

Piotr FRĄCZAK*

OBLICZENIA SYMULACYJNE MOCY TRACONEJ NA POWIERZCHNI IZOLATORA W UJĘCIU TEORII PERKOLACJI

W pracy przedstawiono obliczenia symulacyjne mocy wydzielanej na powierzchni izolatora cylindrycznego. Powierzchnię izolatora cylindrycznego przedstawiono w postaci modelu perkolacji dla węzłów na sieci. Model ten jest obwodem elektrycznym, który składa się ze źródła napięcia oraz z sieć o strukturze kwadratowej połączonych rezystorów. Rozpatrując utworzony model perkolacji w kontekście obliczeń numerycznych, opisano go analitycznie metodą Maxwella w postaci macierzowej. Otrzymany program obliczeń numerycznych modelu perkolacji zawiera losowy sposób tworzenia węzłów „zapełnionych” na sieci za pomocą odpowiednich procedur obliczeniowych programu Mathcad. Obliczenia symulacyjne mocy wydzielanej na powierzchni izolatora cylindrycznego przeprowadzono za pomocą jego modelu powierzchni (perkolacji dla węzłów na sieci) oraz napisanego programu numerycznego.

SŁOWA KLUCZOWE: perkolacja, model perkolacji, obliczanie modelu perkolacji w Mathcad

1. WSTĘP

Modele perkolacji dla węzłów na sieciach można budować za pomocą obwodów elektrycznych, składających się z regularnych i kompletnych (posiadających wszystkie gałęzi) sieci (hybrydowej – kagome', kwadratowej, sześciokątnej, trójkątnej i Belthego), których węzły są zapełniane w sposób losowy „plamkami przewodzącymi” (zwieranie odpowiednich gałęzi) oraz ze źródeł napięć wymuszających. Istotną cechą modeli perkolacji jest występowanie stanów krytycznych, związanych z nagłym powstawaniem (lub zanikaniem) połączeń galwanicznych pomiędzy odpowiednią liczbą węzłów w sieci [7]. Stany krytyczne dla danej sieci są określone za pomocą progów perkolacji. Progi perkolacji posiadają tylko te modele (perkolacji dla węzłów na sieciach), które zbudowane są z wyżej wymienionych sieci. Za pomocą modeli perkolacji, których parametry zmieniają się w sposób przypadkowy można

* Zachodniopomorskie Centrum Edukacji Morskiej i Politechnicznej, Szczecin.

modelować między innymi powierzchnie izolatorów ceramicznych napowietrznych [4].

Celem pracy jest obliczenie mocy wydzielanej na powierzchni izolatora za pomocą modelu jego powierzchni (perkolacji dla węzłów na sieci) oraz utworzonego programu obliczeniowego modelu perkolacji w środowisku Mathcad.

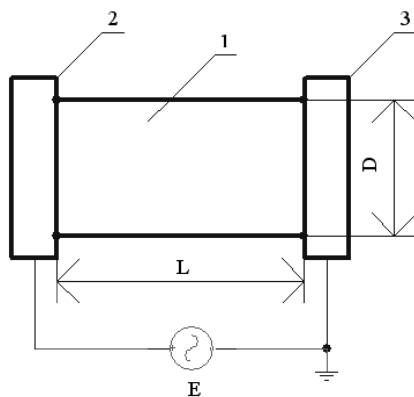
2. MODEL POWIERZCHNI IZOLATORA CYLINDRYCZNEGO

2.1. Opis matematyczny wybranych parametrów pracy izolatora

Wartość prądu upływnościowego powierzchniowego izolatora cylindrycznego (Rys. 2.1) wyznacza się z równania [2]

$$I_u = \frac{E \cdot \pi \cdot D \cdot \gamma_s}{L} \quad (2.1)$$

w którym: E – napięcie źródła, kV; D – średnica izolatora, cm; γ_s – przewodność powierzchniowa zabrudzeń, μS ; L – droga upływu, cm.



