

**Dr inż. Paweł Kołodziej**

**Dr inż. Marek Boryga**

Katedra Inżynierii Mechanicznej i Automatyki,  
Wydział Inżynierii Produkcji, Uniwersytet Przyrodniczy w Lublinie,  
ul. Doświadczalna 50A, 20-280 Lublin, Polska  
e-mails: [pawel.kolodziej@up.lublin.pl](mailto:pawel.kolodziej@up.lublin.pl), [marek.boryga@up.lublin.pl](mailto:marek.boryga@up.lublin.pl)

## **Analiza częstotliwościowa sprzęgła o regulowanej podatności skrętnej**

**Słowa kluczowe:** *sprzęgło podatne, sztywność skrętna, analiza częstotliwościowa, charakterystyka amplitudowa*

**Streszczenie:** W pracy przedstawiono analizę częstotliwościową sprzęgła podatnego umożliwiającego zmianę sztywności skrętnej. Wyprowadzono zależność na sztywność sprzęgła uwzględniając parametry geometryczne i materiałowe. Zmiana sztywności sprzęgła dokonuje się tak aby iloraz częstotliwości wymuszenia i częstotliwości drgań własnych układu był większy od 1,4. Obliczono parametry drgań dla wybranych wartości współczynnika sztywności skrętnej przy częstotliwościach wymuszenia bliskich częstotliwości drgań własnych oraz po zmianie sztywności.

### **1. Wprowadzenie**

Rozwój techniki w dziedzinie projektowania i eksploatacji maszyn roboczych wymusza na konstruktorach konieczność dokonywania wyboru najkorzystniejszego rozwiązania konstrukcyjnego oraz podwyższania prędkości eksploatacyjnych w procesach produkcji. Rozpatrując skutki powyższych działań należy stwierdzić, że zwiększenie prędkości ruchu powoduje wzrost wartości obciążeń dynamicznych. Nazywając te oddziaływania terminem „dynamiczności” maszyny, należy uwzględnić charakterystyki jej stanu mechanicznego czyli wartości amplitud drgań układu konstrukcyjnego jako całości jak również jego poszczególnych podzespołów i elementów. Duże wartości obciążeń dynamicznych oddziałują negatywnie na trwałość, niezawodność, dokładność działania, powstawanie błędów kształtu oraz dokładności pozycjonowania [1]. Drgania występujące podczas pracy zespołów napędowych obciążonych zmiennym momentem, zależą od wartości amplitudy i częstotliwości momentu wymuszającego, masowych momentów bezwładności elementów układu napędowego oraz sztywności skrętnej i tłumienia. Mechaniczne układy ze zmienną podatnością występują zarówno jako elementy konstrukcji sprzęgieł, wałów jak i eliminatorów drgań. Przykład eliminatora drgań skrętnych wykorzystującego zmienną podatność pierścieni neoprenowych spełniających rolę sprężyn i tłumików przedstawiono w pracy Slavicka i Bollingera [13]. Zmiana sztywności następuje w wyniku przemieszczenia osiowego śrub stożkowych powodującego zwiększenie lub zmniejszenie nacisku na pierścienie. Zakres zmian podatności neoprenu umożliwia dostrojenie eliminatora wyposażonego w dysk o masie 20 kg do częstotliwości rezonansowej wrzeciona frezarki, na którym zabudowano urządzenie. W publikacjach Kowala [8-10] zmianę sztywności sprzęgła lub wału przekładni wykorzystującego walcowe albo talerzowe sprężyny naciskowe ułożone w pakiety, dokonuje się za pomocą mechanizmu gwintowego. Według autora sprzęgło stanowi zespół skutecznie zmniejszający obciążenia dynamiczne podczas pracy ustalonej i rozruchu układu napędowego. Natomiast modułowa konstrukcja złożona ze sprężyn talerzowych umożliwia tworzenie układów o różnych charakterystykach statycznych. Filipowicz [2-5] oraz Filipowicz i Kuczaj [6, 11] zaprezentowali nowe rozwiązania układów

podatnych skądnie oraz przeprowadzili teoretyczną i praktyczną analizę sprzęgła dwustronnego działania. Badacze stwierdzili, że zaprojektowane konstrukcje pozwalają na uzyskanie kątów skądzenia do kilkuset stopni, przenoszenie momentów obrotowych o znacznej wartości oraz łagodzenie chwilowych przeciążeń. Ponadto ustalili, że tworzenie najkorzystniejszych charakterystyk sprzęgła (do rodzaju napędzanej maszyny) polega na doborze zestawu i układu sprężyn oraz parametrów mechanizmu gwintowego i jest możliwe już na etapie projektowania.

