Biuletyn WAT
Vol. LXII, Nr 3, 2013

Metoda dyskretyzacji częściowej w analizie drgań własnych niejednorodnych płyt kołowych z wtrąceniami w postaci masy pierścieniowej

KRZYSZTOF KAMIL ŻUR[1,2], JERZY JAROSZEWICZ[1]

[1]Politechnika Białostocka, Wydział Zarządzania, Katedra Zarządzania Produkcją,
16-001 Kleosin, ul. Ojca Tarasiuka 2, j.jaroszewicz@pb.edu.pl
[2]Politechnika Białostocka, Wydział Mechaniczny, Zakład Inżynierii Produkcji,
15-351 Białystok, ul. Wiejska 45C, k.zur@pb.edu.pl

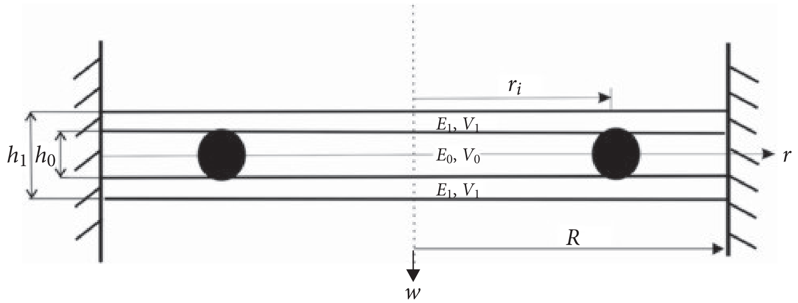
Streszczenie. W pracy wykorzystano funkcję wpływu i metodę dyskretyzacji częściowej do analizy drgań własnych trójwarstwowej płyty kołowej typu „sandwich", o stałej grubości i utwierdzonej na obwodzie. Wyznaczono sztywność zastępczą płyty oraz dokonano dyskretyzacji jej masy uwzględniając niejednorodność materiału. Konstruując macierz wpływu oraz wykorzystując wzory Bernsteina-Kieropiana, obliczono dokładne i przybliżone estymatory częstości drgań własnych płyty. W pracy zbadano wpływ pierścieniowej masy skupionej i symetrycznej niejednorodności materiału płyty na jej częstości drgań własnych.
Słowa kluczowe: drgania własne, płyta kołowa, niejednorodność, masa pierścieniowa

1. Wstęp

Efektywną metodą analizy prowadzącej do otrzymania charakterystyk dynamicznych niejednorodnych płyt z dodatkowymi masami jest metoda oparta na zastosowaniu teorii funkcji uogólnionych. Efekt masy skupionej jest wprowadzany do równań wyjściowych przy użyciu funkcji δ-Diraca, przy czym gęstość masy skupionej jest dodawana do gęstości płyty. W ten sposób można uwzględnić wpływ bezwładności masy skupionej. Metoda wprowadzenia masy skupionej do równań różniczkowych za pomocą funkcji uogólnionych jest stosowana również w obliczeniach szerokiej klasy powłok o małym wzniosie, zamkniętych cylindrycznych oraz sferycznych.

W niniejszej pracy przedstawiono metodę dyskretyzacji częściowej bazującą na funkcji wpływu $G(x, \alpha)$, będącej iloczynem funkcji Cauchy'ego $K(x, \alpha)$ i funkcji Heaviside'a $H(x)$. Płytę o ciągłym lub ciągło-dyskretnym rozkładzie masy zastępuje się układami dyskretnymi przy zachowaniu ciągłej funkcji sztywności. Masę płyty skupia się na pierścieniach o określonych promieniach r_i. Sumaryczna masa układu zastępczego pozostaje równa masie własnej płyty.

Efektywność wyżej wymienionego aparatu matematycznego pokazano na przykładzie analizy drgań własnych trójwarstwowej płyty kołowej typu „sandwich" z masą dodatkową. Zaprezentowano wpływ pierścieniowej masy skupionej i niejednorodności materiału symetrycznie rozłożonego względem warstwy środkowej płyty na jej częstość drgań własnych ω_0. Przykład płyty rozważanej w niniejszej pracy przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Model niejednorodnej płyty kołowej typu „sandwich" utwierdzonej na obwodzie, gdzie: r — współrzędna promieniowa; w — funkcja ugięcia płyty; R — promień płyty; r_i — promień rozłożenia masy pierścieniowej; E_k, ν_k — odpowiednio moduł Younga, liczba Poissona k-tej warstwy; h_0 — grubość warstwy wewnętrznej; h_1 — grubość płyty

