

POŁĄCZENIE G^3 DWÓCH KIERUNKÓW PROSTYCH Z UŻYCIEM KRZYWEJ NURBS

Katarzyna Palikowska

Dr inż., Politechnika Gdańska, 80-233 Gdańsk, ul. Narutowicza 11/12, tel. (58) 3486090, e-mail: katpalik@pg.gda.pl

Streszczenie. W artykule przedstawiono nową metodę projektowania układu geometrycznego toru kolejowego opartą na zastosowaniu krzywych NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) do opisu krzywizny. Punkty kontrolne krzywej NURBS wyznaczone są w procesie optymalizacji za pomocą algorytmu genetycznego. Jako kryterium optymalizacji przyjęto minimalizację oddziaływań dynamicznych występujących w układzie tor-pojazd przy spełnieniu warunków geometrycznych wynikających z założeń projektowych. Zastosowanie metody przedstawiono na przykładzie połączenia G^3 dwóch kierunków prostych jednosegmentową krzywą przejściową. Prezentowana metoda jest uniwersalna i może być stosowana do realizacji różnorodnych zadań projektowych: łączenia dwóch kierunków prostych, łączenia prostej z łukiem kołowym oraz łączenia łuków kołowych o zgodnych lub odwrotnych krzywiznach (*Cshape*, *C-oval* i *S-shape*).

Słowa kluczowe: krzywa przejściowa, algorytm genetyczny, krzywa NURBS, projektowanie układów torowych, ocena oddziaływań dynamicznych

1. Wstęp

Projektowanie przejść krzywoliniowych stanowi jeden z podstawowych problemów inżynierskich w wielu dziedzinach techniki, w tym w dziedzinie projektowania dróg kołowych i kolejowych. W procesie projektowania układów geometrycznych toru kolejowego projektant, łącząc punkty charakterystyczne trasy, dąży do zapewnienia płynnej zmiany krzywizny pomiędzy odcinkami prostymi i łukami o stałej krzywiznie. Krzywe przejściowe używane są do łączenia odcinka prostego z łukiem kołowym, łączenia dwóch łuków kołowych: odwrotnych (*S-shaped*) lub zgodnych (*C-shaped* i *C-oval* – w przypadku, gdy jeden łuk zawarty jest w drugim) oraz łączenia dwóch kierunków prostych.

W miejscach połączeń, na skutek zmian krzywizny poziomej, dochodzi do zwiększenia oddziaływań dynamicznych występujących w układzie tor – pojazd [8, 9]. Właściwe ukształtowanie krzywych przejściowych, zapewniające możliwie najkorzystniejsze właściwości dynamiczne, nabiera szczególnego znaczenia przy projektach modernizacji układów geometrycznych toru, których celem jest zwiększenie dopuszczalnej prędkości jazdy.

Istotną cechą z punktu widzenia oddziaływań dynamicznych jest klasa ciągłości funkcji opisującej krzywiznę krzywej przejściowej [8, 12]. Wyższa klasa ciągłości

ści funkcji krzywizny odpowiada lepszym właściwościom dynamicznym krzywej przejściowej: krzywizna kłotoidy i paraboli trzeciego stopnia będąca funkcją liniową jest klasy C^0 , paraboli czwartego stopnia – klasy C^1 , krzywej Blossa – klasy C^2 , co przekłada się na pozycję w rankingu krzywych sporządzonym w oparciu o ocenę wielkości oddziaływań dynamicznych, w którym kłotoida i parabola trzeciego stopnia posiadają najmniej korzystne właściwości dynamiczne [8, 12, 14].

W pracach [8, 12] przedstawiono metodę identyfikacji krzywych przejściowych za pomocą równań różniczkowych z odpowiednio zdefiniowanym zestawem warunków brzegowych, z której wynika związek klasy funkcji opisującej krzywiznę z liczbą i rodzajem przyjętych warunków brzegowych wyjściowego równania różniczkowego. Z przyjętych warunków brzegowych wynika ciągłość parametryczna klasy C^2 w punktach połączeń odcinków o zróżnicowanej krzywiznie, co zapewnia spełnienie warunków koniecznych nałożonych na krzywe przejściowe [2]. Warunki pożądane wymagają zapewnienia w punktach połączeń ciągłości geometrycznej G^3 lub wyższej [2].

Klasa ciągłości geometrycznej w punktach połączeń (tj. rejonach zwiększonych oddziaływań dynamicznych) w decydujący sposób wpływa na właściwości dynamiczne całego układu [1, 3, 17]. W licznych pracach [3, 4, 10, 17] celem poszukiwania nowych postaci krzywych przejściowych jest zastąpienie pojedynczą, jednosegmentową krzywą przejściową tradycyjnych rozwiązań, opartych na zastosowaniu łuku kołowego z dwoma krzywymi przejściowymi. W pracach [1, 18] autorzy dążą do wsparcia rozwiązań tradycyjnych nowymi rodzajami krzywych. W badaniach mających na celu rozszerzenie dostępnych możliwości w zakresie modelowania krzywych przejściowych wyróżnić można dwa zasadnicze nurty: bezpośrednie kształtowanie współrzędnych krzywej przejściowej oraz pośrednie osiągnięte poprzez modelowanie krzywizny.

W pracach [1, 4], wpisujących się w nurt kształtowania współrzędnych, przedstawiono algorytmy konstruowania krzywych Bezier, jako krzywych przejściowych łączących dwa kierunki proste oraz dwa łuki odwrotne (*S-shaped*) i zgodne (*C-shaped* i *C-oval*). Sugerowana celowość zastosowania krzywych Bezier w dziedzinie projektowania dróg kołowych i kolejowych została potwierdzona w pracach [9, 10] poprzez zastosowanie wspomnianych krzywych w przykładowych układach geometrycznych.

W pracy [14] przedstawiono uniwersalną metodę modelowania krzywizny pozwalającą na uzyskanie jednosegmentowych krzywych łączących odcinki toru o zróżnicowanej krzywiznie (dwa łuki odwrotne). Idea zapewnienia pożądanych właściwości projektowanej krzywej przejściowej poprzez modelowanie jej krzywizny wykorzystywana jest szeroko w dziedzinie projektowania układów geometrycznych toru [3, 12, 14, 17, 18].

