ISSN 1509-5878
Nr 3
3/2013
AUTOBUSY
Technika, Eksploatacja, Systemy Transportowe

Mirosław DYTCZAK, Grzegorz GINDA, Barbara JASTRZĄBEK

IDENTYFIKACJA OPTYMALNEGO SYSTEMU TRAS PRZEWOZU TOWARU PRZY UŻYCIU METODY MONTE CARLO

Streszczenie

Przewozy towarów transportem drogowym są realizowane w wielowymiarowym dynamicznym otoczeniu. Czynniki otoczenia wpływają więc na efekty transportu. Na ogół dostępnych jest przy tym szereg możliwych tras przewozu towaru do odbiorców. Z każdą z tras wiążą się zróżnicowanej oddziaływania otoczenia o zarówno mierzalnej, jak i trudno mierzalnej naturze. Wybór właściwych tras przy uwzględnieniu wpływu tych czynników stanowi więc ważne zagadnienie praktyczne planowania systemu logistycznego zaopatrującego odbiorców w towar. W pracy przedstawiono w tym kontekście model obliczeniowy pozwalający na wybór właściwych tras drogowych z uwzględnieniem krajowej specyfiki drogowych systemów transportowych.

WSTĘP

Sprawna realizacja dostaw produktów stanowi ważny aspekt funkcjonowania systemów logistycznych przedsiębiorstw. Decyduje ona bowiem o konkurencyjności przedsiębiorstw. W efekcie determinuje więc ich istnienie i możliwość rozwoju.

Procesy transportowe odbywają się w złożonym, wielowymiarowym otoczeniu gospodarczym, społecznym i ekonomicznym. Czynniki otoczenia wywierają istotny wpływ na efekty przewozów towarów. Wpływ ten może przybierać różny – zarówno (łatwo) mierzalny jak i trudno mierzalny charakter. Dynamiczny charakter otoczenia sprawia, że pojawia się przy tym konieczność uwzględniania zmienności lokalnych oddziaływań otoczenia np. związanej z warunkami klimatycznymi, zmianami stanu technicznego dróg itp. Planując system zaopatrzenia odbiorców w towary warto więc dążyć do ograniczenia wrażliwości systemu logistycznego na zakłócenia spowodowane niekorzystnym oddziaływaniem otoczenia.

Temu celowi służy model obliczeniowy przedstawiony w pracy. Dotyczy on systemu transportowego wykorzystywanego do zaopatrywania odbiorców w towar wysyłany z centrum spedycyjnego. Towar trafia do odbiorców siecią alternatywnych dróg kołowych. Do przewozu wykorzystywane są kontenery określonej wielkości.

Każdą z dróg sieci charakteryzują parametry związane z czasem i kosztem przewozu pojedynczego kontenera oraz z niekorzystnym oddziaływaniem otoczenia. Uwzględnia się przy tym sezonowość warunków klimatycznych, utrudnienia terenowe, związane ze mianami organizacji ruchu oraz inne spodziewane utrudnienia.

Rozważane zadanie decyzyjne polega na wyborze systemu tras minimalizującego czas i koszt transportu, a także niekorzystny wpływ czynników otoczenia. W tym celu wykorzystano metodę Monte Carlo (MC). W pracy sformułowano więc odpowiedni model obliczeniowy i przedstawiono rezultaty jego zastosowania.

1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU OBLICZENIOWEGO

Załóżmy, że mamy do czynienia z siecią dróg łączących punkt spedycji z n punktami odbioru towaru. Towar powinien być co określony czas dostarczany do poszczególnych punktów odbioru. Każdy z punktów odbioru Oi charakteryzuje się określoną wielkością zapotrzebowania na towar Zi (i = 1, 2…n), nie zmieniającą się w ciągu roku. Zapotrzebowanie to jest wyrażone w jednostkach miary, które stanowi ilość kontenerów. Jest to zarazem liczba środków transportowych je przewożących.

Kontenery mogą być przewożone różnymi odcinkami dróg. Oczywiście odcinki te powinny umożliwiać ruch pojazdów ciężarowych o danym tonażu. Każdy z odcinków dróg charakteryzuje czas i koszt przejazdu pojazdu przewożącego pojedynczy kontener. Charakterystyki te mają nominalny charakter, odpowiadający przeciętnym warunkom ruchu. Dodatkowo dla każdego z odcinków ustalono współczynniki wyrażające wpływ utrudnień w ruchu. Uwzględniono przy tym wpływ czynników klimatycznych np. obniżonej temperatury, oblodzenia oraz czynników związanych ze zmianami w organizacji ruchu wynikającymi z przeprowadzania prac remontowych. Założono, że na poszczególnych odcinkach dróg w sieci transportowej występują jednorodne warunku ruchu, wyrażone przez pewien jednakowy, uśredniony na długości odcinka stopień utrudnień. Końce poszczególnych odcinków wyznaczają punkty węzłowe sieci dróg, które nie muszą być tożsame z punktami odbioru towaru.