2. Sformułowanie zagadnienia brzegowego drgań osiowosymetrycznych niejednorodnej płyty kołowej z wtrąceniami masowo-sprężystymi

Równanie drgań osiowosymetrycznych płyty kołowej w kartezjańskim układzie współrzędnych (W, r) przyjmuje postać [8]:

$$D\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right)+\frac{\partial D}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right)=-\frac{1}{r}\int_0^r sh\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}rdr, \tag{1}$$

która po rozdzieleniu zmiennych przez podstawienie $W = w(r)e^{i\omega t}$ oraz przyjęciu sztywności walcowej $D = D_0 r^m \left(D_0 = \dfrac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)} \right)$ ma formę [2]:

$$r^4\frac{d^4w}{dr^4}+(2m+2)r^3\frac{d^3w}{dr^3}+\left(m+\nu m-1+m^2\right)r^2\frac{d^2w}{dr^2}+$$
$$+\left(\nu m^2-\nu m-m+1\right)r\frac{dw}{dr}-\frac{12s\omega^2\left(1-\nu^2\right)}{Eh_0^2}r^{4-\frac{2}{3}m}w=0, \tag{2}$$

gdzie: r — współrzędna promieniowa ($0 < r \le R$);
ν — liczba Poissona;
E — moduł Younga;
m — współczynnik zmiany grubości i sztywności płyty;
h_0 — grubość płyty;
ς — masa właściwa płyty;
ω — częstość drgań własnych;
$w(r)$ — funkcja ugięcia płyty.

Chcąc przejść od równania ruchu (2) do zagadnienia brzegowego niejednorodnej płyty kołowej o stałej grubości z wtrąceniami masowo-sprężystymi i utwierdzeniu na obwodzie (rys. 1), należy:
- podzielić równanie (2) przez współrzędną promieniową r w najwyższej (czwartej) potędze,
- przyjąć za współczynnik zmiany grubości i sztywności płyty $m = 0$,
- wyznaczyć sztywność zastępczą D_z wynikającą z niejednorodności materiału,
- przyjąć odpowiednie warunki brzegowe.

Równanie drgań osiowosymetrycznych niejednorodnej płyty kołowej o stałej grubości z wtrąceniami w postaci mas i sprężyn skupionych można przedstawić w postaci [4]:

$$L[w]-\frac{M}{D_z}\omega^2 w-\sum_{i=1}^{K}\alpha_i w(r_i)\delta(r-r_i)=0, \tag{3}$$

gdzie:
$$L[w]\equiv\frac{d^4w}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3w}{dr^3}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr}, \tag{4}$$

$$M=s_1\left(h_1-h_0+h_0\frac{s_0}{s_1}\right), \tag{5}$$

$$D_z=2\left[\int_0^{h_0/2}\frac{E_0w^2}{1-\nu_0^2}dw+\int_{h_0/2}^{h_1/2}\frac{E_1w^2}{1-\nu_1^2}dw\right]=\frac{1}{12}\left[\frac{E_0h_0^3}{1-\nu_0^2}+\frac{E_1\left(h_1^3-h_0^3\right)}{1-\nu_1^2}\right], \tag{6}$$

$$\alpha_i=D_z^{(-1)}(m_i\omega^2-c_i),(i\in<1\div K>). \tag{7}$$

W powyższych wzorach przyjęto oznaczenia: $L[w]$ — operator różniczkowy równania Eulera dla płyty o stałej grubości, s_0, s_1 — masa właściwa odpowiednio warstwy wewnętrznej i zewnętrznej, D_z — sztywność zastępcza trójwarstwowej płyty kołowej, α_i — parametr wtrąceń, m_i — masa skupiona, c_i — sztywność sprężystych podpór (dla rozważanej płyty $c_i = 0$), K — liczba wtrąceń, h_0, h_1 — odpowiednio grubość warstwy wewnętrznej i grubość całej płyty.

Dla płyty kołowej utwierdzonej na obwodzie przyjęto warunki brzegowe w następującej postaci [9]:

$$w(R)=0,\ \theta(R)=\frac{dw}{dr}(R)=0,\quad w(0)<\infty,\qquad \theta(0)=\frac{dw}{dr}(0)=0. \tag{8}$$

Rozwiązanie zagadnienia brzegowego (3), (8) wraz z jego pochodnymi musi być ograniczone w $r = 0$. Takich rozwiązań może istnieć więcej niż dwa, więc należy wybrać te najbardziej gładkie.