Niniejszy artykuł przedstawia metodę projektowania połączenia G^3 dwóch kierunków prostych za pomocą jednosegmentowej krzywej przejściowej. Metoda oparta jest na modelowaniu krzywizny układu geometrycznego opisanej krzywą NURBS (*Non-Uniform Rational B-Spline*). Punkty kontrolne krzywej wyznaczane są w procesie optymalizacji prowadzonym algorytmem genetycznym

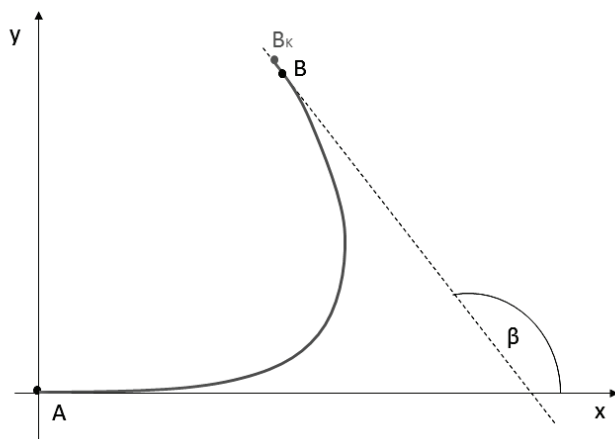
[11] w oparciu o kryterium związane z oceną oddziaływań dynamicznych w układzie tor-pojazd, z zachowaniem warunków geometrycznych.

Krzywe NURBS, szeroko używane w systemach CAD, okazały się przydatne w wielu dziedzinach projektowych, w których na modelowaną krzywą nałożone są różnego rodzaju warunki geometryczne [6, 19].

Niniejszy artykuł zawiera propozycję rozszerzenia dotychczasowego zakresu stosowania krzywych NURBS. W rozdziale 2 artykułu przedstawiono przyjęte założenia geometryczne oraz sformułowanie problemu projektowego. W rozdziale 3 opisana została przyjęta postać krzywizny (krzywa NURBS) wraz ze sposobem wyznaczania na jej podstawie rzędnych wynikowej krzywej przejściowej. W rozdziale 4 przedstawiono proces optymalizacji wraz z jego najważniejszym elementem – kryterium optymalizacji oraz wynikiem uzyskanym dla przykładowego zadania projektowego. Rozdział 5 zawiera podsumowanie.

2. Sformułowanie problemu

Zadanie projektowe polega na połączeniu jednosegmentową krzywą przejściową zadanych punktów trasy A i B , należących do dwóch kierunków prostych przecinających się pod kątem β (kąt zwrotu trasy) – rys. 1.



Rys. 1. Połączenie dwóch kierunków prostych jednosegmentową krzywą przejściową łączącą zadane punkty trasy A i B

Zakłada się, że początek przyjętego układu współrzędnych O pokrywa się z punktem A , stanowiącym początek krzywej przejściowej, a oś odciętych jest styczna do krzywej w tym punkcie (rys. 1). Wymagane jest dodatkowo, by połączenia odcinków prostych z otrzymaną krzywą w punktach A (początek krzywej) i B_k (koniec krzywej) posiadały ciągłość geometryczną przynajmniej klasy G^3 (zgodność kierunków stycznych do krzywizny). Jednym z celów proce-

su optymalizacji jest zapewnienie zgodności współrzędnych punktów $B = (x_B; y_B)$ i $B_K = (x_{BK}; y_{BK})$ poprzez minimalizację odległości $\|B - B_K\|$.

Przyjmując, że krzywa przejściowa zapisana jest w postaci parametrycznej $x(l)$ i $y(l)$, spełnienie nałożonych wymagań jest równoznaczne ze spełnieniem następujących warunków:

$$x(A) = y(A) = 0, \quad x(B_K) = x_{BK}, \quad y(B_K) = y_{BK}, \quad \sqrt{(x_B - x_{BK})^2 + (y_B - y_{BK})^2}. \quad (1)$$

$$x'(A) = y'(A) = 0, \quad x'(B_K) = x'_{BK}, \quad y'(B_K) = y'_{BK}, \quad \frac{x'_{BK}}{y'_{BK}} = \tan \beta \quad (2)$$

$$k(A) = 0, \quad k(B_K) = 0 \quad (3)$$

$$k'_y(A) = 0, \quad k'_y(B_K) = 0 \quad (4)$$

gdzie:

$k(A)$ i $k(B_K)$ – oznaczają krzywiznę krzywej przejściowej odpowiednio w punkcie początkowym i końcowym krzywej, natomiast

$k'_y(A)$ i $k'_y(B_K)$ – rzędną pochodnej krzywizny.

W stosunku do prac [1, 3, 17] dodano wymaganie (1) związane z położeniem końca krzywej przejściowej w zadanym punkcie B.

3. Modelowanie krzywizny

Proponowana metoda zakłada, że krzywizna $k(u)$ krzywej przejściowej w postaci parametrycznej jest reprezentowana przez krzywą NURBS stopnia p [15]:

$$k(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i} \quad (5)$$

gdzie:

$$0 \leq u \leq 1,$$

$\{P_i\}$ – oznacza zbiór $n+1$ punktów kontrolnych,

$\{w_i\}$ – zbiór wag odpowiadających punktom kontrolnym,

$\{N_{i,p}(u)\}$ – unormowane funkcje B-sklejane rzędu $p+1$, zdefiniowane dla nieokresowo i niekoniecznie równomiernie rozłożonych węzłów tworzących wektor U :

$$U = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\} \quad (6)$$

gdzie:

$$m = p + 1 + n$$

Ciągłość i różniczkowalność $k(u)$ wynika z właściwości funkcji $N_{i,p}(u)$, gdyż $k(u)$ stanowi liniową kombinację $N_{i,p}(u)$. Tak więc krzywizna $k(u)$ jest klasy C^∞ wewnątrz przedziałów określonych węzłami krzywej i przynajmniej klasy C^{p-1} w punktach będących węzłami o wielokrotności 1 [15]. Oznacza to, że krzywizna otrzymana w wyniku procesu optymalizacji przedstawionego w niniejszym artykule (rys. 8) jest wewnątrz przedziałów określonych węzłami krzywej przynajmniej klasy C^3 , gdyż do opisu krzywizny zastosowano krzywą NURBS stopnia $p=4$ przy pojedynczej wielokrotności węzłów.