Celem pracy jest wyznaczenie wpływu zmian sztywności skądniej zaprojektowanego sprzęgła podatnego na amplitudę wymuszonych drgań ustalonych. Układ pracy jest następujący. W rozdziale 2 przedstawiono sposób rozwiązania równań drgań wymuszonych, tłumionych. W rozdziale 3 przedstawiono sposób doboru sztywności skądniej sprzęgła. Rozdział 4 zawiera opis zaprojektowanego sprzęgła oraz obliczenia jego sztywności skądniej. W rozdziale 5 przedstawiono wyniki analizy dla dziesięciu wybranych wartości współczynnika sztywności skądniej.

## 2. Równania drgań wymuszonych i ich rozwiązanie

Równanie różniczkowe drgań wymuszonych można zapisać w postaci [14]

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{H} \sin \omega t \quad (1)$$

gdzie:  $\mathbf{B}$  – macierz bezwładności,  $\mathbf{K}$  – macierz sztywności,  $\mathbf{C}$  – macierz tłumienia,  $\mathbf{H}$  – wektor amplitud siły wymuszającej,  $\mathbf{q}$  – wektor współrzędnych uogólnionych,  $\omega$  – częstość drgań wymuszonych [rad/s],  $t$  – czas [s].

Po wstawieniu do równań drgań rozwiązania stacjonarnego otrzymuje się układ równań algebraicznych, w których niewiadomą jest wektor zespolonych amplitud  $\bar{\mathbf{a}}$  drgań wymuszonych ustalonych [14]

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{B})\bar{\mathbf{a}} + i\omega \mathbf{C}\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{H} \quad (2)$$

gdzie :  $i = \sqrt{-1}$  – jednostka urojona.

W przypadku sprzęgła podatnego układ równań drgań wymuszonych ma postać

$$\begin{bmatrix} J_s & 0 \\ 0 & J_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix} e^{i\omega t} \quad (3)$$

gdzie:  $J_s$  - zredukowany do osi wirnika silnika masowy moment bezwładności wirnika i wirujących elementów części czynnej sprzęgła [kg·m<sup>2</sup>],  $J_m$  - zredukowany do osi obrotu wału wyjściowego sprzęgła moment bezwładności maszyny [kg·m<sup>2</sup>],  $c$  - współczynnik tłumienia wiskotycznego [N·m·s/rad],  $k$  - współczynnik sztywności skądniej [N·m/rad],  $M$  - moment obciążający sprzęgło [N·m],  $\theta_1$  - wychylenie kątowe tarczy czynnej sprzęgła [rad],  $\theta_2$  - wychylenie kątowe tarczy biernej sprzęgła [rad].

Wykorzystując wzór (2) oraz dokonując przekształceń otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} k - J_s \omega^2 + ic\omega & -(k + ic\omega) \\ -(k + ic\omega) & k - J_m \omega^2 + ic\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix} \quad (4)$$

Po rozwiązaniu rozdzielenie otrzymanych wyrażeń na część rzeczywistą i urojoną otrzymuje się

$$\bar{a}_1 = A_1(\omega) + iB_1(\omega) = \frac{M(k\alpha - \beta)}{[\alpha^2 + \beta(J_s + J_m)]\omega^2} + i \frac{M\gamma J_m}{\alpha^2 + \beta(J_m + J_s)} \quad (5)$$

$$\bar{a}_2 = A_2(\omega) + iB_2(\omega) = \frac{M(\delta\alpha - \beta)}{[\alpha^2 + \beta(J_s + J_m)]\omega^2} + i \frac{M\gamma J_s}{\alpha^2 + \beta(J_m + J_s)} \quad (6)$$

gdzie:  $\alpha = \omega^2 J_s J_m - k(J_s + J_m)$ ,  $\beta = \omega^2 c^2 (J_s + J_m)$ ,  $\gamma = \alpha c J_s$ ,  $\delta = k - \omega^2 J_s$ .