3. Dyskretyzacja masy niejednorodnej płyty kołowej o stałej grubości

Promień rozłożenia masy własnej płyty r_i, podobnie jak w poprzednich pracach, przyjęto w następującej postaci [4]:

$$r_i = \frac{R(2i-1)}{K},\ i \in <1, K>. \tag{9}$$

Masy wynikające z dyskretyzacji wyprowadza się na podstawie drugiego twierdzenia Guldina-Pappusa dotyczącego objętości płyty, które ma postać [6]:

$$V = 2\pi CA, \tag{10}$$

gdzie: C — odległość środka ciężkości elementu płyty od osi obrotu;
A — pole powierzchni elementu płyty.

Korzystając z zależności wyprowadzonych w poprzednich pracach, opracowano wzór dla i-tej masy trójwarstwowej płyty o stałej grubości w następującej postaci:

$$\frac{m_i}{2\pi} = \aleph_i \cdot R^2 \cdot s_1 \left(h_1 - h_0 + h_0 \frac{s_0}{s_1} \right), \quad \aleph_i = \frac{1+2(i-1)}{2K^2}. \tag{11}$$

Suma mas pochodzących z dyskretyzacji musi być równa całkowitej masie płyty:

$$\sum_{i=1}^{K} \frac{m_i}{2\pi} = \pi R^2 s_1 \left(h_1 - h_0 + h_0 \frac{s_0}{s_1} \right). \tag{12}$$

W poniższej tabeli przedstawiono dla płyty o stałej grubości przykładowe wartości $\aleph_i$ dla stopnia dyskretyzacji $K \in < 1 \div 3 >$.

TABELA 1

Wartość współczynnika $\aleph_i$ dla stopnia dyskretyzacji $K \in < 1 \div 3 >$

K	$\aleph_i$
1	$\aleph_1 = \frac{1}{2}$
2	$\aleph_1 = \frac{1}{2 \cdot 4},\ \aleph_2 = \frac{3}{2 \cdot 4}$
3	$\aleph_1 = \frac{1}{2 \cdot 9},\ \aleph_2 = \frac{3}{2 \cdot 9},\ \aleph_3 = \frac{5}{2 \cdot 9}$

Można uwzględnić dodatkową masę skupioną m_0 ujętą we wzorze (7) na okręgach o promieniach r_0 w postaci stosunków:

$$\mu_0 = \frac{m_0}{\pi R^2 s_1 \left(h_1 - h_0 + h_0 \frac{s_0}{s_1} \right)}, \qquad \chi_0 = \frac{r_0}{R}. \tag{13}$$

Promień masy dodatkowej musi spełniać warunek $0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_K < R$, a jej wartość zgodnie z publikacją [7] powinna mieć $\mu_0 \le 0,2$.

4. Wyznaczenie częstości drgań własnych niejednorodnej płyty kołowej o stałej grubości

4.1. Konstrukcja macierzy wpływu

Ograniczone w zerze rozwiązanie równania Eulera (4) $L[w] = 0$ dla płyty o stałej grubości ma postać [3]:

$$w(r) = C_0 + C_1 r^2 - F_j \cdot K_0(r, r_j) \cdot H(r - r_j), \tag{14}$$

gdzie: C_i — dowolne stałe;
$H(r)$ — funkcja Heaviside'a;
F_j — siła jednostkowa rozłożona na okręgu r_j;
$K_0(r, r_j)$ — fundamentalna funkcja operatora $L[w]$, która ma postać:

$$K_0(r, r_j) = \frac{r_j}{4}\left[r_j^2 - r^2 + \left(r^2 + r_j^2\right) ln \frac{r_j}{r}\right]. \tag{15}$$

Podstawiając ograniczone w zerze rozwiązanie (14) do dwóch pierwszych warunków brzegowych (8), obliczono stałe całkowania C_0, C_1, a następnie biorąc pod uwagę $\beta_{ij} = u_j(r_i)$ przy $F_j = 1$, otrzymano wzór na współczynniki podatności w postaci [5]:

$$\beta_{ij} = \frac{1}{2R}\left(K_0'\left(R, r_j\right) \cdot \left(R^2 - r_i^2\right) - 2R \cdot K_0\left(R, r_j\right)\right). \tag{16}$$