Do opisu systemu tras wykorzystano w modelu obliczeniowym matematyczne pojęcie sieci S(G,Ψ,Φ) o łukach U reprezentujących odcinki drogi łączące poszczególne punkty węzłowe sieci drogowej wyrażone przez wierzchołki W. Strukturę sieci opisuje więc skierowany graf G(W,U), którego łukom przyporządkowano wartości charakterystyk – jednostkowego czasu i kosztu transportu oraz – dodatkowo – współczynniki zwiększające te charakterystyki z uwagi na utrudnienia klimatyczne i organizacyjne. Sieć tras powinna umożliwiać zaopatrzenie wszystkich odbiorców w towar. Zapewnia to zastosowanie odpowiedniej – dopuszczalnej postaci grafu G(W,U) do reprezentacji struktury. Przykład takiej struktury przedstawiono na rys.1. Węzeł spedycyjny wyrażono przy tym kółkiem o pogrubionym obwodzie, węzły pośrednie oznaczono kółkami o obwodzie rysowanym linią kreskową, a węzły odbiorców – kółkami o linii ciągłej.

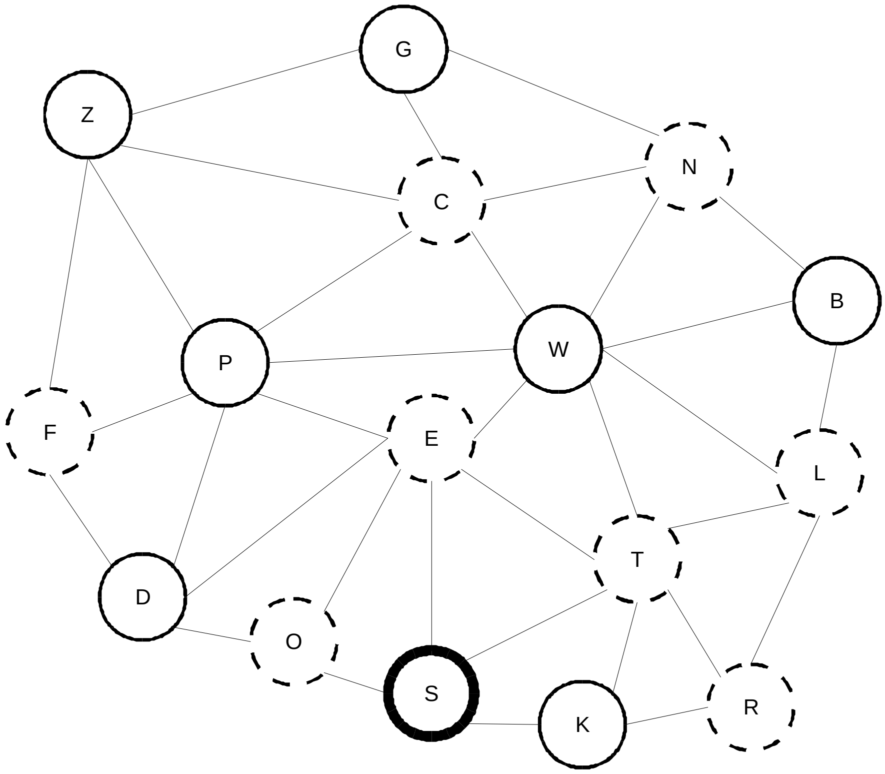
Warto przy tym zauważyć, że w skład systemu tras musi zawsze wchodzić węzeł spedycji D oraz wszystkie punkty węzłowe odbioru towarów O. Nie musimy jednak w ogóle używać pośrednich punktów węzłowych punktów P sieci drogowej. Do budowy systemu tras można bowiem wykorzystywać odcinki dróg pomijające te punkty.

Rozwiązanie zagadnienia polega na identyfikacji sieci S(G,Ψ,Φ) zapewniającej najniższy czas i koszt transportu przy uwzględnieniu możliwych utrudnień oraz zaspokojenia potrzeb odbiorców towaru. Otrzymane wartości charakterystyk sieci wynikają z wartości charakterystyk przypisanych do łuków wyrażających wykorzystane odcinki dróg. Łuki te wskazuje jednak określona struktura G(W,U). Rozwiązanie postawionego zadania jest więc równoznaczne z identyfikacją odpowiedniego skierowanego grafu.