Moduł amplitudy i kąt przesunięcia fazowego oblicza się ze wzorów [14]

$$a_i(\omega) = \sqrt{[A_i(\omega)]^2 + [B_i(\omega)]^2} \quad (7)$$

$$\varphi_i(\omega) = \arctg \frac{B_i(\omega)}{A_i(\omega)} \quad (8)$$

### 3. Dobór sztywności skrętnej sprzęgła

Równanie charakterystyczne (wiekowe) umożliwia wyznaczenie częstości drgań własnych  $\omega_0$ . Równanie to ma postać

$$\det(\mathbf{K} - \omega_0^2 \mathbf{B}) = 0 \quad (9)$$

W przypadku sprzęgła podatnego ma ono postać

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} - \omega_0^2 \begin{bmatrix} J_s & 0 \\ 0 & J_m \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

Wyznaczone pierwiastki równania (10) wynoszą

$$\omega_0 = 0 \text{ oraz } \omega_0 = \sqrt{\frac{k(J_s + J_m)}{J_s J_m}} \quad (11)$$

Sprzęgło wywiera korzystny wpływ na właściwości dynamiczne układu gdy spełniona jest zależność [12]

$$\frac{\omega}{\omega_0} > \sqrt{2} \quad (12)$$

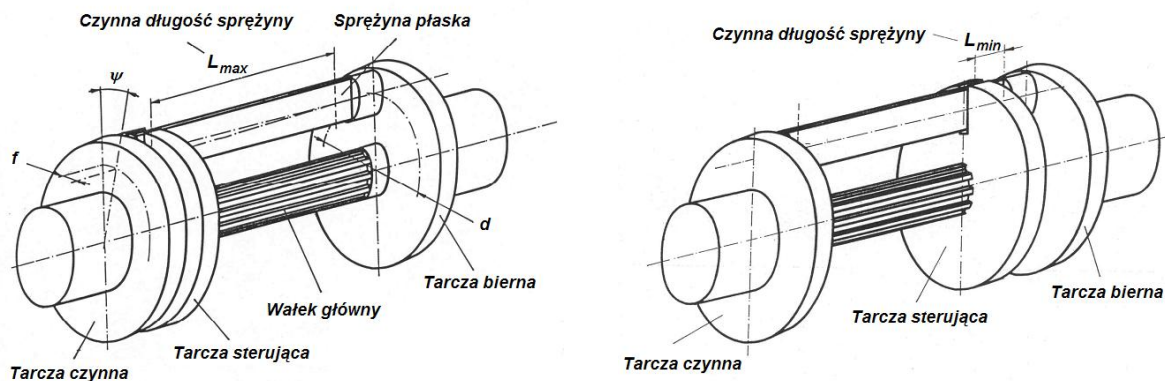
Należy więc tak zmieniać współczynnik sztywności skrętnej sprzęgła  $k$ , aby sprzęgło pracowało przy częstościach nadkrytycznych, przechodząc przez rezonans w początkowym okresie rozruchu, kiedy moment dynamiczny nie jest jeszcze zbyt duży. Podstawiając do zależności (12) wyznaczoną wartość częstości drgań głównych (11) oraz przekształcając otrzymuje się zależność na wymagany współczynnik sztywności skrętnego sprzęgła  $k$