Dokonując odpowiednich przekształceń, otrzymano:

$$\beta_{ij} = \frac{R^2}{8}\left(1 - \frac{r_j^2 - r_i^2}{R^2} - \frac{r_j^2 r_i^2}{R^4} + 2\frac{r_j^2 + r_i^2}{R^2} ln \frac{r_j}{R}\right), \qquad i \le j, \tag{17}$$

$$\beta_{ij} = \beta_{ji}, \quad \beta_{ii} = \frac{R^2}{8}\left(1 - \frac{r_i^4}{R^4} + \frac{4r_i^2}{R^2} ln \frac{r_j}{R}\right). \tag{18}$$

Podstawiając zależności $\chi_i = \frac{r_i}{R}$ i $\chi_j = \frac{r_j}{R}$ otrzymano wzór na współczynniki podatności w postaci:

$$\beta_{ij} = \frac{R^2}{8}\left(1 + \chi_i^2 - \chi_j^2 - \chi_i^2 \chi_j^2 + 2\left(\chi_i^2 + \chi_j^2\right) ln\chi_j\right). \tag{19}$$

4.2. Wzory Bernsteina-Kieropiana w analizie częstości drgań własnych niejednorodnej płyty kołowej z wtrąceniami w postaci masy pierścieniowej

Wykorzystując równanie małych drgań w postaci odwrotnej danego modelu płyty bez dodatkowej masy, w ujęciu opartym o przemieszczenia $K = 2$ [3]:

$$\sum_{j=1}^{2} M_j \beta_{ij} \frac{d^2 q_j}{dt^2} + q_i = 0, \quad M_j = \frac{m_j}{2\pi} \tag{20}$$

oraz wzór (18), (19), otrzymano równanie charakterystyczne w postaci:

$$\Delta = a_0 - a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 = 0, \tag{21}$$

gdzie:

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = \sum_{i=1}^{2} \frac{m_i}{2\pi} \beta_{ii} \qquad a_2 = \frac{m_1 m_2}{4\pi^2} \left(\beta_{11} \beta_{22} - \beta_{12}^2 \right), \tag{22}$$

$$\lambda = \omega^2 \frac{R^4 s_1 \left(h_1 - h_0 + h_0 \dfrac{s_0}{s_1} \right)}{D_z}. \tag{23}$$

Wprowadzając masę dodatkową $\frac{m_0}{2\pi}$ oraz biorąc pod uwagę stosunek jej do masy płyty μ_0, a także stosunek jej promienia rozłożenia do promienia płyty $\chi_0 = \frac{r_0}{R}$ otrzymano równanie charakterystyczne w następującej postaci:

$$\tilde{\Delta} = \tilde{a}_0 - \tilde{a}_1 \lambda + \tilde{a}_2 \lambda^2 = 0, \tag{24}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} &\tilde{a}_0 = 1 \quad \tilde{a}_1 = \frac{m_{00}}{2\pi} \beta_{00} + a_1 \\ &\tilde{a}_2 = \frac{m_0 m_1}{4\pi^2} \left(\beta_{00} \beta_{11} - \beta_{01}^2 \right) + \frac{m_0 m_2}{4\pi^2} \left(\beta_{00} \beta_{22} - \beta_{02}^2 \right) + a_2 . \end{aligned} \tag{25}$$

Można zauważyć, że dodatkowa masa zwiększa stopień dyskretyzacji o jeden ($K + 1$). Wzory na współczynniki szeregu charakterystycznego (24) dla $K > 2$ można wyrazić w postaci:

$$\tilde{a}_0 = 1 \qquad \tilde{a}_1 = \sum_{i=0}^{K} \frac{m_i}{2\pi} \beta_{ii} \qquad \tilde{a}_2 = \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{j=i+1}^{K} \frac{m_i m_j}{4\pi^2} \begin{vmatrix} \beta_{ii} & \beta_{ij} \\ \beta_{ji} & \beta_{jj} \end{vmatrix} . \tag{26}$$