Rys.2.1. Schemat modelu izolatora cylindrycznego: 1- powierzchnia izolatora, 2- elektroda górna, 3- elektroda dolna, L – droga upływu, D - średnica izolatora

Wartość krytyczną prądu oraz napięcia przeskoku zabrudzonego izolatora cylindrycznego opisuje się równaniami [2]:

$$I_k = (A \cdot \pi \cdot D \cdot \gamma_s)^{\frac{1}{1+n}} \quad (2.2)$$

$$U_{pz} = L \cdot A^{\frac{1}{1+n}} \cdot (\pi \cdot D \cdot \gamma_s)^{-\frac{1}{1+n}} \quad (2.3)$$

gdzie: A i n współczynniki o stałej wartości odpowiednio 100 i 0,7 [2].

Natomiast moc traconą na powierzchni izolatora cylindrycznego wyznaczono z równania:

$$P = \int_0^{\gamma_s} E^2 \cdot \pi \cdot D \cdot L \cdot d(\gamma_s) \quad (2.4)$$

Równanie (3.4) zamieszczono w podrozdział 4.3 i podano odpowiednie jednostki, stosownie do obliczeń.

2.2. Rozmiar i parametry sieci modelu powierzchni izolatora

Rozwijając powierzchnię izolatora cylindrycznego (Rys.2.1) o średnicy 5,0 cm, wysokości 15,0 cm i następnie dyskretyzując (dzieląc) ją kwadratami o wymiarze 1,5 cm × 1,5 cm, otrzymano sieć kwadratową zawierającą 100 oczek [3].

Przyjęto następujące dane izolatora cylindrycznego: $E = 15$ kV, $D = 5$ cm, $L = 15$ cm, $\gamma_s = 1$ μS. W oparciu o te dane z równania (3.1) obliczono natężenie prądu upływnościowego (15,708 mA). Znając wartość natężenia prądu oraz napięcie wymuszające za pomocą odpowiednich procedur obliczeniowych programu PSpice [5] wyznaczono parametry modelu powierzchni izolatora [4]. W tym modelu powierzchnię stanowią gałęzie $R_1 = R_2 = \dots R_k = \dots R_{200}$, $R_k = 1,13 \cdot 10^6 \Omega$ (podrozdział 4.3).

3. OPIS MACIERZOWY METODĄ MAXWELLA MODELU PERKOLACJI DLA WĘZŁÓW NA SIECI

W celu zaprezentowania opracowanego programu obliczeniowego modelu perkolacji dla węzłów na sieci, przedstawiono obliczany model za pomocą obwodu elektrycznego. Szczegółowy opis proponowanego programu obliczeniowego zamieszczono w podrozdziale 4.2.

Strukturę modelu perkolacji dla węzłów na sieci zamieszczoną na Rys.3.1 ujmuje następujące równanie macierzowe [1]:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{E} \quad (3.1)$$

gdzie: \mathbf{R} – macierz rezystancji oczkowej, \mathbf{E} – wektor jednokolumnowy sił elektromotorycznych oczkowych, \mathbf{I} – wektor jednokolumnowy prądów oczkowych. Macierz \mathbf{R} oraz wektory \mathbf{E} i \mathbf{I} są zdefiniowane następująco:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{w_{1,1}} & -R_{w_{1,2}} & -R_{w_{1,3}} & \dots & -R_{w_{1,n}} \\ -R_{w_{2,1}} & R_{w_{2,2}} & -R_{w_{2,3}} & \dots & -R_{w_{2,n}} \\ -R_{w_{3,1}} & -R_{w_{3,2}} & R_{w_{3,3}} & \dots & -R_{w_{3,n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -R_{w_{n,1}} & -R_{w_{n,2}} & -R_{w_{n,3}} & \dots & R_{w_{n,n}} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \\ \vdots \\ I_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

gdzie:

