

Leszek Majkut

# Analiza teoretyczna zjawiska koincydencji i częstości krytycznych paneli akustycznych

JEL: L96 DOI: 10.24136/atest.2018.449

Data zgłoszenia: 19.11.2018 Data akceptacji: 15.12.2018

W pracy opisano zjawisko koincydencji oraz podano uproszczone wzory teoretyczne pozwalające na wyznaczenie częstości krytycznej, nierozzerwalnie związanej ze zjawiskiem koincydencji. Zrozumienie zjawiska koincydencji oraz znajomość częstości krytycznej są niezbędne przy analizie dynamiki każdego panelu, który jest lub może być pobudzany falą akustyczną. W pracy wyprowadzono zależności pozwalające na wyznaczenie częstości krytycznej w przypadkach gdy panel modelowany jest jako płyta cienka (model Kirchhoffa-Love'a) i płyta gruba (model Mindlina – Reissnera). Zaprezentowano przebiegi zmian wartości częstości krytycznej w funkcji grubości panelu dla różnych materiałów często wykorzystywanych na konstrukcje obudów izolacyjnych maszyn (izolacja od hałasu maszyn).

**Słowa kluczowe:** izolacyjność akustyczna, koincydencja, modelowanie, częstość krytyczna.

## Wstęp

Zrozumienie zjawiska koincydencji oraz znajomość częstości krytycznej są niezbędne przy analizie dynamiki każdego panelu, który jest lub może być pobudzany falą akustyczną. Ze względu na zainteresowania autora praca ograniczona jest do paneli, które są częściami obudów izolacji akustycznej maszyn i/lub urządzeń. Zastosowanie jakiegokolwiek tego typu obudowy spowoduje zmniejszenie energii akustycznej (hałas emitowanej przez maszynę). Własność materiału, która opisuje to zmniejszenie oraz jej wartość w funkcji częstości wymuszenia nazywa się izolacyjnością akustyczną. Niestety w pewnym zakresie częstości i konkretnych kątów padania fali akustycznej następuje znaczne zmniejszenie izolacyjności akustycznej [6] (dla konkretnej jednej częstości i kąta padania fali izolacyjność akustyczna jest równa zero tj. układ zachowuje się tak jakby nie było żadnej obudowy). To zjawisko obniżenia izolacyjności akustycznej panelu nosi nazwę zjawiska koincydencji. Zjawisko to związane jest bezpośrednio z częstością krytyczną  $f_c$ . W pracy wyznaczono częstości krytyczne sześciu różnych materiałów stosowanych w konstrukcjach obudów izolacyjnych modelując panel (jedną płaską ścianę obudowy) jako płytę cienką (model Kirchhoffa-Love'a) i płytę grubą (model Mindlina – Reissnera). Wynika analizy zaprezentowano w postaci charakterystyk zmian częstości krytycznej w funkcji grubości panelu.

## 1. Częstość krytyczna

W przypadku gdy element mechaniczny np. panel jest pobudzany do drgań poprzez falę akustyczną wystąpić może zjawisko koincydencji. Zjawisko to można porównać do zjawiska rezonansu w układzie mechanicznym (należy tylko pamiętać, że zjawisko koincydencji zależy również do kąta padania fali, o czym dalej), a odpowiednikiem częstości rezonansowej jest częstość krytyczna  $f_c$ .

Częstość krytyczna to taka częstość drgań dla której prędkość drgań giętych panelu (w odróżnieniu od fali wzdłużnej

prędkość fali giętej zależy od częstości drgań) jest równa prędkości fali akustycznej wymuszającej drgania tego panelu. Jest to również teoretycznie największa wartość częstości koincydencji tj. dla fali padającej pod kątem prostym w stosunku do panelu. Tą wartość należy nazwać teoretyczną ponieważ przy fali padającej prostopadle do panelu zjawisko koincydencji nie występuje.

Znajomość częstości krytycznej jest szczególnie istotna w przypadku analizy promieniowania dźwięku przez panel pobudzony do drgań przez falę akustyczną, czyli w przypadkach konstrukcji obudów dźwiękoizolacyjnych maszyn i urządzeń oraz innych barier i ekranów akustycznych. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe dźwięku, który jest promieniowany przez panel zależy od tego czy częstość wymuszającej fali akustycznej jest większa czy mniejsza od częstości krytycznej.