2. MODEL OBLICZENIOWY

Warto zwrócić uwagę na fakt, że przy niewielkiej nawet liczbie odcinków tras otrzymujemy znaczną liczbę dopuszczalnych systemów tras. Zagadnienie identyfikacji właściwego grafu G*(W*,U*) ma więc kombinatoryczny charakter i jest trudne do rozwiązania. Z tego powodu zwykle nie ma możliwości uzyskania dokładnego rozwiązania i musimy się zadowolić jego przybliżeniem. Należy się przy tym postarać by uzyskać odpowiednio dobre rozwiązanie. Doświadczenia praktyczne wskazują na przydatność zastosowania w tym celu MC [Dytczak 2012]. Do przybliżenia rozwiązania wykorzystano więc następujące dwuetapowe podejście:

1. Przegląd dopuszczalnych struktur tras:
   a) losowe generowanie dopuszczalnej struktury $G(W,U)$,
   b) wyznaczenie charakterystyk sieci $S(G,\Psi,\Phi)$ służących ocenie wygenerowanej struktury.
2. Wybór najlepszej sieci $S^*(G^*,\Psi^*,\Phi^*)$ i odpowiadającej jej struktury.



Rys. 1. Przykładowa sieć połączeń drogowych

Źródło: Opracowanie własne

Dla ułatwienia zastosowania MC wykorzystano nadmiarową strukturę wyrażającą wszystkie możliwe dopuszczalne struktury tras. Stanowi ją graf G(W,U). Jego wierzchołki W reprezentują wszystkie możliwe punkty węzłowe, zaś łuki U – wszystkie odcinki sieci dróg. Można więc go zapisać w postaci sumy grafów:

$$\mathbf{G}(\mathbf{W},\mathbf{U}) = \bigcup_{i \in \Im} G_i(W_i, U_i), \tag{1}$$

gdzie: $\Im$ oznacza zbiór wszystkich dopuszczalnych struktur tras $G_i(W_i,U_i)$.

Nadmiarowa struktura w naturalny sposób reprezentuje sieć dróg. Do wyrażenia struktury można użyć macierzy przyległości wierzchołków R [3], której kolejne wiersze i kolumny odpowiadają węzłowi spedycji, n węzłom odbiorców oraz pn węzłom punktów pośrednich. Jednostkowa wartość elementu macierzy aij oznacza połączenie i-tego i j-tego wierzchołka struktury (węzła sieci dróg) krawędzią (odcinkiem drogi). Warto przy tym zwrócić uwagę na symetrię macierzy incydencji wynikającą z symetrii relacji incydencji wierzchołków struktury:

$$\underset{i,j \in \{1,2 \ldots 1+n+n_p\}}{\forall} r_{ij} = r_{ji}. \tag{2}$$

W celu wykorzystania nadmiarowej struktury do losowania dopuszczalnej struktury tras należy:

1. Wybrać liczbę uwzględnianych pośrednich punktów węzłowych $p \leq p_n$.
2. Rozpiąć drzewo na węźle spedycyjnym, węzłach odbiorców i wybranych punktach węzłowych, wykorzystując w tym celu $n + p$ krawędzi nadmiarowej struktury $\mathbf{G}(\mathbf{W},\mathbf{U})$.

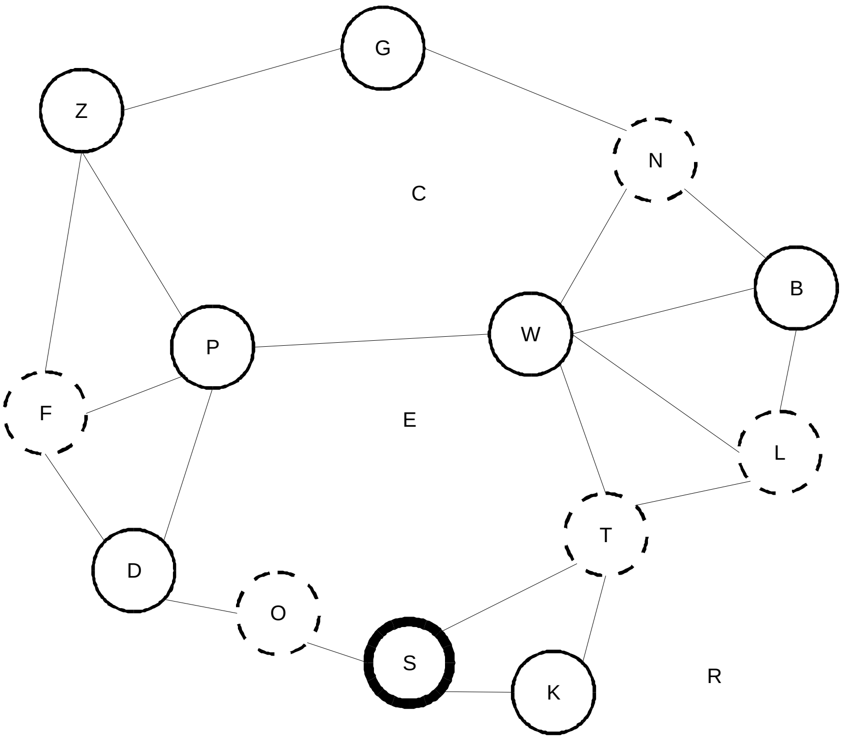
Zastosowanie macierzy R ułatwia implementację procesu losowania. Wyborowi krawędzi łączącej i-ty i j-ty wierzchołek nadmiarowej struktury tras odpowiada bowiem zachowanie w macierzy elementów jednostkowych rij i rji.

