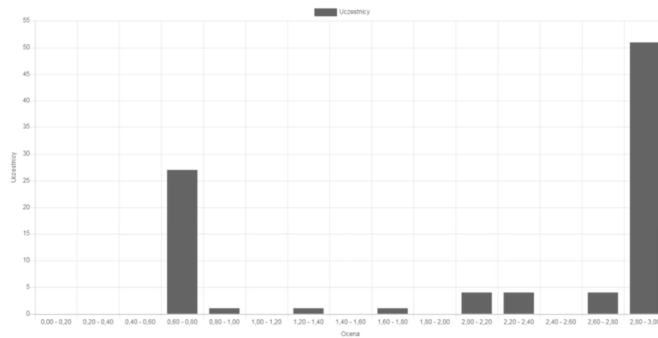
Po przeprowadzonym teście nauczyciel otrzymuje dane o uczestnikach takie, jak: imię i nazwisko, nr indeksu, stan zadania, data i godzina rozpoczęcia i zakończenia testu, czas wykonania, ocena, w postaci tabeli, której fragment przedstawiono na rysunku 7. Dane uczestników można posortować według dowolnie ustalonej kategorii. Na rysunku 7 jest to czas wykonania testu.

<input type="checkbox"/>	Tytuł / Imię / Nazwisko	Indeks	Stan	Rozpoczęto	Zakończono	Czas wykonania	Ocena/5,00
<input type="checkbox"/>	S Przegląd podejścia	2	Ukończone	30 kwietnia 2021 14:15	30 kwietnia 2021 14:44	29 min. 21 sek.	5,00
<input type="checkbox"/>	R Przegląd podejścia	2	Ukończone	30 kwietnia 2021 14:15	30 kwietnia 2021 14:44	29 min. 17 sek.	1,57
<input type="checkbox"/>	K Przegląd podejścia	2	Ukończone	30 kwietnia 2021 14:15	30 kwietnia 2021 14:44	28 min. 58 sek.	5,00
<input type="checkbox"/>	J Przegląd podejścia	2	Ukończone	30 kwietnia 2021 14:15	30 kwietnia 2021 14:44	28 min. 55 sek.	4,29
<input type="checkbox"/>	S Przegląd podejścia	2	Ukończone	30 kwietnia 2021 14:16	30 kwietnia 2021 14:45	28 min. 49 sek.	0,86
<input type="checkbox"/>	M Przegląd podejścia	2	Ukończone	30 kwietnia 2021 14:16	30 kwietnia 2021 14:44	28 min. 3 sek.	3,29
<input type="checkbox"/>	Z Przegląd podejścia	2	Ukończone	30 kwietnia 2021 14:15	30 kwietnia 2021 14:43	27 min. 21 sek.	5,00
<input type="checkbox"/>	P Przegląd podejścia	2	Ukończone	30 kwietnia 2021 14:15	30 kwietnia 2021 14:42	26 min. 55 sek.	4,29

Rys. 7. Tabela wyników widoczna dla nauczyciela

Dane ilustrowane są też na widocznym dla nauczyciela wykresie słupkowym (rys. 8).

Zaletą przeprowadzania zaliczeń i egzaminów w formie takich testów online są obiektywność oceny oraz możliwość przedstawienia studentom informacji o wynikach, błędach i poprawnych rozwiązaniach bezpośrednio po zamknięciu testów. Autorzy testów poprzez zmianę ustawień quizu mogą kontrolować widoczność informacji zwrotnej studenta. W naszych testach dla studenta dostępne były: ogólne dane, sprawdzone rozwiązanie zadania, ocena, poprawne odpowiedzi (rys. 9).