$$k < \frac{J_s J_m \omega^2}{2(J_s + J_m)} \quad (13)$$

## 4. Sztywność skrętna sprzęgła o regulowanej podatności

### 4.1. Opis sprzęgła

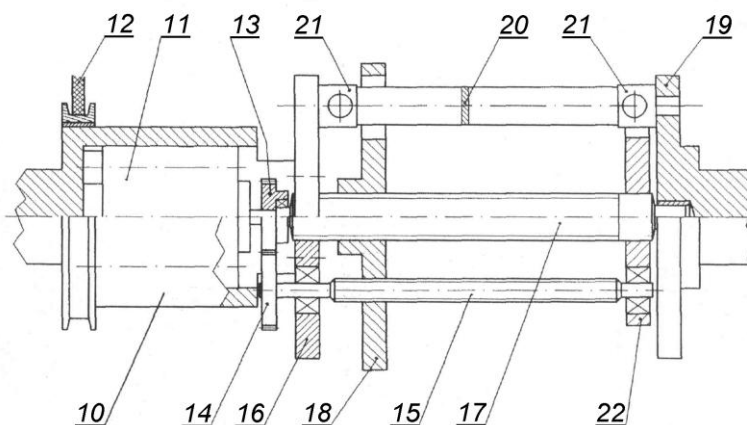
Analiza zagadnień związanych z wpływem sztywności elementów podatnych na wartości obciążeń dynamicznych w układach napędowych, prowadzi do wniosku, że korzystnym sposobem zmniejszenia negatywnych oddziaływań jest zastosowanie urządzenia, którego konstrukcja pozwala na uzyskiwanie regulowanej (w pewnym zakresie) wartości sztywności skrętnego. Przy czym podatność byłaby zmieniana w sposób niezależny od parametrów ruchu układu napędowego oraz obciążenia zewnętrznego. Uwzględniając powyższe informacje należy stwierdzić, że zadanie to spełnia sprzęgło z wbudowanym mechanizmem umożliwiającym bezstopniową zmianę sztywności skrętnego [7], którego schemat działania przedstawiono na rysunku 1.



**Rys. 1.** Schemat działania sprzęgła o regulowanej podatności

Na powyższych rysunkach zaprezentowano zasadę działania sprzęgła z regulowaną podatnością skrętną. Zmiana sztywności układu polega na blokowaniu czynnej długości sprężyny płaskiej łączącej tarczę czynną i bierną. Blokada jest możliwa w wyniku liniowego przesunięcia tarczy sterującej osadzonej na wałku wielowypustowym. Maksymalną podatność sprzęgło posiada gdy długość czynna sprężyn jest największa ( $L_{max}$ ) a minimalną gdy jest najmniejsza ( $L_{min}$ ).

Na rysunku 2 przedstawiono konstrukcję zaprojektowanego sprzęgła [7]. Na wałku wejściowym 10, osadzona jest bieżnia szczotki 12 do zasilania silnika 11 napędzającego poprzez przekładnię zębatą (koła 13 i 14) śrubę pociągową 15. Śruba pociągowa posiadająca możliwość obrotu w tarczy czynnej 16 i oporowej 22 służy do przesuwania tarczy sterującej 18. Przesunięcie poosiowe tarczy sterującej wzdłuż wałka wielowypustowego 17 powoduje zmniejszenie czynnej długości płaskich sprężyn 20 zmniejszając jednocześnie kąt skręcenia pomiędzy tarczą czynną 16 i bierną 19. Sprężyny płaskie 20 zamocowane są sztywno w oprawkach 21, które mogą swobodnie obracać się w tarczach 16 i 19.



**Rys. 2.** Sprzęgło o regulowanej podatności.

#### 4.2. Obliczenia sztywności skrętnej

Strzałka ugięcia sprężyny płaskiej wynosi

$$f = \frac{FL^3}{3EJ_x} \quad (14)$$

gdzie:  $F$  - siła obciążająca sprężynę [N],  $L$  - czynna długość sprężyny [mm],  $E$  - moduł sprężystości [MPa],  $J_x$  - osiowy moment bezwładności przekroju sprężyny [mm<sup>4</sup>].

Siłę działającą na jedną sprężynę przy obciążeniu sprzęgła momentem  $M$  można obliczyć ze wzoru

$$F = \frac{2M}{nd} \quad (15)$$

gdzie:  $d$  - średnica rozmieszczenia sprężyn [mm],  $n$  - ilość sprężyn.

Dla małych kątów można napisać

$$f = \frac{d}{2} \operatorname{tg} \psi \quad (16)$$

gdzie:  $\psi$  - względny kąt skręcenia tarcz sprzęgła [rad].