Z punktu widzenia oddziaływań dynamicznych kluczową rolę odgrywa ciągłość geometryczna w punktach połączeń (punkty A i B_k na rys. 1). Połączenie G^3 dwóch kierunków prostych, przy spełnieniu warunków (1)-(4), będące celem zadania projektowego upraszcza się po zastosowaniu do opisu krzywizny krzywej NURBS. Metoda prezentowana w niniejszym artykule zakłada, że spełnienie warunków (3) i (4) osiąga się poprzez odpowiednią lokalizację punktów kontrolnych $\{P_i\}$, zapewniając ciągłość geometryczną G^1 krzywizny opisanej krzywą NURBS.

Pierwsza pochodna krzywej NURBS w punktach końcowych ($u=0$ i $u=1$) wyrażona jest następującymi zależnościami [15]:

$$k'(0) = \frac{p}{u_{p+1}} \cdot \frac{w_1}{w_0} \cdot (P_1 - P_0) \quad (7)$$

$$k'(1) = \frac{p}{1 - u_{m-p-1}} \cdot \frac{w_{n-1}}{w_n} \cdot (P_{n-1} - P_n) \quad (8)$$

Ciągłość geometryczna G^3 połączenia dwóch kierunków prostych jest zapewniona poprzez przyjęcie następujących zależności pomiędzy współrzędnymi punktów kontrolnych:

$$P_{0x} = 0, P_{1y} = P_{0y} = 0 \text{ i } P_{(n-1)y} = P_{ny} = 0 \quad (9)$$

gdzie:

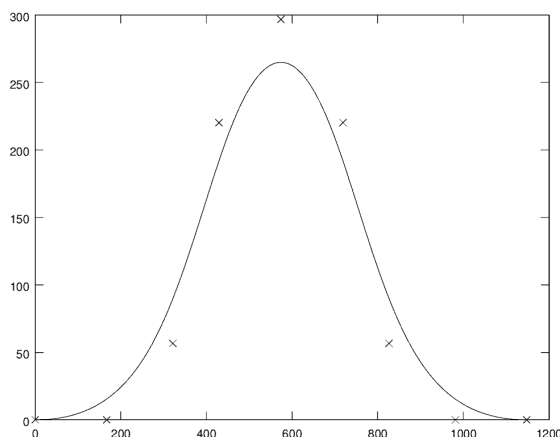
P_{0x} i P_{0y} – oznaczają odpowiednio odcięta i rzędną pierwszego punktu kontrolnego,

P_{0y} , P_{1y} – rzędną drugiego punktu kontrolnego,

$P_{(n-1)y}$ – rzędną przedostatniego a P_{ny} – rzędną ostatniego punktu kontrolnego.

Przyjęte zależności gwarantują zgodność kąta nachylenia stycznej do krzywej NURBS i stycznej do prostej w punktach końcowych krzywej.

Pozostałe współrzędne punktów kontrolnych wyznaczone są w procesie optymalizacji, przy zachowaniu zależności (9) gwarantującej ciągłość geometryczną G^1 krzywizny w punktach połączenia. Stopień krzywej NURBS p , wektor węzłów U oraz wagi punktów kontrolnych mogą zostać ustalone lub podlegać zmianom w procesie optymalizacji wraz z współrzędnymi punktów kontrolnych. Do wyznaczenia współrzędnych krzywej NURBS na podstawie zbioru punktów kontrolnych, ich wag i przyjętego wektora węzłów U został zastosowany NURBS toolbox w. 1.3.6 [13] dostępny w GNU Octave w. 3.6.2.



Rys. 2. Krzywa NURBS opisująca krzywiznę wraz z 9 przykładowymi punktami kontrolnymi

Otrzymana krzywa NURBS (rys. 2) po skalowaniu (13) determinuje krzywiznę $k(l)$, na podstawie której w dalszej kolejności następuje wyznaczenie współrzędnych krzywej przejściowej w układzie x, y . Zakładając, że początek układu x, y znajduje się w punkcie początkowym krzywej A , a oś odciętych jest styczna do tej krzywej w tymże punkcie (rys. 1), równanie parametryczne krzywej przejściowej przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} x(l) &= \int \cos \theta(l) dl \\ y(l) &= \int \sin \theta(l) dl \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie funkcja $\theta(l)$ wyznaczona zostaje na podstawie wzoru:

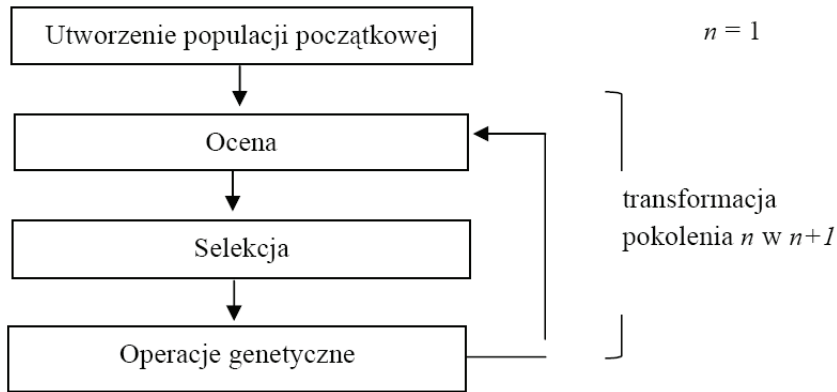
$$\theta(l) = \int k(l) dl \quad (11)$$

4. Proces optymalizacji

W procesie optymalizacji został zastosowany algorytm genetyczny [11]. Schemat działania algorytmu genetycznego został przedstawiony na rys. 3.