### 1.1. Panel modelowany jako płyta cienka

W tym punkcie pracy wyznaczono częstość krytyczną panelu modelowanego jako płyta cienka. Drgania własne takiej płyty opisane są równaniem Kirchhoffa-Love'a w postaci:

$$\nabla^4 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

gdzie:

$D$  - sztywność płytowa

$\rho$  - gęstość materiału przegrody

$h$  - grubość płyty (przegrody)

Przyjmując rozwiązanie równania (1) w postaci:

$$w(x, y, t) = W e^{i\omega t - k_x x - k_y y} \quad (2)$$

gdzie:

$k_x^2 + k_y^2 = k^2$ ,  $k$  to liczba falowa, a  $k_x$  i  $k_y$  to jej składowe na kierunkach odpowiednio  $x$  i  $y$

Liczba falowa odpowiadająca częstości  $\omega$  zdefiniowana jest zależnością:

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (3)$$

gdzie:

$k$  – liczba falowa

$\omega$  – częstość akustycznej fali wymuszającej

$c$  – prędkość fali akustycznej

Liczba falowa jest miarą liczby fal (pełnych sinusów) w jednostce długości analizowanego obszaru.

Wstawiając rozwiązanie (2) do równania (1) otrzymuje się:

$$k_x^4 + 2k_x^2 k_y^2 + k_y^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D} \quad (4)$$

stąd:

$$k^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D} \quad (5)$$

Z równania (5) wyznaczyć można prędkość fali giętej w panelu, który modelowany jest jako płyta cienka:

$$c_b^4 = \frac{\omega^2 D}{\rho h} \quad (6)$$

Z definicji częstotliwości krytycznej wynika, że prędkości fali akustycznej jest równa prędkości fali giętej [5]:

$$c_b = c \quad (7)$$

stąd częstotliwość krytyczną wyznacza się z zależności:

$$f_c = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} c^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (8)$$

W literaturze można również znaleźć wartość częstotliwości krytycznej w funkcji prędkości drgań wzdłużnych  $c_l$  w postaci [1,4]:

$$f_c = \frac{64000}{c_l h} \quad (9)$$

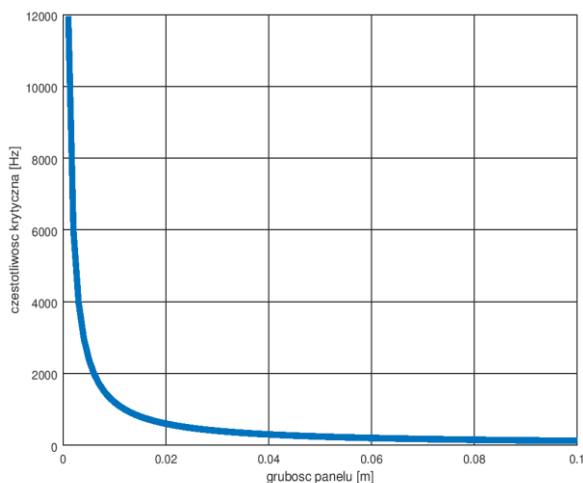
gdzie:

$c_l$  – prędkość fali wzdłużnej  $c_l = E / \rho$

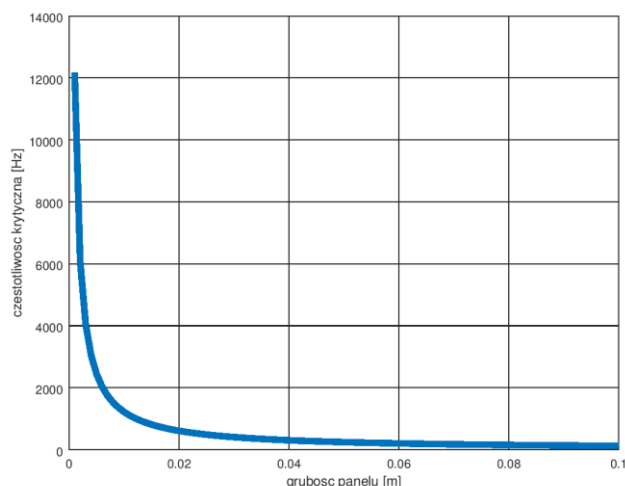
$h$  – grubość płyty (analizowanego panelu)

Wzory (8) i (9) jednoznacznie wskazują, że częstotliwość krytyczna jest funkcją stałych materiałowych i grubości panelu.

