

**Paweł Poczekajło**  
Wydział Elektroniki i Informatyki  
Politechnika Koszalińska  
pawel.poczekajlo@tu.koszalin.pl

## **Pomiar oraz porównanie wrażliwości różnych realizacji filtrów FIR 3D**

**Słowa kluczowe:** filtry FIR 3D, wrażliwość, kwantowanie współczynników, struktura bezpośrednia, ortogonalna struktura rotatorowa

### **1. Wprowadzenie**

Systemy cyfrowego przetwarzania sygnałów (CPS) stanowią obecnie jedne z najintensywniej rozwijanych układów, co wynika głównie z powszechności ich stosowania. Różne przeznaczenie takich systemów skutkuje koniecznością implementacji w różnych jednostkach sprzętowych (np. mikroprocesory, procesory DSP, układy FPGA). Ponieważ zasadniczym zagadnieniem przy realizacji CPS jest wykonywanie operacji arytmetycznych, istotnym problemem staje się uwzględnienie skończonej precyzji obliczeń, która wynika wprost z dostępnej jednostki arytmetyczno-logicznej danego procesora. Podstawowym czynnikiem charakteryzującym dany system CPS jest zespolona charakterystyka częstotliwościowa, w tym głównie charakterystyka amplitudowa. Długość rejestrów i dokładność obliczeń są jednymi z kluczowych kwestii analizowanych pod kątem wpływu na otrzymywane charakterystyki. Powiązane jest to bezpośrednio ze skończoną precyzją zapisu współczynników (np. transmitancji) danego systemu. Zagadnienie to określane jest jako wrażliwość charakterystyki amplitudowej badanego systemu na kwantowanie współczynników [1, 2]. Zazwyczaj wrażliwość prezentowana jest jako charakterystyka wyznaczona zgodnie z równaniem:

$$S_i = \frac{\Delta T(\omega_h, \omega_v, \omega_d)}{\Delta b_{ije}}, \quad (1)$$

gdzie:

$\Delta T(\omega_h, \omega_v, \omega_d)$  – zmiana charakterystyki amplitudowej filtru 3D,

$\Delta b_{ije}$  – zmiana wybranego współczynnika systemu opisanego transmitancją

$$T(z_h, z_v, z_d) = \sum_{e=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^k b_{ije} z_h^{-i} z_v^{-j} z_d^{-e}$$

W różnych publikacjach wykazano, że określone realizacje systemów CPS, np. ortogonalne, mogą charakteryzować się niższą wrażliwością niż bezpośrednie realizacje bazujące na operacji splotu. W artykule podjęto kwestię pomiaru i porównania wrażliwości dla różnych realizacji separowalnych filtrów 3D o skończonej odpowiedzi impulsowej (ang. FIR) opisanych transmitancją [3]:

$$\begin{aligned} T(z_h, z_v, z_d) &= T_h(z_h) T_v(z_v) T_d(z_d) \\ &= \left( \sum_{i=0}^k b_{hi} z_h^{-i} \right) \left( \sum_{j=0}^m b_{vj} z_v^{-j} \right) \left( \sum_{e=0}^l b_{de} z_d^{-e} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie:

$k, m, l$  – stopnie transmitancji składowych,

$b_{hi}, b_{vj}, b_{de}$  – współczynniki składowych transmitancji jednowymiarowych.

Finalnie planuje się uzyskać liczbowe dane pozwalające na określenie, jaki odsetek filtrów FIR w realizacji ortogonalnej z wykorzystaniem rotatorów jest lepszy (pod względem niższej wrażliwości) niż ich bezpośrednie implementacje z zastosowaniem splotu.

## 2. Analizowane filtry i metody pomiarowe

Do pomiarów wrażliwości wybrano dwa rodzaje struktur realizujących zadane filtry FIR 3D. Pierwsza to struktura bezpośrednia bazująca na splotu 3D, druga to odpowiadająca jej ortogonalna realizacja rotatorowa otrzymana zgodnie z [3, 4]. W pierwszym przypadku współczynnikami są stałe transmitancji (splotu), w drugim wartości funkcji trygonometrycznych opisujące poszczególne rotatory. Przyjęto, że analizowane są dolnoprzepustowe (LP), górnoprzepustowe (HP), środkowo-przepustowe (BP) i środkowozaporowe (SB) filtry 3D o stopniach transmitancji (2)  $k=m=l=4$ . Pomiarów dokonano przy kwantowaniu współczynników przez zaokrąglanie dla rejestrów 8-, 16- i 24-bitowych zapisanych w systemie stałopozycyjnym U2 (odpowiednio Q1.8, Q1.15 i Q1.23). Jednocześnie dla każdego typu filtrów (LP/HP/BP/SB) określono grupę po 1000 systemów o różnych częstotliwościach granicznych. Finalnie więc, pomiarom podlegało 12000 różnych filtrów w dwóch realizacjach każdy (bezpośredniej i rotatorowej-ortogonalnej). Dla tak dużej liczby filtrów, przeprowadzenie analizy wrażliwości osobno dla