Każdy osobnik populacji (tabela 1) reprezentuje zakodowaną postać potencjalnego rozwiązania – szukaną krzywiznę opisaną krzywą NURBS (rys. 2) przyjętego stopnia $p=4$, zdefiniowaną jednoznacznie poprzez współrzędne punktów kontrolnych $\{P_i\}_{i=0}^9$ (tabela 2) o ustalonych wagach $w_i=1$ i równomiernym rozmieszczeniu węzłów:

$$U = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0,2 \ 0,4 \ 0,6 \ 0,8 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]; \quad (12)$$



Rys. 3. Schemat działania algorytmu genetycznego

Tabela 1. Struktura osobnika

Odcięte x				Rzędne y			Skala y
1	2	3	4	5	6	7	8
x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	S_y
sortowanie: $x_{n1} < x_{n2} < x_{n3} < x_{n4}$				ustalenie i : sortowanie: $0 < \dots < y_{ni-1} < y_{ni} > y_{ni+1} > \dots > 0$			
x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	x_{n4}	y_{n1}	y_{n2}	y_{n3}	

Przyjęto założenie o symetrii szukanej krzywizny, co pozwoliło na zredukowanie liczby szukanych współrzędnych punktów kontrolnych z 13 do 7 (tabela 1). Osobnik składa się z 8 liczb zmiennoprzecinkowych z przedziału $(0; 1000>$, z których 4 kodują odcięte, 3 rzędne punktów kontrolnych, a ostatnia koduje współczynnik skali S_y , używany do przekształcenia rzędnych krzywej NURBS zgodnie z formułą (13). Liczby x_1, x_2, x_3, x_4 przechowywane w strukturze osobnika podlegają sortowaniu i zostają użyte jako odcięte punktów kontrolnych. Liczby y_1, y_2, y_3 po wyznaczeniu wartości maksymalnej i sortowaniu zostają użyte jako rzędne punktów kontrolnych (tabela 2). Przyjęcie $P_0 = (0; 0)$, $P_{1y} = 0$, $P_{7y} = 0$ oraz $P_{8y} = 0$ (tabela 2) zapewnienia spełnienie warunków (3) i (4) zadania projektowego.

Tabela 2. Współrzędne punktów kontrolnych określających krzywą NURBS

	X	Y
P_0	0	0
P_1	x_{n1}	0
P_2	x_{n2}	y_{n1}
P_3	x_{n3}	y_{n2}
P_4	x_{n4}	y_{n3}
P_5	$2 \cdot x_{n4} - x_{n3}$	y_{n2}
P_6	$2 \cdot x_{n4} - x_{n2}$	y_{n1}
P_7	$2 \cdot x_{n4} - x_{n1}$	0
P_8	$2 \cdot x_{n4}$	0

Rzędne wyznaczonej krzywej NURBS (rys. 2) podlegają skalowaniu według formuły (13), w wyniku której otrzymana zostaje wynikowa krzywizna:

$$k_y(u) = \frac{k_y(u)}{S_y \cdot \max_{\square} \{ |k_y(u)| \}}, \quad (13)$$

gdzie:

S_y – oznacza współczynnik skalowania rzędnych wyznaczany w procesie optymalizacji.

4.1. Kryterium oceny

W pracach poświęconych modelowaniu krzywizny [3, 8, 10, 14, 17] minimalizacja oddziaływań dynamicznych stanowi zasadnicze kryterium. Autorzy [1, 3, 17] dokonują oceny właściwości dynamicznych krzywych przejściowych w oparciu o diagram LCA (*Lateral Change of Acceleration*).

W niniejszym artykule zastosowany został model oraz sposób oceny oddziaływań dynamicznych przedstawiony w pracach [8, 14]. Zasadniczym elementem analizy oddziaływań dynamicznych jest wyznaczenie wielkości drgań $X(t)$ oraz wypadkowego przyspieszenia w ruchu drgającym $X''(t)$ w rejonach, w których występują zmiany poziomej krzywizny toru. W pracy [14] przedstawiono opis metody numerycznej stosowanej do wyznaczenia wielkości drgań $X(t)$ przy założeniu, że czynnikiem wymuszającym drgania poprzeczne pojazdu szynowego są zmiany krzywizny poziomej toru. Równanie różniczkowe drugiego rzędu opisujące drgania wymuszone z tłumieniem [8] zostało rozwiązane jawną metodą różnic centralnych Störmera [5] i przekształcone do następującej postaci równania różnicowego:

$$X_{i+1} = \frac{h^2 a_i - X_i \left(\frac{h^2 \omega^2}{1 - D^2} - 2 \right) - X_{i-1} \left(1 - \frac{D \omega h}{\sqrt{1 - D^2}} \right)}{1 + \frac{D \omega h}{\sqrt{1 - D^2}}} \quad (14)$$

gdzie:

X_{i+1} – wyjściowa $i+1$ próbka funkcji wielkości drgań $X(t)$,

h – krok próbkowania,

a_i – i -próbka niezrównoważonego przyspieszenia poprzecznego $a(l)$ wynikającego z krzywizny toru $k(l)$,

ω – częstotliwość drgań własnych,

D – współczynnik tłumienia Lehr'a [8].

Na podstawie funkcji wielkości drgań $X(t)$ wyznaczane jest wypadkowe przyspieszenie w ruchu drgającym $X''(t)$, które następnie poddane zostaje procesowi filtracji. Zastosowano cyfrowy filtr górnoprzepustowy Butterworth'a 11-tego rzędu o nieskończonej odpowiedzi impulsowej [7] ze znormalizowaną częstotliwością

0,035. Do ustalenia parametrów filtru został zastosowany Signal toolbox w. 1.2.2 [16] dostępny w GNU Octave w. 3.6.2.