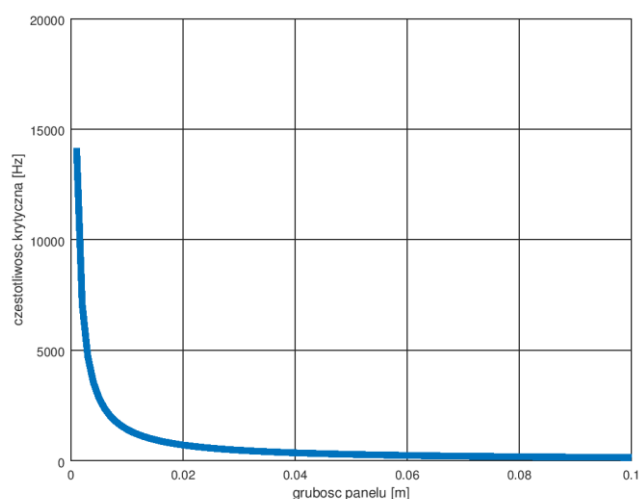
Na rys 1-4 przedstawiono zmiany częstotliwości krytycznej w funkcji grubości panelu dla 4 różnych materiałów wykorzystywanych do konstrukcji obudów maszyn i urządzeń. Dane materiałowe zaczerpnięto z pracy [7].



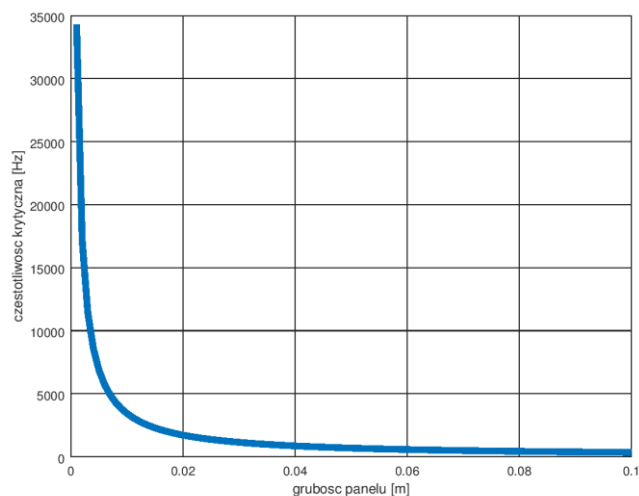
**Rys. 1.** Zmiana częstotliwości krytycznej w funkcji grubości panelu wykonanego ze stali



**Rys. 2.** Zmiana częstotliwości krytycznej w funkcji grubości panelu wykonanego z aluminium



**Rys. 3.** Zmiana częstotliwości krytycznej w funkcji grubości panelu wykonanego z betonu



**Rys. 4.** Zmiana częstotliwości krytycznej w funkcji grubości panelu wykonanego z plexiglassu

### 1.2. Panel modelowany jako płyta gruba

Przegrodę modelować można również jako płytę grubą czyli wykorzystać model Mindlina – Reissnera, w którym uwzględnia się dodatkowo naprężenia styczne i odkształcenia postaciowe. Dynamiczne równanie ruchu takiej płyty ma postać:

$$\nabla^4 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho h}{G} \frac{\partial^2 (\nabla^2 w)}{\partial t^2} = \Delta p \quad (10)$$

gdzie: G - moduł Kirchhoffa, pozostałe oznaczenia jak wyżej.