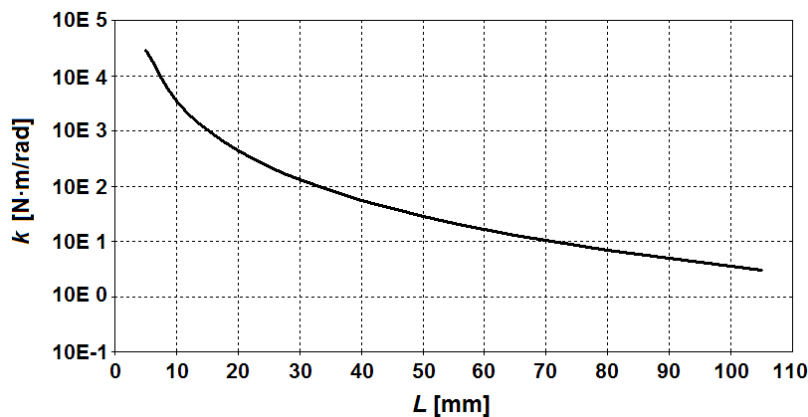
Porównując zależności (14) i (16) oraz wykorzystując wzór (15) otrzymuje się

$$\frac{d}{2} \operatorname{tg} \psi = \frac{2ML^3}{3ndEJ_x} \quad (17)$$

Dla małych kątów wyrażonych w radianach  $\operatorname{tg} \psi \approx \psi$  toteż przekształcając odpowiednio równanie (17) oraz uzgadniając jednostki otrzymuje się zależność na współczynnik sztywności skrętnej

$$k = \frac{M}{\psi} = \frac{3nd^2EJ_x}{4000L^3} \quad (18)$$

Na rysunku 3 przedstawiono wykres zmian współczynnika sztywności skrętnej sprzęgła  $k$  w zależności od czynnej długości sprężyn  $L$ , przy czym oś współczynnika  $k$  jest logarytmiczna. Wykres ten otrzymano dla następujących parametrów sprzęgła:  $n = 4$ ,  $d = 100$  mm,  $J_x = 5,625$  mm<sup>4</sup>,  $E = 2,1 \cdot 10^5$  MPa,  $L = (5 \div 105)$  mm.