Rys. 8. Wykres słupkowy wyników widoczny dla nauczyciela

J	
Rozpoczęto	piątek, 30 kwietnia 2021, 14:15
Stan	Ukończone
Ukończono	piątek, 30 kwietnia 2021, 14:44
Wykorzystany czas	28 min. 55 sek.
Ocena	4,29 pkt. na 5,00 pkt. możliwych do uzyskania (86%)
Informacja zwrotna	Zadanie 1B zostało zaliczone. OCENA 4,5

**Zadanie 1B**  
Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji  $f(x, y) = \ln(6 - x^2 - y) + y$

Wybierz wszystkie poprawne:

- Funkcja  $f$  ma maksimum lokalne równe 5 w punkcie  $(0, 5)$
- Dziedzina funkcji jest  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$
- Funkcja  $f$  ma minimum lokalne w punkcie  $(-1, 4)$
- $f''_{xx} = \frac{-2x}{(6-x^2-y)^2}$
- $f''_{yy} = \frac{2y-2x^2-12}{(6-x^2-y)^2}$
- $f''_{zz} = \frac{1}{6-x^2-y}$
- Funkcja  $f$  ma jeden punkt stacjonarny
- $f''_{xx}(0, 5) = -1$
- Funkcja  $f$  nie posiada ekstremów lokalnych
- Punkty  $(-1, 4)$ ,  $(0, 5)$  są punktami stacjonarnymi funkcji  $f$
- $f''_{yy} = \frac{5-x^2-y}{6-x^2-y}$
- $W(0, 5) > 0$

Twoja odpowiedź jest częściowo poprawna.  
Wybrałeś zbyt wiele opcji.  
Prawidłowymi odpowiedziami są:  $f''_{yy} = \frac{5-x^2-y}{6-x^2-y}$   
, Funkcja  $f$  ma jeden punkt stacjonarny  
,  $f''_{xx} = \frac{-2x}{(6-x^2-y)^2}$   
,  $W(0, 5) > 0$   
, Funkcja  $f$  ma maksimum lokalne równe 5 w punkcie  $(0, 5)$

Rys. 9. Informacja zwrotna dla studenta.

## 7. WNIOSKI KOŃCOWE

Platforma e-learningowa WIKAMP, na której testy są realizowane, umożliwia losową kolejność pytań oraz losową kolejność odpowiedzi. Stąd istnieje wiele możliwych wariantów tego samego zadania. Samo przygotowanie zadań testowych dla celów zdalnego nauczania konsoliduje zespół wykładowców, pogłębia jego współpracę, inspirowanie wymianę doświadczeń pedagogicznych. Tworzenie testów służy też poszerzaniu dostępnej bazy zadań i materiałów możliwych do wykorzystania w pracy z kolejnymi rocznikami studentów [1,2]. Natychmiastowa informacja zwrotna z punktu widzenia studenta jest bardzo korzystna. Pozwala bowiem na zwrócenie uwagi na zaobserwowane niedociągnięcia oraz zagadnienia wymagające poprawy.

Przedstawione testy online świetnie sprawdziły się w okresie zdalnego trybu nauczania. Oceny studentów były porównywalne z wynikami tradycyjnych kolokwium w latach ubiegłych. Podobnie rozkładał się również wybór studentów między wersją łatwiejszą A i trudniejszą B w poszczególnych zadaniach. Z pewnością tego typu testy

zostaną przez nas wykorzystane również w warunkach nauki bezpośredniej, czy też w trybie hybrydowym.

## 5. BIBLIOGRAFIA

1. Tadeusiewicz R.: E-learning na uczelniach. Koncepcje, organizacja, wdrażanie. PWN, Warszawa 2021.
2. Mokwa-Tarnowska, I.: E-learning i blended learning w nauczaniu akademickim: Zagadnienia metodyczne,

Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk, s. 77-156, 2015.

3. WIKAMP samouczki i nagrania webinaryjnych szkoleń <https://edu.p.lodz.pl/course/view.php?id=39>.
4. Łapińska M., Niewulis A.: Tworzenie testów z matematyki z wykorzystaniem platformy Nauczanie, Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk, Nr 65, s. 59-63, 2019.

## ON MATHEMATICAL TESTS ON ONLINE PLATFORM

We present online mathematical tests for engineering students devised as a replacement of regular in-class exams. When the correctness of solution is being analysed the consequent steps are checked via various types of questions available on a platform: single choice, multiple choice, true-false, matching and finally embedded questions. When the correct answer is entered the relevant number of points is added to the final score, while when the student enters incorrect answer he loses a relevant number of points. The incorrect answers are diligently worked out based on typical errors performed by students during in-class exams. Tests consist of problems with diverse complexity due to the type of problems considered. Due to a considerable number of students and random selections of questions in each test, every single question in each test has many different versions.

**Keywords:** online tests, online platform, mathematics for engineering.