$R_{w_{1,1}} = R_{1,1} \cdot x_{1,1} \vee x_{2,1} + R_{3,1} \cdot x_{2,1} \vee x_{3,1} + R_{5,1} \cdot x_{3,1} \vee x_{4,1} \dots R_{n,1} \cdot x_{n-1,1} \vee x_{n,1}$ – rezystancja własna oczka I- ego; $R_{w_{1,2}} = R_{1,1} \cdot x_{1,1} \vee x_{2,1}$ – rezystancja wzajemna oczka I - ego i II – ego; $R_{w_{1,3}} = 0$ – rezystancja wzajemna oczka I-ego i III-ego;
 $R_{w_{n,n}} = R_{n-1, n-1} \cdot x_{n-1, n-1} \vee x_{n-1, n} + R_{n,n-1} \cdot x_{n-1, n-1} \vee x_{n,n-1} + R_{n,n} \cdot x_{n-1, n} \vee x_{n,n}$ – rezystancja własna oczka n – tego; $E_{11} = E$ – siła elektromotoryczna.

W celu wyznaczenia wektora \mathbf{I} (3.4) z równania (3.1), mnożymy lewostronnie to równanie przez macierz odwrotną $(\mathbf{R})^{-1}$ względem macierzy rezystancji oczkowej \mathbf{R} ($\det \mathbf{R} \neq 0$) i uzyskuje się:

$$(\mathbf{R})^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{I} = (\mathbf{R})^{-1} \cdot \mathbf{E} \quad (3.5)$$

Iloczyn macierzy odwrotnej przez macierz daną jest równy macierzy jednostkowej, w następstwie tego otrzymamy:

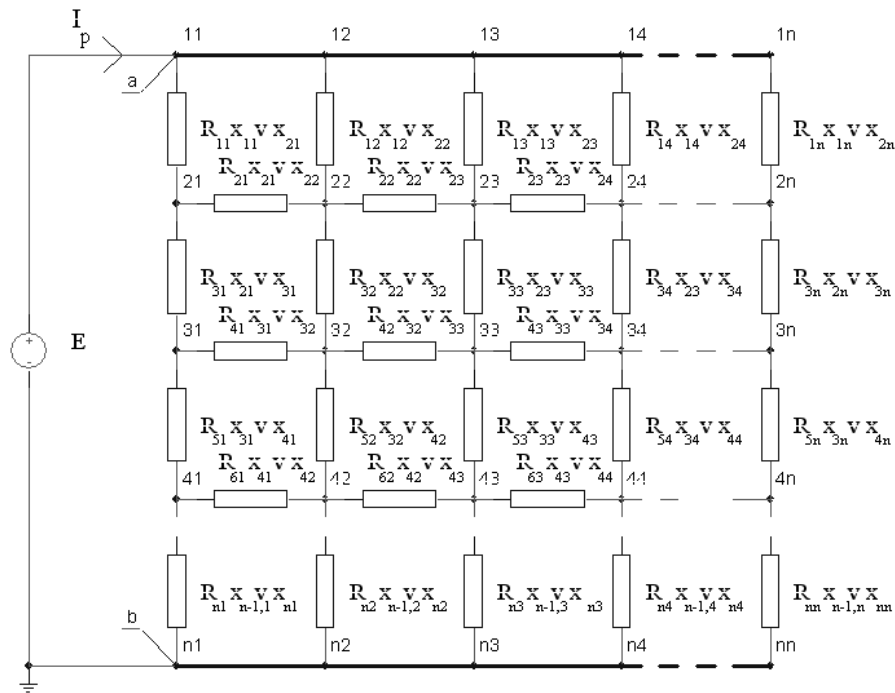
$$\mathbf{I} = (\mathbf{R})^{-1} \cdot \mathbf{E} \quad (3.6)$$

Prąd perkolacji \mathbf{I}_p (Rys.3.1) jest równy pierwszemu wierszowi wektora prądów oczkowych (3.4). W celu wyznaczenia prąd perkolacji mnożymy lewostronnie równanie macierzowe (3.6) przez wektor

$$\mathbf{X}^T = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (3.7)$$

i ostatecznie, otrzymujemy macierz jedno-elementową prądu perkolacji:

$$\mathbf{I}_p = \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{I} = \mathbf{X}^T \cdot (\mathbf{R})^{-1} \cdot \mathbf{E} \quad (3.8)$$