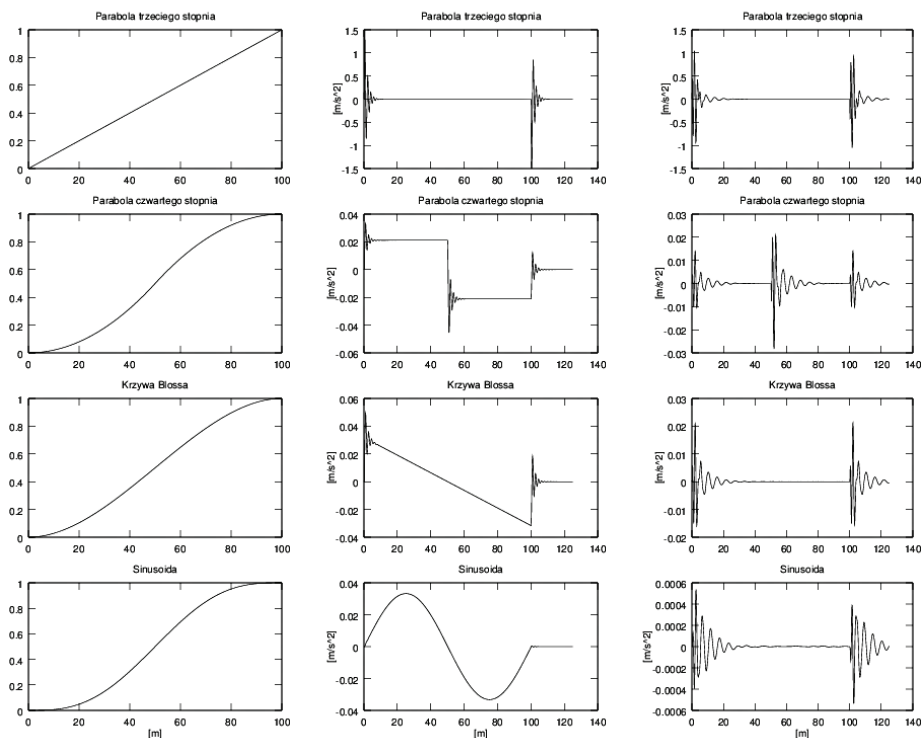
Celem procesu filtracji jest umożliwienie wyrażenia oceny wielkości drgań w postaci liczbowej i utworzenie na jej podstawie listy rankingowej ocenianych krzywych. Uzyskanie oceny w postaci liczbowej jest niezbędne do efektywnego włączenia oceny oddziaływań dynamicznych jako składnika funkcji celu FF używanej w procesie optymalizacji. Pomimo, że wartość liczbową oceny ma znaczenie jedynie porównawcze, pełni istotną rolę – wyznacza kierunek procesu optymalizacji: dążenie do uzyskania krzywych o korzystniejszych właściwościach dynamicznych.

W celu zbadania przydatności tego kryterium została dokonana ocena wybranych krzywych: paraboli trzeciego stopnia, paraboli czwartego stopnia, krzywej Blossa i sinusoidy, zastosowanych jako krzywe przejściowe o długości $l = 100$ m w połączeniu prostej z łukiem kołowym o promieniu R , na którym występuje niezrównoważone przyspieszenie odśrodkowe $a_{max} = 0,6$ m/s². Przyjęto stałą prędkość $v = 120$ km/h, częstotliwość drgań własnych $\omega = 3,5$ 1/s oraz wskaźnik tłumienia Lehr'a $D = 0,175$. Krzywizny wymienionych krzywych wraz z wyznaczonymi funkcjami $X''(t)$ oraz $X''(t)_{Filtr}$ zostały przedstawione na rysunkach 4-6.

Odfiltrowany przebieg wypadkowego przyspieszenia w ruchu drgającym $X''(t)_{Filtr}$ (rys. 6) został przyjęty jako podstawa do wyznaczenia wartości liczbowej składnika związanego z oceną oddziaływań dynamicznych w formule (15) definiującej funkcję celu FF. Uzyskane wartości kryterium dynamicznego dla wybranych krzywych przejściowych zostały przedstawione w tabeli 3.

Przebieg wyznaczonego przyspieszenia $X''(t)$ (rys. 5) wskazuje wyraźnie dwa rejonry zwiększonych oddziaływań dynamicznych (początek i koniec krzywej przejściowej). Sinusoida posiada zdecydowanie najlepsze właściwości dynamiczne (najmniejsze amplitudy zmian przyspieszenia w rejonach początkowym i końcowym krzywych – na rysunku 5 praktycznie niedostrzegalne) w porównaniu do pozostałych krzywych, co przekłada się na najniższą maksymalną amplitudę $X''(t)_{Filtr}$ i najniższą wartość kryterium dynamicznego (tabela 3).

Zdecydowanie najmniej korzystne właściwości dynamiczne stwierdzone zostały w odniesieniu do paraboli trzeciego stopnia. Maksymalne amplitudy $X''(t)$ oraz $X''(t)_{Filtr}$ są zdecydowanie największe, co skutkuje największą (najmniej korzystną) wartością kryterium dynamicznego (tabela 3).



Rys. 4. Krzywizny wybranych krzywych przejściowych

Rys. 5. Przyspieszenie w ruchu drgającym $X''(t)$

Rys. 6. Odfiltrowany sygnał przyspieszenia w ruchu drgającym $X''(t)_{Filtr}$

Tabela 3. Wartości kryterium dynamicznego wybranych krzywych przejściowych

Nr	Krzywa przejściowa	Wartość kryterium	Maksymalna amplituda $X''(t)_{Filtr}$ [m/s ²]
1	Parabola trzeciego stopnia	53,802	1,05010
2	Parabola czwartego stopnia	1,9141	0,02828
3	Krzywa Blossa	1,4277	0,02109
4	Sinusoida	0,0588	0,00054

Wnioski wynikające z analizy przebiegu wypadkowego przyspieszenia przekładają się na wartości kryterium używanego w procesie optymalizacji (tabela 3) oraz są zgodne z uzyskanymi w pracach [3, 8, 17]. Na podstawie danych z tabeli 3 należy spodziewać się, że w procesie optymalizacji opartym na opisanym kryterium dynamicznym uzyskiwane będą nieliniowe, symetryczne krzywizny (kryterium w równym stopniu uwzględnia oddziaływania występujące w rejonie początkowym jak i w końcowym krzywej).