Chcąc wyznaczyć estymatory podstawowej częstości drgań płyty niejednorodnej, stosujemy znane wzory Bernsteina-Kieropiana [1] z uwzględnieniem sztywności zastępczej i masy płyty:

$$\omega_0 = \gamma_0 \frac{1}{R^2} \sqrt{\frac{D_z}{s_1\left(h_1 - h_0 + h_0 \frac{s_0}{s_1}\right)}}, \quad \gamma_0 = \frac{(y_-) + (y_+)}{2}, \tag{27}$$

gdzie odpowiednio dolny i górny estymator współczynnika częstości podstawowej ma postać:

$$(y_-) = \left(\frac{\tilde{a}_0}{\sqrt{\tilde{a}_1^{\,2} - 2\tilde{a}_0 \tilde{a}_2}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (y_+) = \left(\frac{2\tilde{a}_0}{\tilde{a}_1 + \sqrt{\tilde{a}_1^{\,2} - 4\tilde{a}_0 \tilde{a}_2}} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{28}$$

Wykorzystując tablice Bernsteina-Kieropiana [1], można oszacować trzy kolejne częstości drgań własnych oraz wyznaczyć przybliżoną wartość czwartej. W pierwszej kolejności należy obliczyć stosunek B_2 / B_1^2, gdzie:

$$B_1 = \frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_0}, \quad B_2 = \left(\frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_0} \right)^2 - 2\frac{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2}{\tilde{a}_0^{\,2}}. \tag{29}$$

Odczytując z tabeli załączonej do pracy [1] odpowiednie parametry oraz wykorzystując poniższe wzory:

$$(\gamma_i)_- = \sqrt[4]{\frac{\varphi_i}{B_1}}, \quad (\gamma_i)_+ = \sqrt[4]{\frac{\beta_i}{B_1}}, \quad (i = 1,2,3), \tag{30}$$

$$\gamma_4 \approx \sqrt[4]{\frac{\psi}{B_1}} \tag{31}$$

można, przy wykorzystaniu wzoru (27), obliczyć estymatory kolejnych częstości drgań własnych płyty.

5. Przykład obliczeń częstości drgań własnych płyty kołowej jednorodnej, niejednorodnej i niejednorodnej z masą skupioną

Można zauważyć, że estymator podstawowej częstości drgań γ dla płyty jednorodnej i niejednorodnej o stałej grubości ma tę samą wartość. Wynika to z występowania liczby Poissona ν jedynie w sztywności płyty D_0, D_z, a nie we współczynnikach równania Eulera (4). Dla płyt kołowych o zmiennej grubości $m \neq 0$ należy uwzględnić odpowiednio dla płyty jednorodnej i niejednorodnej liczbę Poissona ν oraz zastępczą liczbę Poissona ν_z. Liczby Poissona wpływają na wartość współczynnika stojącego przy członach $\frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2}$ i $r\frac{dw}{dr}$ równania Eulera, a tym samym na postać jego rozwiązania $K_0(r, r_j)$.

We wzorach wynikających z dyskretyzacji masy $\frac{m_i}{2\pi}$ (11) oraz we wzorze na podatność β_{ij} (19) można pominąć odpowiednie wyrażenia:

— dla płyty jednorodnej pomijamy we wzorze (11) człon $R^2 sh$, a we wzorze (19) człon R^2,

— dla płyty niejednorodnej i niejednorodnej z masą skupioną pomijamy we wzorze (11) człon $R^2 s_1\left(h_1 - h_0 + h_0\frac{s_0}{s_1}\right)$, a we wzorze (19) również człon R^2.

Pominięte wyrażenia zostaną uwzględnione przy obliczaniu wartości bezwzględnej częstości drgań ω_0 (27). W analizie drgań płyty o stałej grubości przyjęto stopień dyskretyzacji $K = 2$. W pracy [5] pokazano, że przy takim stopniu dyskretyzacji błąd bezwzględny estymatora γ wyniesie 6,8% w porównaniu z wartością ścisłą.

Wyniki obliczeń estymatorów podstawowej częstości drgań γ dla płyty jednorodnej i niejednorodnej przedstawiono w poniższej tabeli.