Rys. 3.1. Schemat zastępczy modelu elektrycznego perkolacji dla węzłów na sieci: a – elektroda górna; b – elektroda dolna; E – siła elektromotoryczna; I_p – prąd perkolacji; $R_{nn}x_{n-1,n}v_{x_{nn}}$ – rezystor R_{nn} z alternatywą v , która posiada dwa zdania logiczne $x_{n-1,n}$ i x_{nn} (współczynniki)

4. OBLICZENIA SYMULACYJNE STRATY MOCY NA POWIERZCHNI IZOLATORA CYLINDRYCZNEGO

4.1. „Stabilizacja” macierzy rezystancji oczkowej

Podczas obliczeń symulacyjnych straty mocy na powierzchni izolatora w oparciu o jego model perkolacji (dla węzłów na sieci) następuje losowe niszczenie rezystorów (przyrównywanie do zera), które w odpowiednich konfiguracjach zgodnie z metodą prądów oczkowych Maxwella [1], tworzą elementy macierzy (3.2). Należy dodać, że te rezystory rozmieszczone są przede wszystkim na głównej przekątnej macierzy (3.2).

Podczas obliczeń symulacyjnych musi być spełniony warunek $\det \mathbf{R} \neq 0$. Aby wymieniony warunek był spełniony w toku obliczeń, należy wprowadzić odpowiedni współczynnik x (podrozdział 4.3) do elementów macierzy, które znajdują się na głównej przekątnej. Wielkość współczynnika należy tak dobrać, aby nie wpływał na wartość obliczanej mocy (podrozdział 4.3).

4.2. Opis utworzonego programu obliczeniowego w środowisku *Mathcad* modelu perkolacji dla węzłów na sieci

Liczbę 121 odzwierciedlającą ilość węzłów (współczynników – zdań logicznych) w sieci usystematyzowano w sposób losowy (liczby całkowite), odpowiednio według operacji *rnd()* i *ceil()* programu *Mathcad* [6]. Usystematyzowanym w sposób losowy węzłom przyporządkowuje się wartości współczynników równe zeru (zdania fałszywe) za pomocą funkcji x_n (podrozdział 4.3) utworzonej w programie *Mathcad*. Zapelnianie w sposób losowy „plamki przewodzącymi” węzłów na sieci jest symulowane generowaniem współczynników $x_n = 0$ (zdań fałszywych). W wyniku operacji generowania takich współczynników (zdań fałszywych) rezystory $R_{n,n}$ znajdujące się w macierzy (3.2) z przypisanymi im funkcjami ($R_{n,n} \cdot x_{n-1,n} \vee x_{n,n}$ - alternatywa dwóch zdań logicznych) zostaną zniszczone (przyrównane do zera) wtedy i tylko wtedy, gdy oba zdania (współczynniki) x_{n-1} i $x_{n,n}$ alternatywy są fałszywe. Obecność „plamki przewodzącej” w danym węźle sieci oznacza, że wszystkie rezystory pomiędzy nim a węzłami najbliższych sąsiadów, w których znajdują się „plamki przewodzące” mają rezystancję równą zeru.

Należy dodać, że indeksy wszystkich współczynników (zdań logicznych) zawartych w macierzy (3.2) są „aktywne” (przystosowane do obliczeń numerycznych). Natomiast indeksy rezystorów odnoszą się tylko do ich oznaczeń.