**Rys. 3.** Wykres współczynnika sztywności skrętnej sprzęgła  $k$  w zależności od czynnej długości sprężyn  $L$

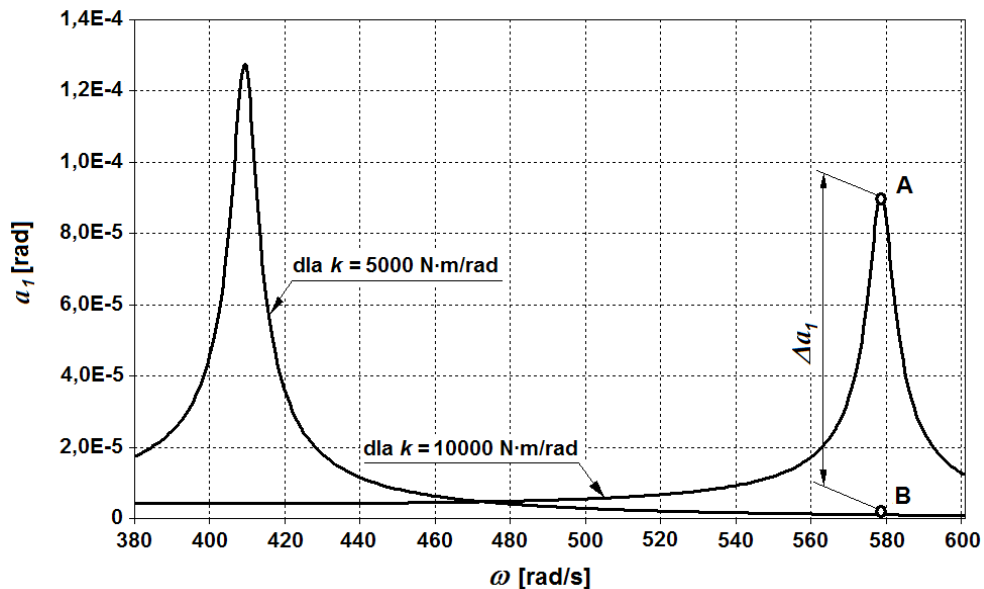
## 5. Wyniki analizy

Obliczenia wykonano dla dziesięciu wybranych wartości współczynnika sztywności skrętnej  $k$  mieszczących się w zakresie regulacji. W kolumnie 1 tabeli 1 przedstawiono wyznaczone z zależności (11, 5, 6) częstości drgań własnych ( $\omega_0$ ) oraz wartości amplitud przemieszczeń kątowych tarczy czynnej ( $a_1$ ) i biernej ( $a_2$ ). W obliczeniach przyjęto wartości parametrów konstrukcyjnych sprzęgła uwzględnionych w poprzednim rozdziale. Ponadto przyjęto:  $J_s = 0,03$  kg·m<sup>2</sup>,  $J_m = 10$  kg·m<sup>2</sup>,  $c = 0,2$  N·m·s/rad oraz  $M = 3,5$  N·m. Natomiast w kolumnie 2

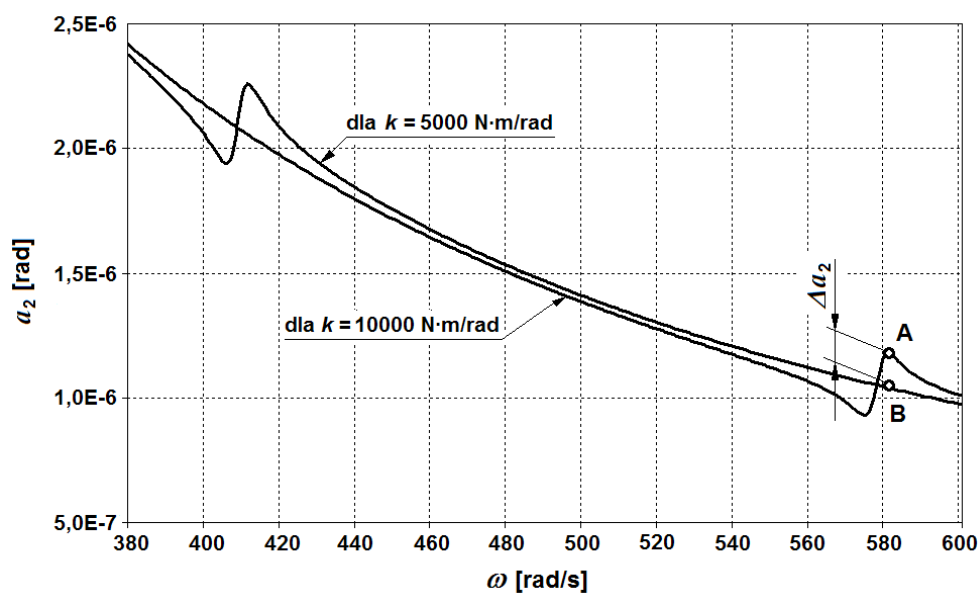
zamieszczono wartości współczynnika sztywności skrętniej wyznaczone z zależności (13) uwzględniającej warunek (12).

**Tabela 1.** Wartości współczynnika sztywności skrętniej  $k$  i amplitud przemieszczeń kątowych tarcz sprzęgła  $a_1$  i  $a_2$