każdego współczynnika (a może być ich nawet do 125 dla jednego filtru) jest bardzo czasochłonne. Również sama prezentacja w formie wykresów jest kłopotliwa i praktycznie niemożliwa do zamieszczenia w niniejszej publikacji. Zdecydowano więc, że wrażliwość wyznaczana będzie jako wartość skalarna, dla jednocześnie skwantowanych wszystkich współczynników w danej realizacji, zgodnie ze wzorem:

$$S_{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{\omega_h, \omega_v, \omega_d} (M(\omega_h, \omega_v, \omega_d))^2, \quad (3)$$

gdzie:

$n$  – liczba próbek charakterystyki wrażliwości,

$M(\omega_h, \omega_v, \omega_d) = T_Q(\omega_h, \omega_v, \omega_d) + T_C(\omega_h, \omega_v, \omega_d)$  – wrażliwość rzeczywista (bezwzględna) charakterystyki amplitudowej,

$T_Q(\omega_h, \omega_v, \omega_d)$  – charakterystyka amplitudowa badanego filtru 3D o założonej realizacji ze skwantowanymi wszystkimi współczynnikami,

$T_C(\omega_h, \omega_v, \omega_d)$  – charakterystyka amplitudowa filtru 3D o realizacji splotowej ze współczynnikami określonymi z pełną dostępną precyzją.

Zgodnie ze wzorem (3) obie realizacje o skwantowanych współczynnikach porównywane są do jednej wzorcowej charakterystyki  $T_C(\omega_h, \omega_v, \omega_d)$ . Takie podejście ma jedną wadę, mianowicie przy pomiarach realizacji rotatorowej uwzględnia się błędy wynikające z poszczególnych etapów syntezy (otrzymywania) systemów ortogonalnych. Teoretycznie, tego typu błędy nie powinny być brane pod uwagę przy wyznaczaniu wrażliwości. W związku z tym, dla struktur rotatorowych dodatkowo wyznaczono wrażliwość w następującej postaci:

$$Sr_{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{\omega_h, \omega_v, \omega_d} (M(\omega_h, \omega_v, \omega_d))^2, \quad (4)$$

gdzie:

$n$  – liczba próbek charakterystyki wrażliwości,

$M(\omega_h, \omega_v, \omega_d) = T_Q(\omega_h, \omega_v, \omega_d) + T_R(\omega_h, \omega_v, \omega_d)$  – wrażliwość rzeczywista (bezwzględna) charakterystyki amplitudowej,

$T_Q(\omega_h, \omega_v, \omega_d)$  – charakterystyka amplitudowa badanego filtru 3D o ortogonalnej realizacji rotatorowej ze skwantowanymi współczynnikami,

$T_R(\omega_h, \omega_v, \omega_d)$  – charakterystyka amplitudowa filtru 3D o ortogonalnej realizacji rotatorowej ze współczynnikami określonymi z pełną dostępną precyzją.

### 3. Wyniki pomiarów

Wszystkie realizowane pomiary oraz analizy i symulacje wykonane zostały z wykorzystaniem środowiska obliczeniowego Scilab. Prezentacja otrzymanych wyników, nawet w formie skalarnych wartości dla każdego filtru, zajęła by przynajmniej kilka stron. Dlatego też, w tabeli 1 zebrano wyniki porównań w postaci liczby filtrów w danej realizacji (np. rotatorowej) z mniejszym błędem, niż w drugiej realizacji (np. ze splotem 3D), co też było głównym celem badania.