4.3. Algorytmy obliczeniowe w środowisku *Mathcad* utworzonego programu wyznaczania strat mocy na powierzchni izolatora

$$N := 121$$

$$n := 1..N$$

$$y_n := \text{ceil}(\text{rnd}(N))$$

$$x_n := \begin{cases} 0 & \text{if } 1 \leq y_n \leq 121 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E_{11} := E, E := 15.0 \cdot 10^3 \text{ V}, x := 10^{-8}, D := 0.05 \text{ m}, L := 0.15 \text{ m}$$

$$R_1 := 1.13 \cdot 10^6 \Omega, R_2 := 1.13 \cdot 10^6 \Omega, R_3 := 1.13 \cdot 10^6 \Omega \dots R_{200} := 1.13 \cdot 10^6 \Omega$$

$$Rw_{1,1n} := R_1 \cdot x_1 \vee x_{12} + R_{22} \cdot x_{12} \vee x_{23} + R_{43} \cdot x_{23} \vee x_{34} + \dots + R_{190} \cdot x_{100} \vee x_{111} + x,$$

$$Rw_{1,2n} := R_1 \cdot x_1 \vee x_{12}, Rw_{1,3n} := 0,$$

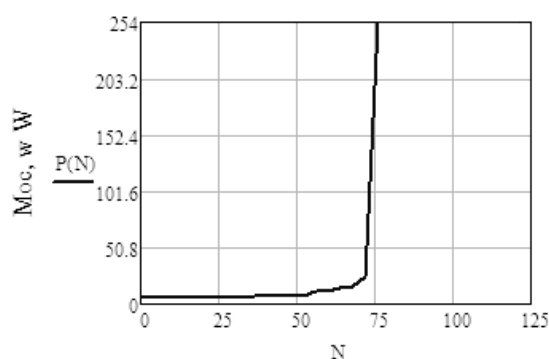
$$Rw_{101,101n} := R_{189} \cdot x_{109} \vee x_{110} + R_{199} \cdot x_{109} \vee x_{120} + R_{200} \cdot x_{110} \vee x_{121} + x.$$

$$\mathbf{R}_n := \begin{bmatrix} R_{w1,1n} & -R_{w1,2n} & -R_{w1,3n} & \dots & -R_{w1,101n} \\ -R_{w2,1n} & R_{w2,2n} & -R_{w2,3n} & \dots & -R_{w2,101n} \\ -R_{w3,1n} & -R_{w3,2n} & R_{w3,3n} & \dots & -R_{w3,101n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -R_{w101,1n} & -R_{w101,2n} & -R_{w101,3n} & \dots & R_{w101,101n} \end{bmatrix}$$

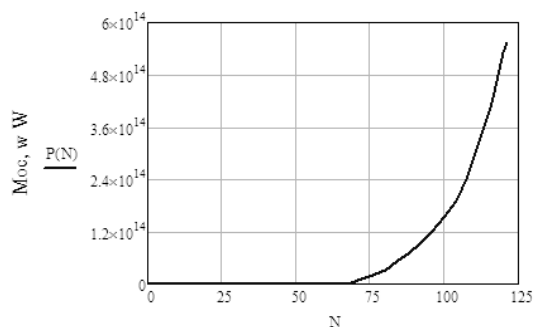
$$\mathbf{E} := \begin{bmatrix} E_{11} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P := \begin{cases} \text{for } n \in 1..N \\ \mathbf{I}_p \leftarrow \mathbf{X}^T \cdot (\mathbf{R}_n)^{-1} \mathbf{E} \text{ if } (x_n = 0 \vee 1) \\ \gamma_s \leftarrow \frac{\mathbf{I}_p}{E} \\ P \leftarrow \int_0^{\gamma_s} E^2 \cdot \pi \cdot D \cdot L \cdot d\gamma_s \\ P \end{cases}$$

Wyniki obliczeń symulacyjnych straty mocy na powierzchni izolatora za pomocą modelu jego powierzchni oraz utworzonego programu obliczeniowego umieszczono na Rys. 4.1 i Rys. 4.2.