Warto przy tym zwrócić uwagę, że krawędzie wybieramy losowo ze zredukowanego zbioru. Dlatego też, dla usprawnienia wyboru można posłużyć się odpowiednią zredukowaną strukturą nadmiarową $\mathbf{G}'(\mathbf{W}',\mathbf{U}')$ otrzymaną w następujący sposób:

$$\mathbf{G}'(\mathbf{W}',\mathbf{U}') = \mathbf{G}(\mathbf{W},\mathbf{U}) \setminus \mathbf{G}''(\mathbf{W}'',\mathbf{U}''), \tag{3}$$

gdzie: $\mathbf{G}''(\mathbf{W}'',\mathbf{U}'')$ oznacza podgraf nadmiarowej struktury złożony z krawędzi incydentnych z wierzchołkami struktury nadmiarowej odpowiadającymi pominiętym węzłom pośrednim sieci dróg.

Przykład takiej struktury wydzielonej ze struktury przedstawionej na rys.1 przedstawia rys.2.



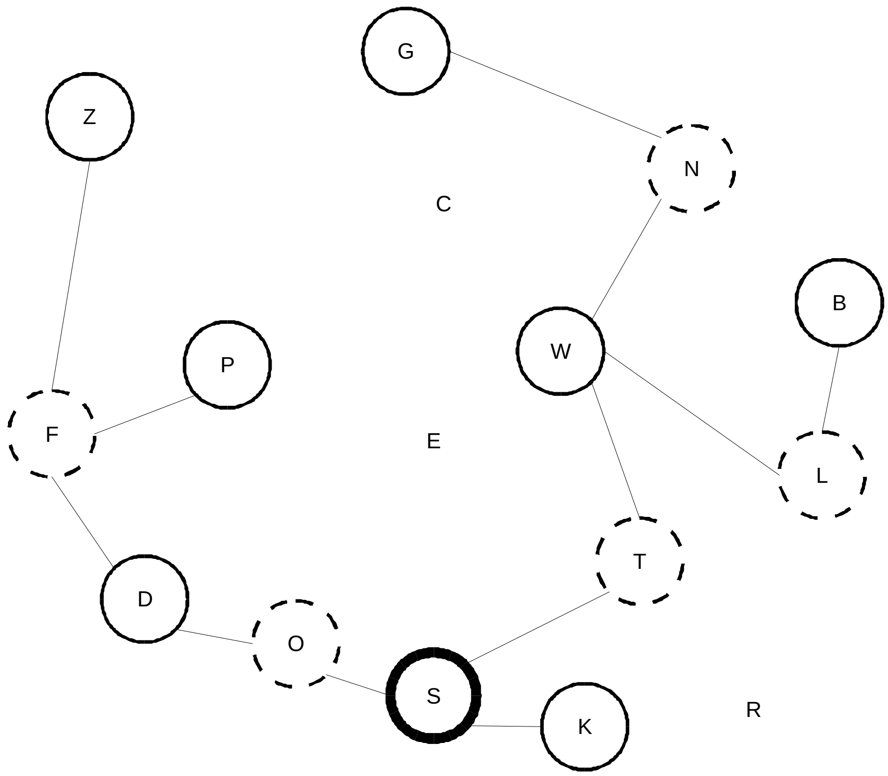
Rys. 2. Zredukowana nadmiarowa struktura sieci połączeń drogowych G’ otrzymana z sieci z rys.1

Źródło: Opracowanie własne

Oczywiście zredukowaną strukturę nadmiarową możemy wyrazić odpowiednią macierzą przyległości wierzchołków R’. Macierz tę można następnie wykorzystać w trakcie generowania struktur tras w sposób podobny do generowania struktur przy wykorzystaniu macierzy R.

W trakcie generowania drzew należy zadbać o to aby żaden z pośrednich węzłów nie był liściem. Liście drzew odpowiadają bowiem terminalnym węzłom sieci tras, związanym z odbiorem towaru. Węzły pośrednie wybrane do systemu tras stanowią natomiast zawsze elementy tranzytowe. Przykład prawidłowo wygenerowanego drzewa przedstawiono na rys.3.

Niewłaściwe położenie węzłów pośrednich w strukturze sieci stanowi tylko jeden z powodów niedopuszczalności generowanych struktur tras. Innym powodem może być brak spójności wygenerowanej struktury. W celu sprawdzenia czy wygenerowany graf jest spójny można zbadać osiągalność wierzchołków przy wykorzystaniu dowolnego wierzchołka np. węzła spedycji jako początku drogi.