| 1                |                       |                       |                       | 2                |                                   |                                    |
|------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| $k$<br>[N·m/rad] | $\omega_0$<br>[rad/s] | $a_1$<br>[rad]        | $a_2$<br>[rad]        | $k$<br>[N·m/rad] | $a_1$<br>[rad]                    | $a_2$<br>[rad]                     |
| 25000            | 914,239               | $5,682 \cdot 10^{-5}$ | $5,090 \cdot 10^{-7}$ | 12500            | $4,181 \cdot 10^{-7}$<br>(0,74%)  | $4,202 \cdot 10^{-7}$<br>(82,56%)  |
| 10000            | 578,215               | $9,017 \cdot 10^{-5}$ | $1,177 \cdot 10^{-6}$ | 5000             | $1,046 \cdot 10^{-6}$<br>(1,16%)  | $1,050 \cdot 10^{-6}$<br>(89,28%)  |
| 5000             | 408,860               | $1,274 \cdot 10^{-4}$ | $2,254 \cdot 10^{-6}$ | 2500             | $2,023 \cdot 10^{-6}$<br>(1,59%)  | $2,078 \cdot 10^{-6}$<br>(92,16%)  |
| 2500             | 289,107               | $1,806 \cdot 10^{-4}$ | $4,370 \cdot 10^{-6}$ | 1250             | $4,015 \cdot 10^{-6}$<br>(2,22%)  | $4,145 \cdot 10^{-6}$<br>(94,86%)  |
| 1250             | 204,430               | $2,549 \cdot 10^{-4}$ | $8,537 \cdot 10^{-6}$ | 625              | $8,455 \cdot 10^{-6}$<br>(3,32%)  | $8,435 \cdot 10^{-6}$<br>(98,80%)  |
| 630              | 144,553               | $3,606 \cdot 10^{-4}$ | $1,666 \cdot 10^{-5}$ | 312,5            | $1,665 \cdot 10^{-5}$<br>(4,62%)  | $1,669 \cdot 10^{-5}$<br>(100,21%) |
| 315              | 102,623               | $5,101 \cdot 10^{-4}$ | $3,329 \cdot 10^{-5}$ | 157,5            | $3,435 \cdot 10^{-5}$<br>(6,73%)  | $3,374 \cdot 10^{-5}$<br>(101,34%) |
| 160              | 73,139                | $7,199 \cdot 10^{-4}$ | $6,542 \cdot 10^{-5}$ | 80               | $6,596 \cdot 10^{-5}$<br>(9,16%)  | $6,586 \cdot 10^{-5}$<br>(100,66%) |
| 80               | 51,717                | $1,036 \cdot 10^{-3}$ | $1,335 \cdot 10^{-4}$ | 40               | $1,414 \cdot 10^{-4}$<br>(13,64%) | $1,349 \cdot 10^{-4}$<br>(101,03%) |
| 60               | 31,670                | $1,208 \cdot 10^{-3}$ | $1,794 \cdot 10^{-4}$ | 30               | $3,700 \cdot 10^{-4}$<br>(30,62%) | $1,816 \cdot 10^{-4}$<br>(101,21%) |



**Rys. 4.** Wykres amplitudy  $a_1$  w zależności od częstości wymuszenia  $\omega$  dla współczynnika sztywności skrętniej  $k = 10000 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$  oraz  $k = 5000 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$



**Rys. 5.** Wykres amplitudy  $a_2$  w zależności od częstotliwości wymuszenia  $\omega$  dla współczynnika sztywności skrętnego  $k = 10000 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$  oraz  $k = 5000 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$

Na rysunkach 4 i 5 przedstawiono wyniki symulacji dla wybranego przypadku obliczeniowego wyróżnionego w tabeli 1. Rysunek 4 przedstawia wykres amplitudy  $a_1$  w zależności od częstotliwości wymuszenia  $\omega$ . Początkowo układ znalazł się w otoczeniu punktu rezonansowego A (współczynnik sztywności skrętnego sprzęgła wynosił  $k = 10000 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$  natomiast częstota wymuszenia wynosiła  $\omega = 578 \text{ rad/s}$  i była bliska częstota drgań wymuszonych  $\omega_0$ ). W punkcie tym wartość amplitudy wynosiła  $a_1 = 9,017 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$ . Zmiana współczynnika sztywności skrętnego zgodnie ze wzorem (13) z wartości  $k = 10000 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$  do  $k = 5000 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$  spowodował „przejście” układu do punktu B i zmniejszenie amplitudy do wartości  $a_1 = 1,046 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$  (ponad 86 razy mniejszej niż w punkcie A).

Rysunek 5 przedstawia wykres amplitudy  $a_2$  w zależności od częstotliwości wymuszenia  $\omega$ . W tym przypadku zmniejszenie wartości  $a_2$  nie jest tak znaczne jak dla  $a_1$ . Zmniejszenie współczynnika sztywności skrętnego z wartości  $k = 10000 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$  do  $k = 5000 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$  spowodowało spadek wartości amplitudy  $a_2$  z  $1,177 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$  do  $1,050 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$  (punkty A i B).