Wykorzystując rozwiązanie równania (10) w takiej samej postaci jak dla płyty cienkiej czyli:

$$w(x, y, t) = We^{i\omega t - k_x x - k_y y} \quad (11)$$

gdzie:

$k_x^2 + k_y^2 = k^2$ , k to liczba falowa, a  $k_x$  i  $k_y$  to jej składowe na kierunkach odpowiednio x i y

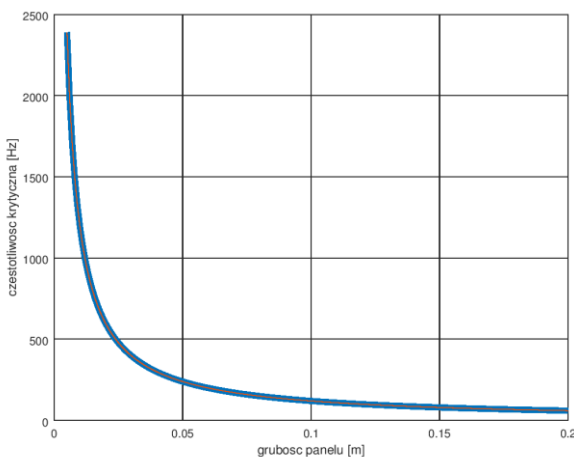
wyznaczyć można prędkość fali giętej w płycie modelowanej równaniami Mindlina – Reissnera. Prędkość dana jest zależnością:

$$c_b^2 = \frac{2G}{\rho h \left( \rho^2 h^2 + \sqrt{4\rho h G^2 / \omega^2 D} \right)} \quad (12)$$

Częstotliwość krytyczną wyznaczyć można z zależności:

$$f_c = \sqrt{\frac{c^4 \rho h}{2\pi D}} \sqrt{\frac{1}{1 - c^2 \rho h / G}} \quad (13)$$

Na rys 5-8 przedstawiono zmiany częstotliwości krytycznej w funkcji grubości panelu dla 6 różnych materiałów wykorzystywanych do konstrukcji obudów maszyn i urządzeń.



Rys. 5. Zmiana częstotliwości krytycznej w funkcji grubości panelu wykonanego ze stali

### 2. Zjawisko koincydencji

Zjawisko koincydencji występuje wtedy, gdy prędkość fali giętej w płycie (panelu) jest równa składowej równoległej do powierzchni płyty prędkości fali dźwiękowej padającej na płytę pod kątem  $\theta$ , jak to pokazano na rys.9.

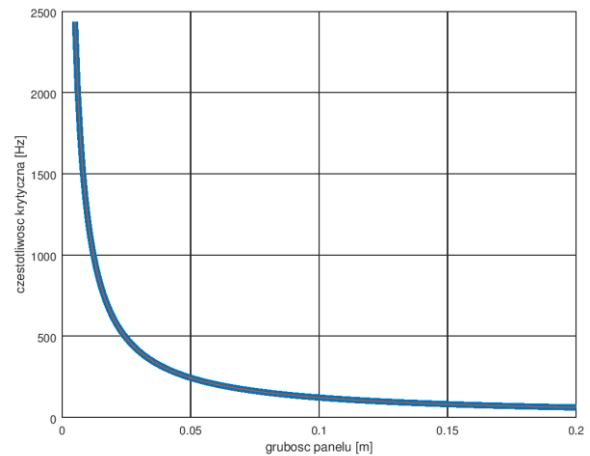
Zjawisko koincydencji występuje więc pod warunkiem, że:

$$\sin(\theta) = \frac{\lambda}{\lambda_b} \quad (14)$$

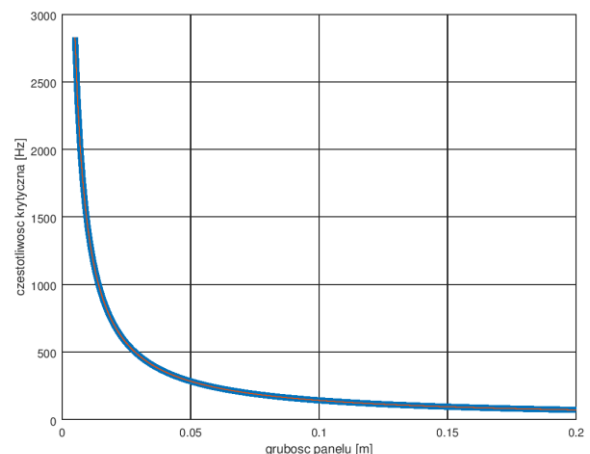
gdzie:

$\lambda$  – długość fali w powietrzu

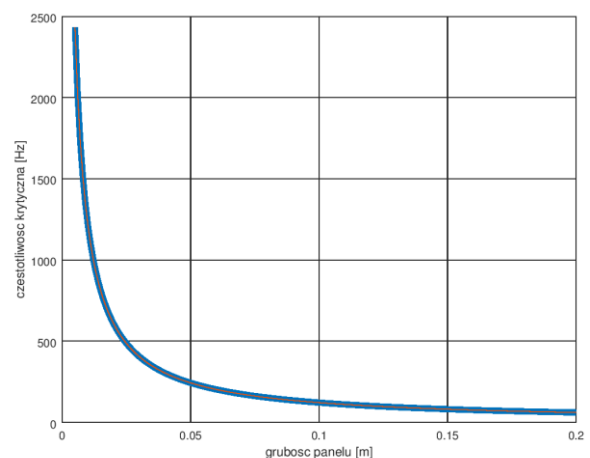
$\lambda_b$  – długość fali giętej w analizowanym panelu.



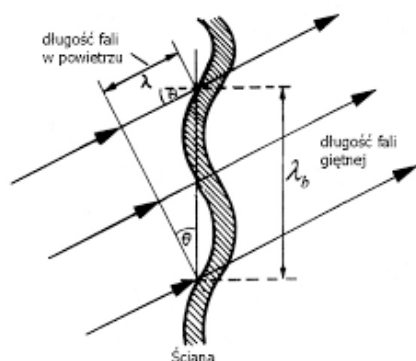
Rys. 6. Zmiana częstotliwości krytycznej w funkcji grubości panelu wykonanego z aluminium



Rys. 7. Zmiana częstotliwości krytycznej w funkcji grubości panelu wykonanego z betonu



Rys. 8. Zmiana częstotliwości krytycznej w funkcji grubości panelu wykonanego ze szkła kszemowego



**Rys. 9.** Schematycznie objasnienie zjawiska koincydencji

Wynika stąd, że dla pewnej częstotliwości i przy określonym kącie padania drgania gięte panelu są wzmacniane i energia akustyczna będzie transmitowana przez ten panel prawie bez tłumienia. Innymi słowy dla tej częstotliwości i kąta padania fali (zależność opisana równaniem (14)) izolacyjność akustyczna panelu (obudowy, bariery, ekranu akustycznego) jest równa zero.

Częstotliwość koincydencji w funkcji kąta padania wymuszającej fali akustycznej wyznaczyć można z zależności:

$$f_k = \frac{f_c}{\sin^2(\theta)} \quad (15)$$

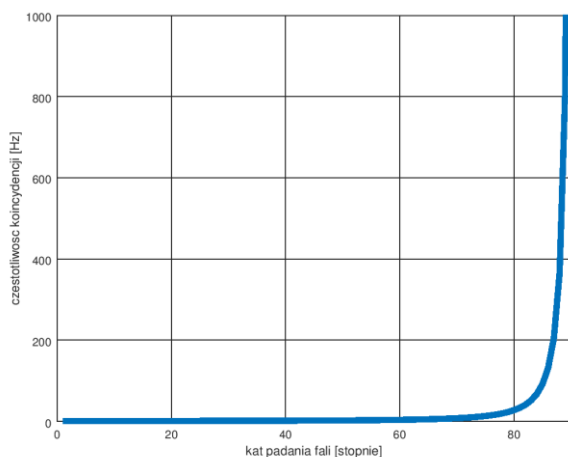
gdzie:

$f_k$  – częstotliwość koincydencji

$f_c$  – częstotliwość krytyczna dana zależnością (8) lub (13)

$\theta$  – kąt padania fali akustycznej liczony do normalnej do panelu.

Na rys 10 przedstawiono funkcję zmiany wartości częstotliwości krytycznej w zależności od kąta padania fali. Charakterystykę na rys. 10 wyznaczono dla częstotliwości krytycznej równej 1.