Rys. 3. Przykładowe dopuszczalne drzewo wygenerowane z nadmiarowej struktury G’ z rys.2

Źródło: Opracowanie własne

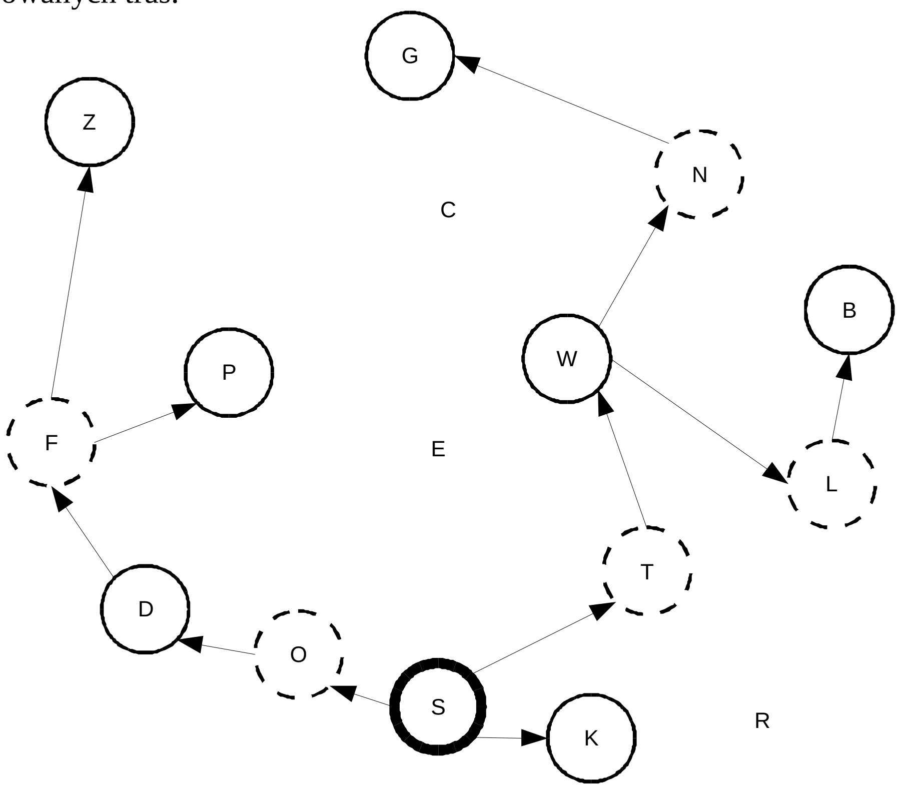
Przegląd tras można usprawnić dzięki zastosowaniu dwuwarstwowego losowania. Polega ono na wielokrotnym powtarzaniu eksperymentu numerycznego - losowaniu odpowiedniej liczby krawędzi zredukowanej nadmiarowej struktury $\mathbf{G}'(\mathbf{W}',\mathbf{U}')$ otrzymanej w rezultacie zastosowania formuły (3).

Po skonstruowaniu dopuszczalnej struktury należy na jej podstawie zbudować graf skierowany $\overline{G}(W,\overline{U})$ uwzględniający transport towaru z węzła spedycyjnego do węzłów odbiorców. Pomaga w tym uszeregowanie wykorzystanych odcinków sieci dróg i wyrażających je krawędzi wygenerowanej struktury G(W,U) w kolejności od najbliższych do najdalszych od węzła spedycyjnego. Uszeregowanie to otrzymujemy na podstawie kolejności węzłów wykorzystywanej struktury tras. Skierowany graf odpowiadający drzewu z rys.3 przedstawiono na rys.4.

Mając skonstruowany i-ty kolejny skierowany graf $\overline{G}_i(W_i,\overline{U}_i)$ możemy przystąpić do oceny odpowiadającej mu struktury tras. Służy temu funkcja czasu i kosztu przewozu towaru do odbiorców oraz stopnia utrudnień. Przyjęto przy tym, że jej wartość dla danej wygenerowanej struktury tras wynika z sumy cząstkowych wartości otrzymanych dla wykorzystanych odcinków tras:

$$F = \sum_{j=1}^{n+p} \left[N_j \cdot f\left(t_j, c_j, \mu_j\right) \right], \tag{4}$$

gdzie: f oznacza cząstkową wartość funkcji oceniającej j-ty odcinek trasy, t_j, c_j, μ_j stanowią natomiast odpowiednio nominalne wartości czasu i kosztu oraz wartość współczynnika utrudnień ($\mu_j \geq 1$) dla j-tego odcinka trasy (odniesione do przewozu pojedynczego kontenera), zaś N_j oznacza liczbę kontenerów przewożonych przez j-ty odcinek wygenerowanych tras.



Rys. 4. Graf skierowany odpowiadający drzewu z rys.3

Źródło: Opracowanie własne

Należy przy tym zwrócić uwagę na fakt, że wartości charakterystyk odpowiadających poszczególnym odcinkom tras mogą z uwagi na charakter utrudnień np. terenowych zależeć od kierunku przejazdu. Oczywiście ostateczny wybór struktury tras wynika z minimum następującej funkcji:

$$\min_{i \in \aleph} F(i). \tag{5}$$

gdzie: $\aleph$ oznacza zbiór wygenerowanych dopuszczalnych struktur tras, zaś $F(i)$ jest wartością funkcji (4) odpowiadającą zastosowaniu i-tej kolejnej struktury tras.