Funkcja celu FF (*Fitness Function*) (15) stosowana w procesie optymalizacji dążącym do wyznaczenia krzywizny krzywej przejściowej w układzie geometrycznym przedstawionym na rysunku 1, oprócz właściwości dynamicznych uwzględnia

również minimalizację różnic odległości końca krzywej przejściowej B_K i danego punktu B oraz kąta nachylenia stycznej do krzywej przejściowej w punkcie końcowym i kąta zwrotu trasy β , w celu spełnienia warunków (1) i (2) zadania projektowego.

$$FF = w_d \int_0^{l+\delta} X''(t)_{Filtr} + w_b \|B - B_K\| + w_t \left| \tan \beta - \frac{x'_{BK}}{y'_{BK}} \right| \rightarrow \min \quad (15)$$

gdzie:

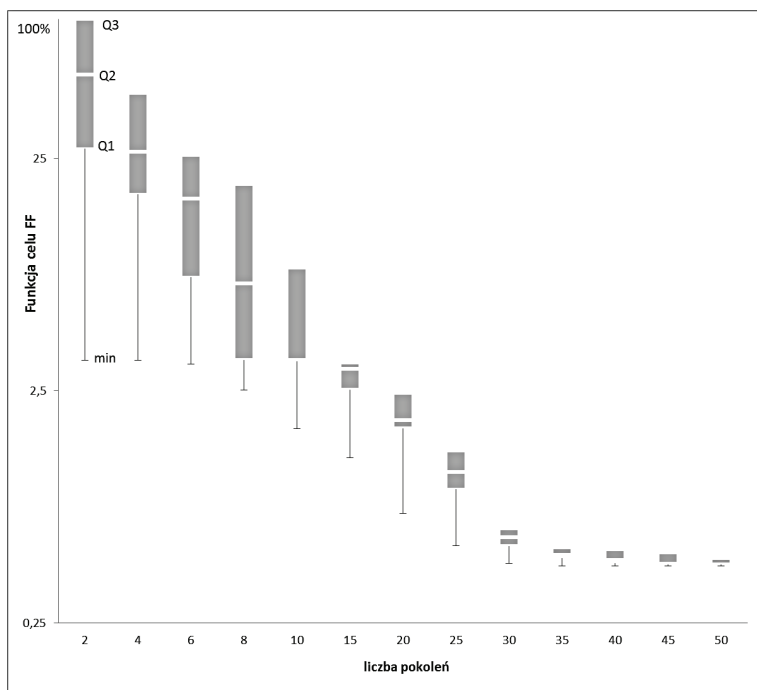
w_d, w_b i w_t stanowią arbitralnie dobierane przez projektanta wagi,
 d – długość odcinka prostego, na którym występują oddziaływania dynamiczne po zjeździe z krzywej przejściowej o długości l ,

$B_K = (x_{BK}, y_{BK})$ punkt końcowy krzywej przejściowej,

$\frac{x'_{BK}}{y'_{BK}}$ – tangens kąta nachylenia stycznej do krzywej przejściowej w punkcie końcowym krzywej B_K .

4.2. Przebieg procesu optymalizacji

Przyjęto układ geometryczny (rys. 1) o kącie zwrotu trasy $\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ i współrzędnymi punktu $B = (255, 00; 615, 00)$. Przebieg procesu optymalizacji został przedstawiony za pomocą wykresu pudełkowego na rysunku 7.



Rys. 7. Przebieg procesu optymalizacji

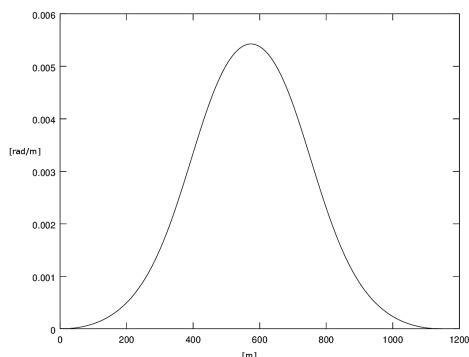
Na prezentowanym wykresie (rys. 7) jako wartość referencyjna (100%) została przyjęta wartość trzeciego kwartyła Q3 funkcji celu FF (16) osobników populacji drugiego pokolenia. Wartości rzędnych przedstawiono w skali logarytmicznej o podstawie 10.

Od początku procesu (pokolenie nr 1) do pokolenia nr 30 wartość mediany Q2 funkcji celu FF systematycznie malała przy zachowanej różnorodności populacji mierzonej wysokością rozstępu kwartylnego – różnicą wartości trzeciego i pierwszego kwartyła (Q3Q1). W dalszych pokoleniach populacja została zdominowana przez osobnika kodującego rozwiązanie końcowe prezentowane na rysunku 8. Parametry procesu optymalizacji zostały przedstawione w tabeli 4.

Tabela 4. Parametry procesu optymalizacji

Liczebność populacji	Liczba pokoleń	Prawdopodobieństwo mutacji	Prawdopodobieństwo krzyżowania	Wagi FF (15)		
				w_d	w_h	w_t
200	50	0,25	0,15	1000	1	10

4.3. Wynik procesu optymalizacji



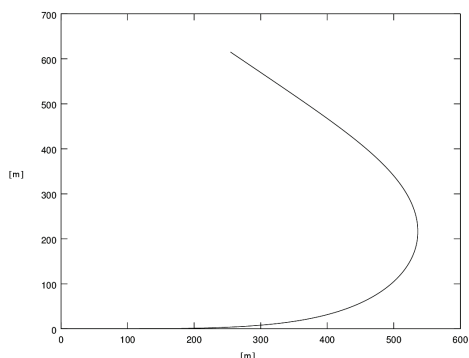
Rys. 8. Krzywizna krzywej przejściowej po skalowaniu (13)

Krzywizna przedstawiona na rysunku 8 jest krzywą NURBS stopnia 4, wyznaczoną na podstawie punktów kontrolnych o współrzędnych podanych w tabeli 5 i wagach $w_i = 1$ oraz przyjętym wektorze węzłów (12).

Tabela 5. Współrzędne punktów kontrolnych krzywej NURBS opisującej krzywiznę z rys. 8

	$S_v(13)$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
X	1	0	166,81	321,49	429,09	573,92	718,74	826,34	981,02	1147,80
Y	184,27	0	0	56,61	220,23	296,81	220,23	56,61	0	0

Na podstawie krzywizny z rysunku 8, w oparciu o formuły (9)-(11) wyznaczona została krzywa przejściowa przedstawiona na rysunku 9, stanowiąca rozwiązanie zadania projektowego. Parametry geometryczne uzyskanej krzywej przedstawione zostały w tabeli 6.