**Tabela 1.** Wyniki porównań wrażliwości różnych realizacji filtrów.

<i>Grupa filtrów i długości rejestrów</i>	<i>Liczba filtrów o realizacji bezpośredniej z niższym <math>S_{MSE}</math> niż odpowiadająca jej ortogonalna realizacja rotatorowa</i>	<i>Liczba filtrów o ortogonalnej realizacji rotatorowej z niższym <math>S_{MSE}</math> niż odpowiadająca jej realizacja bezpośrednia</i>	<i>Liczba filtrów o ortogonalnej realizacji rotatorowej z niższym <math>S_{MSE}</math> niż odpowiadająca jej realizacja bezpośrednia</i>
<i>Dolnoprzepustowe (rejstry 8-bitowe)</i>	0	1000	1000
<i>Dolnoprzepustowe (rejstry 16-bitowe)</i>	6	994	994
<i>Dolnoprzepustowe (rejstry 24-bitowe)</i>	182	818	996
<i>Górnoprzepustowe (rejstry 8-bitowe)</i>	0	1000	1000
<i>Górnoprzepustowe (rejstry 16-bitowe)</i>	7	993	994
<i>Górnoprzepustowe (rejstry 24-bitowe)</i>	870	130	993
<i>Środkowoprzepustowe (rejstry 8-bitowe)</i>	0	1000	1000
<i>Środkowoprzepustowe (rejstry 16-bitowe)</i>	1	999	999
<i>Środkowoprzepustowe (rejstry 24-bitowe)</i>	797	203	1000
<i>Środkowozaporowe (rejstry 8-bitowe)</i>	11	989	989
<i>Środkowozaporowe (rejstry 16-bitowe)</i>	1	999	1000
<i>Środkowozaporowe (rejstry 24-bitowe)</i>	500	500	1000
<i>W ujęciu procentowym względem liczby wszystkich analizowanych filtrów</i>	19,8%	80,2%	99,7%

## 4. Wnioski i podsumowanie

Z tabeli 1 można wywnioskować, że przy niższych poziomach kwantowania (rejstry 8- i 16-bitowe), filtry ortogonalne o realizacji rotatorowej mają prawie zawsze niższą wrażliwość niż odpowiadające im filtry w realizacji bezpośredniej ze splotem 3D. Pojedyncze przypadki, gdzie struktura bezpośrednia ma niższą wartość  $S_{MSE}$ , wynikają z losowego dopasowania współczynników przy ich kwantowaniu. Dla rejestrów 24-bitowych, przy pomiarze  $S_{MSE}$ , struktury rotatorowe w większości przypadków wypadają gorzej. Jednak już pomiary  $S_{r_{MSE}}$ , które nie uwzględniają błędów syntezy, jednoznacznie wskazują na niższą wrażliwość systemów ortogonalnych (99,7% przypadków), co potwierdza wstępne założenia. Z przeprowadzonych analiz, dodatkowo wynika więc, że w sytuacji gdy współczynniki kwantowane są z większą dokładnością, istotne stają się błędy metod i działań wykorzystywanych w procesie syntezy filtru o danej strukturze. Zgodnie z tym, dalsze prowadzone prace i badania skupią się na poprawieniu kluczowych aspektów syntezy ortogonalnych filtrów rotatorowych w celu minimalizacji powstających niedokładności obliczeniowych i tym samym poprawie wrażliwości.

## Bibliografia

1. A. Antoniou, "Digital Signal Processing: Signals, Systems, and Filters", McGraw Hill, New York (2005). ISBN: 0071454241
2. S.K. Mitra, J.F. Kaiser, "Handbook for Digital Signal Processing", John Wiley & Sons, New York (1993). ISBN: 0471619957
3. P. Poczekajło, K. Wawryn, "Algorithm for realisation, parameter analysis, and measurement of pipelined separable 3D finite impulse response filters composed of Givens rotation structures", IET Signal Processing, vol. 12 (2018), iss. 7, pp. 857-867. DOI: 10.1049/iet-spr.2017.0450
4. P. Poczekajło, R. Wirski, "Synthesis and Realization of 3-D Orthogonal FIR Filters Using Pipeline Structures", Circuits Systems and Signal Processing, vol. 37 (2018), iss. 4, pp. 1669-1691. DOI: 10.1007/s00034-017-0618-2

## Streszczenie

W artykule przedstawiono wyniki pomiaru wrażliwości charakterystyki amplitudowej na kwantowanie współczynników dla różnych realizacji filtrów cyfrowych. Przeanalizowano filtry separowalne FIR 3D w realizacji bezpośredniej (splot) i ortogonalnej z zastosowaniem rotatorów. Pomiar wrażliwości sprowadzono do wyznaczenia błędu średniokwadratowego charakterystyki amplitudowej. Wykorzystano trzy poziomy kwantowania współczynników (8-, 16- i 24-bity) oraz

cztery rodzaje filtrów (dolnoprzepustowe, górnoprzepustowe, środkowoprzepustowe i środkowozaporowe).

### **Abstract**

Measurements for sensitivity of amplitude characteristic on coefficients quantization for different realisation of digital filters is presented in the paper. Separable 3D filters in direct realisation (convolution) and orthogonal realisation with use rotation are analysed. Sensitivity is measured like a mean squared error of amplitude characteristic. Three quantization levels of coefficients (8-, 16- and 24-bits) and four type of filters (low-pass, high-pass, band-pass and band-stop) are used.

**Keywords:** FIR 3D filters, sensitivity, coefficients quantization, direct structure, orthogonal rotation structure