Cząstkowa funkcja oceny odcinka może przykładowo przyjąć następującą postać:

$$f\left(t_j, c_j, \mu_j\right) = \left[w_1 \frac{t_j}{t_{\max}} + w_2 \frac{c_j}{c_{\max}} \right] \mu_j \, . \tag{6}$$

w której: $t_{\max}$ i $c_{\max}$ oznaczają porównawcze poziomy odpowiednio: jednostkowego czasu, kosztu i stopnia utrudnień, przy czym m oznacza liczbę krawędzi nadmiarowej struktury $\mathbf{G}(\mathbf{W},\mathbf{U})$:

$$t_{\max} = \max_{j \in \{1 \ldots m\}} t_j \, , \qquad c_{\max} = \max_{j \in \{1 \ldots m\}} c_j \tag{7}$$

natomiast wartości wag w_1, w_2 spełniają warunek:

$$w_1 + w_2 = 1 \tag{8}$$

i mogą zostać wyznaczone przy wykorzystaniu dowolnego sposobu.

Stopień utrudnień odpowiadający określonemu odcinkowi drogi wynika z porównania poszczególnych odcinków dróg pod tym względem. W tym celu wygodnie jest podzielić odcinki dróg na klasy odpowiadające stopniom utrudnień wynikających z poszczególnych przyczyn. Liczba klas wynika przy tym z potrzeb związanych ze zróżnicowaniem stopnia wpływu otoczenia na utrudnienia na poszczególnych odcinkach dróg.

Należy przy tym zwrócić uwagę na fakt, że ograniczenie liczby klas odcinków upraszcza wyrażanie stopnia utrudnień spowodowanych oddziaływaniem czynników trudno mierzalnych. Dzięki temu do wyznaczenia stopnia utrudnień można przykładowo wykorzystać narzędzia, o których wspomniano w publikacji Dytczaka i Gindy [2].

Zadanie oceny odcinków dróg można znacząco usprawnić dzięki wcześniejszemu określeniu wartości poszczególnych charakterystyk tj, cj, μj odcinków, a w konsekwencji także wartości odpowiadających im funkcji f (6). Mając taką informację możemy już odpowiednio ocenić wygenerowany system tras wykorzystując zależność (4).

Warto przy tym zwrócić uwagę na fakt, że wartości charakterystyk poszczególnych odcinków dróg mogą zależeć od kierunku przejazdu. W przypadku występowania różnic w wartościach charakterystyk należy więc zastosować ich podwójny zestaw umożliwiający ocenę odcinków niezależnie od wykorzystanego kierunku przejazdu.

Zastosowanie metody Monte Carlo do losowania składników tras dowozu towaru sprawia, że przedstawione podejście ma przybliżony charakter. W jego wyniku można jednak uzyskać rozwiązania jedynie nieco gorsze od najlepszych. W tym celu należy jednak wygenerować odpowiednią liczbę dopuszczalnych drzewiastych struktur tras wynoszącą Nsym. W celu jej oszacowania można wykorzystać formułę łączącą wystarczającą liczbę eksperymentów ze zmiennością σ charakterystyk wygenerowanych struktur tras np. wartości funkcji celu (4) oraz wymaganą bezwzględną dokładnością d identyfikacji najlepszego systemu tras:

$$N_{sym} = \frac{\sigma^2 Z_{\frac{\alpha}{2}}^{\;2}}{d^2} \, , \tag{9}$$

gdzie: $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ stanowi parametr rozkładu prawdopodobieństwa, który to rozkład założono przy generowaniu dopuszczalnych struktur tras – wartość tego parametru odpowiada przyjętemu poziomowi ufności α.

Przy losowaniu pośrednich węzłów sieci przeznaczonych do usunięcia z sieci nie wyróżniamy żadnego z takich węzłów. W przypadku losowania odcinków dróg także nie wyróżniamy żadnego z nich. W trakcie losowania wykorzystujemy więc założenie o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa.