## 6. Wnioski

Na podstawie rozważań przeprowadzonych w pracy wynikają następujące wnioski końcowe:

- Przedstawione rozwiązanie konstrukcyjne sprzęgła podatnego (z układem sterowania) może stanowić zespół do stałej kontroli i kompensacji drgań w układach mechanicznych.
- Zmiana współczynnika sztywności skrętnego w zależności od czynnej długości sprężyn jest silnie nieliniowa. Dla założonych parametrów geometrycznych i materiałowych współczynnik ten zmienia się od  $30,6 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$  w przypadku maksymalnej czynnej długości sprężyn  $L_{max} = 105 \text{ mm}$  do  $283500 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$  w przypadku minimalnej czynnej długości sprężyn  $L_{min} = 5 \text{ mm}$ .
- Liniowa zmiana wartości współczynnika sztywności skrętnego  $k$  powoduje nieliniową zmianę amplitudy przemieszczenia kąowego tarczy czynnej sprzęgła  $a_1$ . Amplituda ta maleje i wynosi od 0,74% do 30,62% amplitudy  $a_1$  przed zmianą, przy czym wzrost powyżej 10% dotyczy wartości współczynnika sztywności skrętnego  $k$  poniżej  $80 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$ .

- Zmiana współczynnika  $k$  wpływa w mniejszym stopniu na amplitudę przemieszczenia kąowego tarczy biernej  $a_2$ . Dla wartości  $k$  powyżej 1250 N·m/rad  $a_2$  maleje w zakresie 82,56% do 98,80% amplitudy przed zmianą, a dla  $k$  poniżej 630 N·m/rad pojawia się wzrost wartości  $a_2$  do 101%.

## Bibliografia

1. Cempel Cz. Minimalizacja drgań maszyn i ich elementów. w: Współczesne zagadnienia dynamiki maszyn. Wrocław: Ossolineum, 1976.
2. Filipowicz K. Determining of the static characteristics of a torsionally flexible metal coupling. *Acta Montanistica Slovaca* 2007; 12(4): 304-308.
3. Filipowicz K. Research of metal flexible torsional clutches applied in mining machines. *Acta Montanistica Slovaca* 2008; 13(2): 204-210.
4. Filipowicz K. Nowe rozwiązania układów napędowych maszyn z metalowymi sprzęgłami podatnymi skrętnie i sprzęgłami przeciążeniowymi. *Przegląd Mechaniczny* 2009; 2: 41-46.
5. Filipowicz K. Badania układów napędowych maszyn roboczych ze sprzęgłami podatnymi. *Maszyny Górnicze* 2010; 2: 3-12.
6. Filipowicz K, Kuczaj M. Kinematic and dynamic simulation of the functioning of torsionally flexible metal coupling. *Transport Problems* 2010; 5(3): 95-102.
7. Kołodziej P, Stępniewski A. Sprzęgło podatne. Patent nr PL 193910 B1 z marca 2007.
8. Kowal A. Sprzęgło metalowe o budowie modułowej umożliwiającej dobór podatności skrętnej. *Technologia i Automatyzacja Montażu* 2006; 2: 64-66.
9. Kowal A. Sprzęgło mechaniczne. Patenty nr PL 190945 B1 i PL 191092 B1 z lutego 2006.
10. Kowal A. Metalowe sprzęgło przeciążeniowe o dużej podatności skrętnej. *Szybkobieżne Pojazdy Gąsienicowe* 2007; 1(22): 105-112.
11. Kuczaj M, Filipowicz K. Computer finite element analysis of stress derived from particular unit of torsionally flexible metal coupling. *Transport Problems* 2010; 5(4): 19-26.
12. Podstawy Konstrukcji Maszyn. Red. M. Dietrich. Wyd. 3. T. 3. Warszawa: WNT 1999.
13. Slavicek J, Bollinger J G. Design and application of a self-optimizing damper for increasing machine tool performance. *Advances in Machine Tool Design and Research ; Proceedings of the Tenth International Machine Tool Design and Research Conference* 1969: 71–81.
14. Wrotny L T. Dynamika układów mechanicznych. Repetytorium teoretyczne i zadania. Warszawa: Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 1995.