**Rys. 10.** Zmiana częstotliwości koincydencji w funkcji kąta padania fali akustycznej

Jeżeli panel znajduje się w polu rozproszonym, gdzie możliwe są wszystkie kąty padania  $\theta$ , zmniejszenie izolacyjności w wyniku zjawiska koincydencji może wystąpić w dość szerokim zakresie częstotliwości. Umieszczenie zaniżenia izolacyjności w określonym paśmie częstotliwości oraz wartość tego zaniżenia zależy nie tylko od masy przypadającej na jednostkę powierzchni przegrody, lecz również w poważnym stopniu od sztywności dynamicznej  $B$  przegrody na zginanie, a zatem od grubości przegrody i od właściwości fizycznych materiału, z którego wykonana jest przegroda.

## Podsumowanie

W pracy opisano zjawisko koincydencji oraz sposoby wyznaczenia częstotliwości krytycznej, które są niezbędne przy analizie dynamiki każdego układu mechanicznego, który jest lub może być pobudzany falą akustyczną. Wyznaczono charakterystyki zmian wartości częstotliwości krytycznej w funkcji grubości panelu. Panel modelowano jako płytę cienką opisaną równaniami Kirchhoffa-Love'a) i jako płytę grubą - model Mindlina – Reissnera. Przebiegi charakterystyk pokazanych na rys 1-7 nie wykazują istotnych różnic w wyznaczonych wartościach w przypadkach obu modeli.

Zjawisko koincydencji występuje tylko dla określonych kątów  $\theta$  przy spełnieniu warunku  $c \geq c_g$ . Wpływa ono na wartość impedancji wejściowej płyty, co z kolei rzutuje na izolacyjność akustyczną płyty – ulega ona znacznemu pogorszeniu zależnie od współczynnika tłumienia wewnętrznego  $\eta$  materiału, z którego płyta jest wykonana (teoretycznie może zmniejszyć się do zera). Powinno się więc dążyć do tego, aby zaniżenie izolacyjności wynikające ze zjawiska koincydencji znajdowało się poza zakresem rozpatrywanym, np. w paśmie częstotliwości poniżej 100 Hz lub powyżej 5000 Hz.

## Bibliografia:

1. Bies D. A., Hansen C. H., Engineering noise control, theory and practice, 4th Ed., Spon Press, London and New York, 2009
2. Brekke A. Calculation method for the transmission loss of single, double and triple partitions. Appl Acoust 1981;14
3. Chazot J., Guyade J., Prediction of transmission loss of double panels with a patch-mobility method, Journal of Acoustical Society of America 121, January 2007
4. Fahy F. Foundations of Engineering Acoustics. San Diego:Academic Press; 2003.
5. Kenawy, M.A., Elaidy, M.Y., Abd-Elbasseer M. Theoretical determination of critical frequency  $f_c$  of some acoustic material panels. 12th International Congress on Sound and Vibration 2005
6. Mansilla J., Masson F., Palma I. C. de, Pepino L., Bender L. Sound Insulation of Homogeneous Single Panels: a Comparison Between Real Construction Materials and Several Prediction Models. In: Proc. of 24th International Congress on Sound and Vibration, London; 2017
7. Sikora J. Wytyczne dla projektantów zabezpieczeń wibroakustycznych dotyczące możliwości stosowania nowego zestawu dźwiękochlonno-izolacyjnych przegród warstwowych. Wydawnictwa AGH, Kraków, 2013.

## Theoretical analysis of coincidence phenomenon and critical frequency determination of acoustic isolation panels

Critical and coincidence frequencies of panels are important in studying their behaviour under acoustic excitation Expressions for critical and coincidence frequencies of thin and thick homogeneous isotropic panels are derived. Characteristics of critical frequency values in function of panel thickness for five different construction materials are shown.

**Keywords:** coincidence phenomenon, Kirchhoff-Love plate, Mindlin – Reissner plate, critical frequency.

## Autorzy:

dr hab. Inż. **Leszek Majkut** – AGH Akademia Górniczo-Hutnicza im. St. Staszica w Krakowie, [majkut@agh.edu.pl](mailto:majkut@agh.edu.pl)

Praca powstała w ramach badań statutowych na 11.11.130.734