Zmienność funkcji celu (4) dla populacji dopuszczalnych struktur tras można oszacować na podstawie pewnej liczby wstępnych eksperymentów numerycznych Nwst. Wykorzystujemy w tym celu odchylenie średnie funkcji celu (4) wygenerowanej wstępnie reprezentacji populacji:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{wst}}} \left[F(i) - \overline{F}\right]^2}{N_{\mathrm{wst}} - 1}}, \tag{10}$$

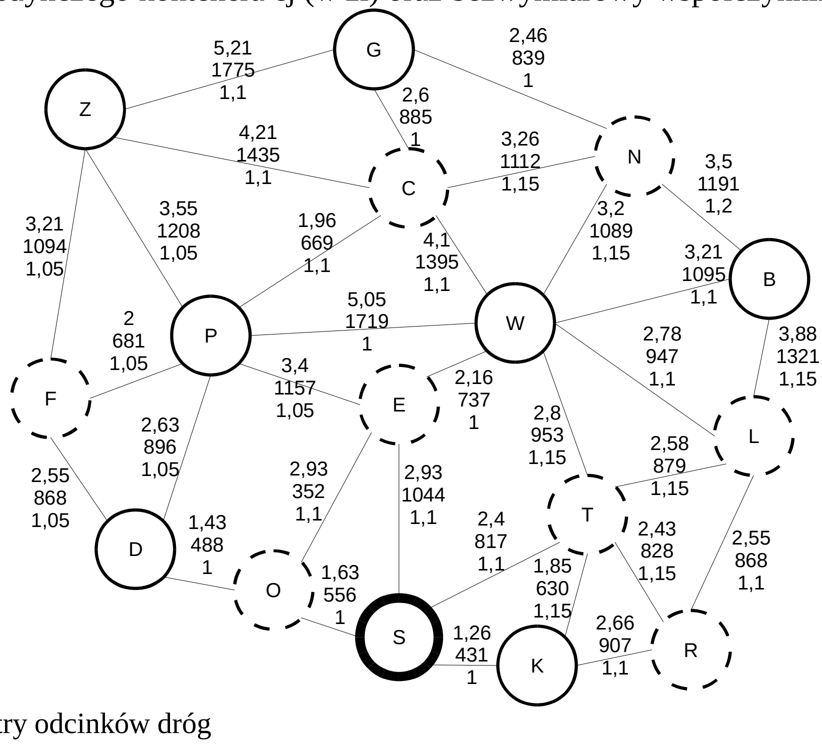
gdzie: $\overline{F}$ oznacza uzyskaną średnią wartości funkcji celu (4):

$$\overline{F} = \frac{1}{N_{\mathrm{wst}}} \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{wst}}} F(i). \tag{11}$$

Oszacowanie wymaganej liczby eksperymentów numerycznych można oczywiście uaktualniać w trakcie wielokrotnego powtarzania eksperymentów numerycznych.

3. REZULTATY PRZYKŁADOWYCH OBLICZEŃ

Przykładowe zagadnienie dotyczy nadmiarowej sieci drogowej przedstawionej na rys.1. Zapotrzebowanie każdego z odbiorców wynosi 1 kontener. Wartości wag określających znaczenie czasu i kosztu transportu ustalono na poziomie w1 = w2 = 0,5. Na rys.5. przedstawiono wykorzystane wartości parametrów odcinków dróg. W przypadku j-tego odcinka sieci zaprezentowano je w kolejności: czas przejazdu tj (wyrażony w h), koszt transportu pojedynczego kontenera cj (w zł) oraz bezwymiarowy współczynnik utrudnień µj.