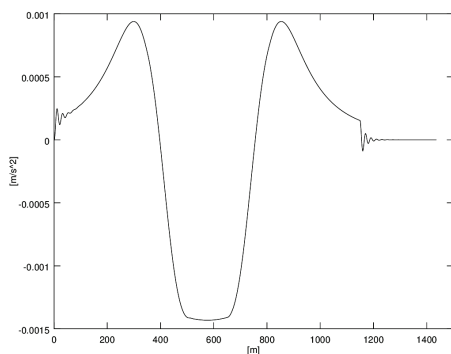
Rys. 9. Rzędne krzywej przejściowej

Tabela 6. Parametry wynikowej krzywej przejściowej

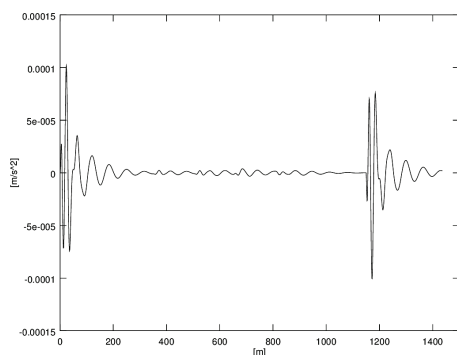
$\left \frac{\tan \beta - \frac{x'_{BK}}{y'_{BK}}}{y'_{BK}} \right $	$\ B - B_K\ $ [m]	Długość krzywej [m]	Wartość kryterium	Maksymalna amplituda $X''(t)_{Filtr}$ [m/s ²]
2,9966 e-08	0,025	1147,80	0,0075593	0,00010162

Różnica kąta nachylenia stycznej do krzywej w punkcie B_K (punkt końcowy krzywej) i kątem zwrotu trasy β spełnia warunek (2) z dokładnością rzędu $1,7169e-06^\circ$. Warunek (1) dotyczący zgodności współrzędnych punktu B_K i zadanego punktu B został spełniony z dokładnością $0,025$ m – przyjęta w procesie optymalizacji waga w_b składnika funkcji celu FF (15) odpowiedzialnego za minimalizację różnicy położenia punktów B_K i B była relatywnie niska (tabela 4). Warunki (3) i (4) zostały spełnione a priori poprzez przyjęcie założeń dotyczących współrzędnych punktów kontrolnych (9). O ich spełnieniu świadczy przebieg krzywizny otrzymanej krzywej (rys. 8) i jej pochodnej (rys. 12).

Wynikowa krzywa przejściowa (rys. 9) charakteryzuje się dobrymi właściwościami dynamicznymi, o których świadczy przebieg wypadkowego przyspieszenia w ruchu drgającym $X''(t)$ (rys. 10) oraz przebieg pochodnej krzywizny $k'(l)$ (rys. 12). Maksymalna amplituda odfiltrowanego sygnału przyspieszenia w ruchu drgającym $X''(t)_{Filtr}$ wynosi $1,0162e-04$ m/s², wartość kryterium dynamicznego wynosi $0,0075593$, co w zestawieniu z wynikami wybranych krzywych, przedstawionymi w tabeli 3 stanowi wartość korzystną (bezpośrednie porównanie maksymalnych amplitud jest utrudnione z uwagi na różnicę długości krzywych).



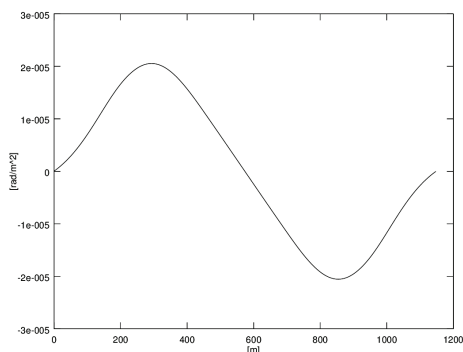
Rys. 10. Przyspieszenie w ruchu drgającym $X''(t)$ na krzywej przedstawionej na rys. 9



Rys. 11. Odfiltrowany sygnał przyspieszenia w ruchu drgającym $X''(t)_{Filtr}$

Przebieg pochodnej krzywizny przedstawiony na rysunku 12 świadczy o spełnieniu warunku pożądanego stawianego krzywym przejściowym [2] dotyczącego ciągłych zmian pochodnej krzywizny $k'(l)$ oraz zapewnieniu zakładanej ciągłości geometrycznej G^3 w punktach połączeń krzywej z odcinkami prostymi. Umiarkowane wartości maksymalne pochodnej krzywizny $k'_{max}(l)$ ułatwiają spełnienie warunków nałożonych na maksymalne wartości parametrów kinematycznych [2]: prędkości zmian niezrównoważonego przyspieszenia Ψ_{max} , prędkości pionowego podnoszenia się koła na rampie przechyłkowej f_{max} czy pochylenia rampy przechyłkowej i_{max} – istotnych w przypadku projektów mających na celu zwiększenie dopuszczalnej prędkości jazdy.

Porównanie wynikowej krzywej przejściowej z rozwiązaniami przedstawionymi w pracach [1, 3, 17] wymagałoby przyjęcia ujednoczonych założeń projektowych i dokonania oceny w oparciu o wspólne kryterium. Wstępnie, na podstawie przebiegu krzywizny $k(l)$ (rys. 8) i przebiegu pochodnej krzywizny $k'(l)$ (rys. 12) można wnioskować, że otrzymana krzywa przejściowa posiada lepsze właściwości dynamiczne niż rozwiązanie [1] oparte na zastosowaniu dwóch krzywych Bezier i łuku kołowego oraz zbliżone do jednosegmentowej krzywej Tari-2 [17].