Tabela 2

Wyniki obliczeń promieni r_i, mas m_i, macierzy podatności $[\beta]$ i estymatorów γ częstości drgań własnych płyty kołowej jednorodnej i niejednorodnej

Płyta jednorodna i niejednorodna o stałej grubości	
$\frac{m_i}{2\pi}$	$\frac{m_1}{2\pi} = \aleph_1 = \frac{1}{2\cdot 4}$, $\frac{m_2}{2\pi} = \aleph_2 = \frac{3}{2\cdot 4}$
χ_i	$\chi_1 = \frac{1}{2}$, $\chi_2 = \frac{3}{4}$
β_{ij}	$\beta_{ij} = \begin{bmatrix} 0{,}08119 & 0{,}01315 \\ 0{,}01315 & 0{,}00454 \end{bmatrix}$
a_0 a_1 a_2	1 0,01185 0,0000092
γ_- γ_+ γ_0	9,5142 9,5279 9,5211

Obliczając estymator γ podstawowej częstości drgań niejednorodnej (jednorodnej) płyty kołowej z masą pierścieniową, musimy zwiększyć stopień dyskretyzacji ($K = 3$), zdefiniować stosunek masy pierścieniowej do masy płyty (13) ($\mu_0 = 0{,}1$) oraz stosunek promienia masy skupionej do promienia płyty (13) ($\chi_0 = 0{,}02$). Wyniki obliczeń estymatorów podstawowej częstości drgań γ dla płyty niejednorodnej (jednorodnej) z masą skupioną przedstawiono w poniższej tabeli.

Tabela 3

Wyniki obliczeń promieni r_i, mas m_i, macierzy podatności $[\beta]$ i estymatorów γ częstości drgań własnych płyty kołowej jednorodnej i niejednorodnej z masą skupioną

Płyta jednorodna i niejednorodna o stałej grubości z masą skupioną	
$\frac{m_i}{2\pi}$	$\frac{m_0}{2\pi} = \aleph_0 = \frac{1}{4\cdot 5},\quad \frac{m_1}{2\pi} = \aleph_1 = \frac{1}{2\cdot 4},\quad \frac{m_2}{2\pi} = \aleph_2 = \frac{3}{2\cdot 4}$
χ_i	$\chi_0 = \frac{1}{50},\quad \chi_1 = \frac{1}{2},\quad \chi_2 = \frac{3}{4}$
β_{ij}	$\beta_{ij} = \begin{bmatrix} 0{,}1242 & 0{,}09543 & 0{,}01422 \\ 0{,}0955 & 0{,}08119 & 0{,}01315 \\ 0{,}0142 & 0{,}01315 & 0{,}00453 \end{bmatrix}$
$\tilde{a}_0$	1
$\tilde{a}_1$	0,01810
$\tilde{a}_2$	0,0000224
γ_-	7,711
γ_+	7,723
γ_0	7,717

Uzyskane wyniki z tabeli 1 i tabeli 2 zgadzają się z wynikami umieszczonymi w pracy [3]. Chcąc obliczyć wartość bezwzględną częstości drgań własnych ω_0 płyty kołowej jednorodnej, niejednorodnej i niejednorodnej z masą skupioną, wykorzystamy model płyty o parametrach przedstawionych w tabeli 4. Należy pamiętać z teorii płyt cienkościennych Kirchoffa-Love'a [8], że grubość płyty h musi spełniać warunek:

$$h < \frac{R}{5}. \tag{32}$$

Tabela 4

Parametry rozpatrywanych płyt kołowych o stałej grubości

Rodzaj płyty	Materiał	$\varsigma \left[\frac{kg}{m^3}\right]$	$E\left[\frac{N}{m^2}\right]$	ν	R [m]	h [m]
Jednorodna	Stal St3	8100	$2{,}06 \times 10^{11}$	0,27	0,25	0,0009
Trójwarstwowa	Stal St3 Aluminium	8100 2700	$2{,}06 \times 10^{11}$ $0{,}7 \times 10^{11}$	0,27 0,33	0,25	$h_0 = 0{,}00065$ $h_1 = 0{,}0009$

Wykorzystując wzory na sztywność walcową płyty jednorodnej D_0, sztywność zastępczą D_z (6), masę M (6) oraz częstość podstawową drgań własnych ω_0 (27), wykonano obliczenia dla płyt z tabeli 4, które zestawiono w tabeli 5.