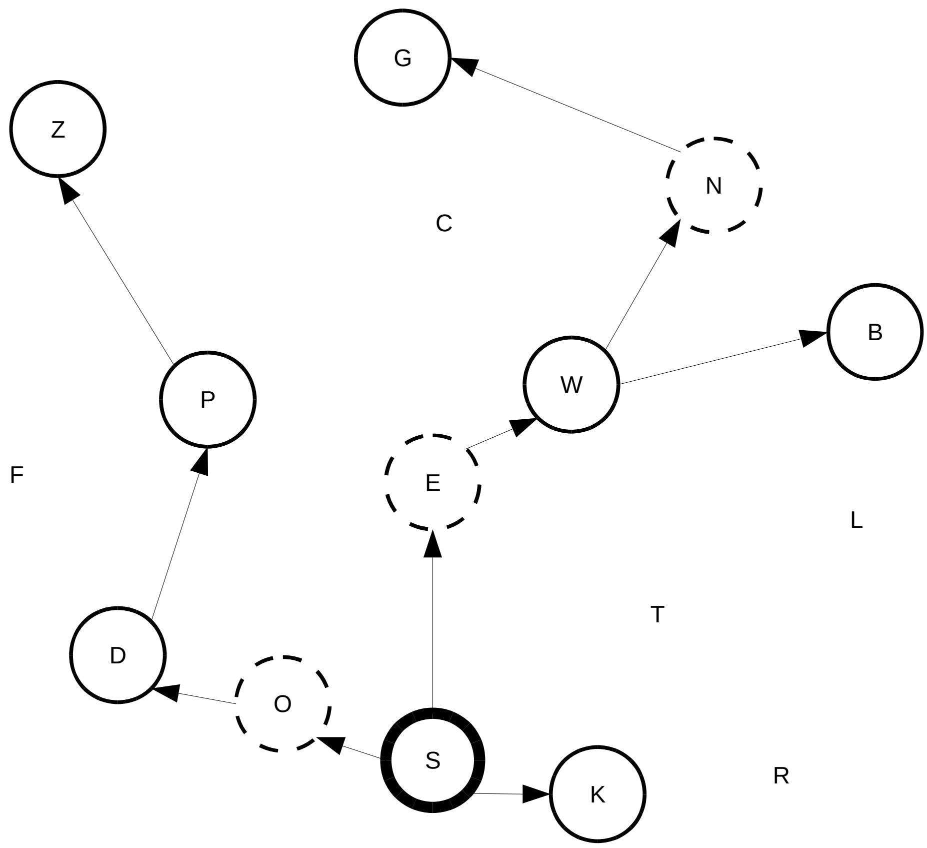
Rys. 5. Parametry odcinków dróg

Źródło: Opracowanie własne

Czas transportu wynika z odległości pomiędzy punktami węzłowymi sieci dróg oraz przyjętej średniej prędkości jazdy wynoszącej 60 km/h. Szacunkowy koszt transportu c wynika z kosztów paliwa, amortyzacji środka transportowego oraz średniej stawki wynagrodzenia kierowcy wynoszącej 50 zł/h.

Przykładowo, dla struktury tras przedstawione na rys.4 uzyskano czas transportu do odbiorcy 48,8 h (97,6 h razem z powrotem) przy całkowitym koszcie 16578 zł. Wartościom tym odpowiada wartość funkcji celu (4) równa 10,07.

Najlepszemu systemowi tras odpowiada struktura przedstawiona na rys.8. W jej przypadku jest osiągany nieco niższy czas transportu do odbiorcy 43,9 h (razem 87,8 h) oraz znacząco niższy koszt transportu 9585 zł i wartość funkcji celu (4) równa 8,735.



Rys. 6. Graf skierowany najlepszej sieci tras

Źródło: Opracowanie własne

PODSUMOWANIE

Przedstawiony model obliczeniowy pozwala na wybór systemu tras do przewozu towaru do odbiorców z uwzględnieniem ich zapotrzebowania oraz, zarówno trudno, jak i (łatwo) mierzalnego wpływu wielowymiarowego otoczenia. Elastyczność modelu stwarza nieograniczone możliwości jego dostosowania do zmieniających się dynamicznie uwarunkowań wynikających przykładowo z sezonowych warunków klimatycznych lub charakterystycznego dla naszego kraju spiętrzenia prac modernizacyjnych sieci drogowej, a także niezbędnych napraw dróg w okresie pozimowym.

Dzięki zastosowaniu metody Monte Carlo przedstawiony model jest stosunkowo mało wrażliwy na efekt skali związany z liczbą obsługiwanych odbiorców oraz liczby możliwych tras. W ten sposób uzyskujemy atrakcyjne narzędzie umożliwiające efektywny wybór tras podwyższając w ten sposób efektywność funkcjonowania systemu logistycznego przedsiębiorstwa w szybko zmieniającym się otoczeniu. Jego potencjalną użyteczność potwierdzają uzyskane wyniki wstępnych analiz związanych z rozwiązywaniem zadań decyzyjnych o niewielkich rozmiarach. Obecnie prowadzone są prace nad przystosowaniem modelu do rozwiązywania zadań o zróżnicowanych rozmiarach. Rozważane są także usprawnienia modelu, związane przykładowo z uwzględnianiem alternatywnych dróg łączących poszczególne węzły sieci.

BIBLIOGRAFIA

1. Dytczak M., *Porównanie zastosowania programowania liniowego z metodą Monte Carlo w rozwiązywaniu zadań harmonogramowania w budownictwie*. Archiwum Instytutu Inżynierii Lądowej 2012, nr 13, s.75-84
2. Dytczak M., Ginda G., *Rozwiązanie zagadnienia transportowego z uwzględnieniem czynników trudno mierzalnych*. Logistyka 2011, nr 6, s.855-864.
3. Korzan B., *Elementy teorii grafów i sieci. Metody i zastosowania*. WNT, Warszawa 1978.

IDENTIFICATION OF OPTIMAL TRANSPORTATION ROUTES APPLYING MONTE CARLO METHOD

Abstract

Road transportation of goods is takes place in a dynamic multi-dimensional surrounding environment. Hence, surrounding environment factors influence effects of transportation activities a lot. There are usually several alternative routes available for transportation of goods from suppliers to receivers. Influence of surrounding environment differs between routes. The influence is both of intangible as well as of intangible nature. Selection of appropriate routes comprises therefore an important issue while planning logistic systems. A numerical model is facilitating selection of appropriate transportation routes while addressing specificity of Polish road transportation system is discussed in the paper.

Autorzy:

Prof. dr hab. inż. **Mirosław Dytczak –** Politechnika Białostocka, mdytczak@gmail.com

dr inż. **Grzegorz Ginda –** Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej, gg.ginda@gmail.com

dr inż. **Barbara Jastrząbek –** Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej, jb-czabak@wp.pl