Rys. 12. Pierwsza pochodna $k'(l)$ krzywizny przedstawionej na rys. 8

5. Podsumowanie

W artykule przedstawiono metodę projektowania krzywych przejściowych spełniających nałożone warunki geometryczne i posiadających korzystne właściwości dynamiczne, opartą na modelowaniu krzywizny opisanej krzywą NURBS (*Non-Uniform Rational B-Spline*). Użycie krzywej NURBS do opisu krzywizny układu geometrycznego toru kolejowego jest nowym podejściem, otwierającym szerokie możliwości modelowania. W dotychczasowych pracach [1, 4] stosowano krzywe Bezier (szczególną postać krzywych NURBS) do bezpośredniego opisu krzywej przejściowej.

Prezentowaną metodę zastosowano do połączenia dwóch kierunków prostych jednosegmentową krzywą przejściową zapewniającą ciągłość geometryczną G^3 w punktach połączeń krzywej z odcinkami prostymi, co korzystnie wpływa na redukcję oddziaływań dynamicznych w układzie tor – pojazd. Ciągłość geometryczna G^3 osiągana jest a priori, dzięki wykorzystaniu właściwości krzywej NURBS i jej pierwszej pochodnej w punktach końcowych krzywej.

Prezentowane w artykule modelowanie krzywizny przeprowadzane jest w procesie optymalizacji, w którym wyznaczane są współrzędne punktów kontrolnych krzywej NURBS, przy założeniu stałych wag, wymuszeniu symetrii krzywizny, przyjęciu ustalonego stopnia krzywej oraz ustalonego rozmieszczenia węzłów. W procesie optymalizacji zastosowano algorytm genetyczny z funkcją celu FF opartą na kryterium dynamicznym oraz składnikach związanych ze spełnieniem warunków geometrycznych. Wykorzystano środowisko GNU Octave w. 3.6.2 wraz z NURBS toolbox w. 1.3.6 [13] i Signal toolbox w. 1.2.2 [16]. Wartość kryterium dynamicznego obliczana jest na podstawie odfiltrowanego sygnału przyspieszenia w ruchu drgającym wyznaczonego w oparciu o model przedstawiony w pracy [8] i metodę numeryczną przedstawioną w [14]. Otrzymana krzywa przejściowa realizuje przedstawione zadanie projektowe oraz charakteryzuje się korzystnymi właściwościami dynamicznymi.

Konstrukcja funkcji celu FF jest elastyczna – dopuszcza uwzględnienie szerokiego zakresu warunków geometrycznych, które mogą być nałożone na projektowaną krzywą poprzez zwiększenie liczby składników FF i odpowiedni dobór wag związanych z tymi składnikami.

Zbiór parametrów, definiujących krzywą NURBS, wyznaczany w procesie optymalizacji może zostać rozszerzony. Oprócz współrzędnych punktów kontrolnych w procesie optymalizacji może być wyznaczany stopień krzywej, wagi punktów kontrolnych oraz rozmieszczenie węzłów krzywej. Zakres możliwych do zastosowania algorytmów optymalizacji również jest szeroki i nie ogranicza się do prezentowanego algorytmu genetycznego.

Literatura

- [1] Ahmad A., Ali J., G^3 transition curve between two straight lines, 5th International Conference on Computer Graphics, Imaging and Visualisation, DOI: 10.1109/CGIV.2008.22.
- [2] Bałuch H., Optymalizacja układów geometrycznych toru, WKiŁ, Warszawa 1983.
- [3] Baykal O., Tari E, Coşkun Z, Şahin M., A New Transition Curve Joining Two Straight Lines. *Journal of Transportation Engineering*, ASCE, 123(5),337-345, 1997.
- [4] Cai H., Wang G., A new method in highway route design: joining circular arcs by a single C-Bezier curve with shape parameter. *Journal of Zhejiang University Science A* 2009 10(4) 562-569.
- [5] Dahlquist G., Björck A., *Numerical methods*. Prentice-Hall 1974.
- [6] Hu S., Li Y., Ju T., Zhu X., Modifying the shape of NURBS surfaces with geometric constraints. *Computer-Aided Design* 33(2001) 901-912, Elsevier Ltd.
- [7] Ifeachor E., Jervis B., *Digital Signal Processing. A Practical Approach*, Addison-Wesley 1998.
- [8] Koc W., Mieloszyk E., Analiza porównawcza wybranych krzywych przejściowych z wykorzystaniem modelu dynamicznego, *Archiwum Inżynierii Lądowej*, 33(2), 239-261, 1987.
- [9] Koc W., Palikowska K., Ocena dynamiki wybranych sposobów łączenia elementów trasy o zróżnicowanej krzywiznie. XVI Międzynarodowa Konferencja Naukowa "Komputerowe Systemy Wspomagania Nauki, Przemysłu i Transportu – TransComp", Zakopane 2012.
- [10] Koc W., Palikowska K., Analiza sposobów modelowania krzywizny - krzywe Bezier a metoda analityczna. *Zeszyty Naukowo-Techniczne SITK nr 3(99)*, s. 225-237, Kraków 2012.
- [11] Michalewicz Z., *Algorytmy genetyczne + struktury danych = program ewolucyjne*. WNT Warszawa 1996.

- [12] Mieloszyk E., Koc W., General dynamic method for determining transition curve equations. *Rail International*, (10) 1991: 32-40.
- [13] NURBS toolbox <http://octave.sourceforge.net/nurbs/index.html>.
- [14] Palikowska K., Projektowanie układów geometrycznych toru kolejowego z zastosowaniem programowania ewolucyjnego. Rozprawa doktorska, Politechnika Gdańska 2002.
- [15] Piegl L., Tiller W., *The NURBS book*. Berlin Springer 1995.
- [16] Signal toolbox <http://octave.sourceforge.net/signal/index.html>.
- [17] Tari, E., *The new generation transition curves*. ARI 54(1), Istanbul Technical University 2003.
- [18] Tasci, L., Kuloglu N., Investigation of a new transition curve. *The Baltic Journal of Road and Bridge Engineering* 6(1) 2011: 23–29. DOI: 10.3846/bjrbe.2011.04.
- [19] Terzopoulos D., Qin H., Dynamic NURBS with Geometric Constraints for Interactive Sculpting. *ACM Transactions on Graphics*, 13(2), April, 1994, 103-136.