Tabela 5

Obliczenia dla płyt umieszczonych w tabeli 4

Rodzaj płyty	γ_0	ω_0
Jednorodna	9,5194	207,21
Trójwarstwowa	9,5194	177,42
Trójwarstwowa z masą skupioną	7,717	143,82

6. Wnioski

W pracy zbadano wpływ niejednorodności materiału i dodatkowej masy pierścieniowej [13] na drgania własne płyty kołowej utwierdzonej na obwodzie. W sposób klasyczny wyznaczono sztywność zastępczą płyty [10], a następnie wykorzystano w analizie drgań własnych metodę dyskretyzacji częściowej zaproponowanej w pracach [3, 4]. Model rozważanej płyty spełnia hipotezę Kirchoffa-Love'a, co pozwala pominąć bezwładność obrotową płyty oraz współczynnik ścinania [11]. Założono w pracy idealny kontakt mechaniczny pomiędzy poszczególnymi warstwami i stałość parametrów względem grubości każdej z warstw. W pracy [4] pokazano, że stopień dyskretyzacji $K = 15$ daje wyniki różniące się od wartości ścisłej około 1%. Stosując metody numeryczne (MES), można spotkać się z problemami generacji odpowiednio zagęszczonej siatki, potrzebnej dużej mocy obliczeniowej oraz weryfikacji uzyskanego rozwiązania. Jednak obie metody MES i MDC wzajemnie się uzupełniają.

Dalsze prace powinny skupić się na:

— badaniach numerycznych (MES) i eksperymentalnych w celu weryfikacji uzyskanych rozwiązań,

— zbadaniu wpływu niejednorodności materiału w postaci pokrycia gradientowego [11, 12] oraz wtrąceń w postaci sprężystych podpór [13] na drgania własne i stateczność płyt kołowych Kirchoffa-Love'a i Reissnera-Mindlina oraz porównaniu wyników z wynikami przedstawionymi w niniejszej pracy.

LITERATURA

[1] S.A. Bernstein, K.K. Kieropian, *Opredelenije castot kolebanij sterznevych system metodom spektralnoifunkcii*, Gosstroiizdat, Moskwa, 1960.

[2] H.D. Conway, *Some special solution for the flexural vibrations of discs of varying thickness*, Ing. Arch., B.26, 6, 1960, 1958b, 408-410.

[3] J. Jaroszewicz, L.M. Zoryj, *Metody analizy drgań osiowosymetrycznych płyt kołowych z zastosowaniem funkcji wpływu Cauchy'ego*, Monografia, Białystok, 2005.

[4] J. Jaroszewicz, L.M. Zoryj, *The method of partial discretization in free vibration problems of circular plates with variable distribution of parameters*, International Applied Mechanics, 42, 3, 2006, 364-373.

[5] J. Jaroszewicz, K.K. Żur, *Wpływ pierścieniowej masy skupionej na drgania własne płyt kołowych z typowymi warunkami brzegowymi*, Biul. WAT, 4, Warszawa, 2012, 103-114.

[6] *Mały poradnik mechanika*, praca zbiorowa, Wydanie 17., tom 1, WNT, Warszawa, 1988.

[7] R.E. Roberson, *Vibration of a clamped circural plate carrying concentrated mass*, J. Appl. Mech., 18, 4, 1951, 349-352.

[8] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill, New York, 1940.

[9] N.V. Vasylenko, O.M. Oleksiejčuk, *Teoriya kolyvań i stijkosti ruchu*, Vyshcha Shkola, Kiev, 2004.

[10] Z. Kączkowski, *Płyty — obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa, 2000.

[11] H. Thai, T. Park, D. Choi, A*n efficient shear deformation theory for vibration of functionally graded plates*, Archives of Applied Mechanics, Springer-Verlag, 2012, 1058-1072.

[12] F. Ebrahimi, A. Rastgoo, *An analytical study on the free vibration of smart circular thin FGM plate based on classical plate theory*, Thin-Walled Structures, Elsevier, 2008, 1402-1408.

[13] S. Sorokin, N. Peake, *Vibrations of sandwich plates with concentrated masses and spring like inclusions*, Journal of Sound and Vibrations, Elsevier, 2000, 203-222.

K.K. ŻUR, J. JAROSZEWICZ

The method of partial discretization in free vibration analysis of non-homogeneous circular plates with additional annular mass

Abstract. In the paper, influence function and method of partial discretization in free vibration analysis of non-homogeneous circular plate with constant thickness and clamped edges were presented. Discretization of mass of circular plate and calculation of replacing stiffness were achieved. Influence matrix and Bernstein-Kieropian's estimators were calculated. The influence of additional annular mass and non-homogeneous material on a value of natural basic frequency of a sandwich circular plate was also presented.

Keywords: free vibrations, circular plate, non-homogeneous, annular mass