Rys. 4.1. Obliczenia symulacyjne straty mocy na powierzchni izolatora cylindrycznego – przed wystąpieniem progę perkolacji; N – liczba zapełnionych węzłów w sieci o strukturze kwadratowej



Rys. 4.2. Obliczenia symulacyjne straty mocy na powierzchni izolatora cylindrycznego – wystąpienie progu perkolacji; N_f – liczba zajętych węzłów w sieci o strukturze kwadratowej

5. WNIOSKI

W wyniku przeprowadzonych obliczeń symulacyjnych strat mocy na powierzchni izolatora cylindrycznego za pomocą modelu jego powierzchni (model perkolacji dla węzłów na sieci) oraz opracowanego programu obliczeniowego modeli perkolacji w środowisku *Mathcad* stwierdzono:

- Utworzony model powierzchni izolatora cylindrycznego (model perkolacji dla węzłów na sieci) zweryfikowano za pomocą wartości liczbowej progu perkolacji ($p_c^I = 0,59$) [7].
- Opracowany program obliczeniowy modelu perkolacji (perkolacji dla węzłów na sieci) w środowisku programu *Mathcad*, stanowi doskonałą pomoc dydaktyczną w nauczaniu teorii perkolacji.
- Wyznaczona analitycznie z równania (2.4) strata mocy na powierzchniowego izolatora cylindrycznego dla wartości krytycznego prądu upływnościowego (2.2) (przeskok zabrudzeniowy napięcia(2.3)), odpowiada stracie mocy obliczonej w punkcie perkolacji za pomocą opracowanego programu obliczeniowego w środowisku *Mathcad* (Rys.4.1).
- Na otrzymanych charakterystykach symulacyjnych strat mocy na powierzchni izolatora cylindrycznego w funkcji liczby zajętych węzłów widać stopniowe narastanie wartości strat mocy i nagły wzrost o kilka rzędów wielkości (próg perkolacji).

LITERATURA

- [1] Bolkowski S.: *Teoria obwodów elektrycznych*, wyd. 5, Warszawa, WNT 1995, ISBN 83-204-2218-3.
- [2] Flisowski Z.: *Technika wysokich napięć*, wyd. 5, Warszawa, WNT 2005, ISBN 83-204-3077-1.

- [3] Frączak P.: *Koncepcja „stycznikowa” tworzenia modeli perkolacji w programach PSpice i Mathcad*, Poznań University of Technology Academic Journals, Electrical Engineering Issue 77 Computer Applications in Electrical Engineering 2014, Publishing House of Poznan University of Technology, Poznań, ISSN 1897-0737, s. 107 – 114.
- [4] Frączak P.: *Prąd upływnościowy powierzchniowy izolatora ceramicznego podczas eksploatacji w ujęciu teorii perkolacji*, Poznań University of Technology Academic Journals, Electrical Engineering Issue 78 Computer Applications in Electrical Engineering 2014, Publishing House of Poznan University of Technology, Poznań, ISSN 1897-0737, s. 149– 156.
- [5] Król A., Moczko J.: *PSpice Symulacja i optymalizacja układów elektronicznych*, Wydawnictwo Nakom, Poznań 1999, ISBN 83 - 86969-28-8.
- [6] Palczewski W.: *Mathcad 12,11, 2001i, 2000 w algorytmach*, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2005, ISBN 83-87674-81-8.
- [7] Zallen R.: *Fizyka ciał amorficznych*, Warszawa, WN PWN 1994, ISBN 83-01-11265-4.

THE SIMULATION CALCULATIONS OF THE POWER LOST ON THE INSULATOR SURFACE ACCORDING TO THE THEORY PERCOLATION

The paper presents simulations of the power which is lost on the cylindrical insulator surface. Cylindrical insulator surface has been presented in the form of a percolation model for nodes on the network. This model is an electric circuit, which consists of a voltage source and a network of resistors connected in a square pattern. Considering the created percolation model in the context of numerical calculations, the model has been described analytically by Maxwell's method in the form of a matrix. The program of the numerical computation of the percolation model, which has been received, includes a random way to create nodes "filled" on the network using the appropriate calculation procedures of the Mathcad software. Simulations of the power lost on the cylindrical insulator surface have been carried out using its model of the surface (the percolation for the nodes on the network), and written numerical program.