

dr inż. Jarosław Selech

Poznan University of Technology,
ul. Piotrowo 3, 60-965, Poznań, Poland,
E-mail: jaroslaw.selech@put.poznan.pl

dr hab. Karol Andrzejczak

Poznan University of Technology,
ul. Piotrowo 3A, 60-965, Poznań, Poland,
E-mail: karol.andrzejczak@put.poznan.pl

Zagregowane kryterium wyboru rozkładu czasu do uszkodzenia elementów pojazdów szynowych

Słowa kluczowe: *czas do uszkodzenia, estymacja rozkładu prawdopodobieństwa, niezawodność pojazdów szynowych*

Streszczenie: W pracy przedstawiono zagregowaną metodę doboru dystrybuant hipotetycznych do dystrybuanty empirycznej. Metoda miała na celu identyfikację czasu niezawodnej pracy odnawialnego obiektu technicznego poprzez zastosowanie trzech kryteriów, w których użyto następujących statystyk: zmodyfikowanej statystyki Kołmogorowa-Smirnowa (MK-S), statystyki średniego odchylenia bezwzględnego dystrybuanty hipotetycznej od empirycznej oraz statystyki obliczanej na podstawie zlogarytmowanej funkcji wiarygodności. Wartości tych statystyk posłużyły do rangowania jedenastu rozkładów prawdopodobieństwa. Dane dla których dokonano obliczeń dotyczyły uszkodzeń zamka kabiny motorniczego jakie odnotowano w ciągu pięciu lat użytkowania floty 45 tramwajów. Przed obliczeniem statystyk wyznaczono dystrybuantę empiryczną badanego elementu przy pomocy estymatora Kaplana-Meiera, a następnie przy użyciu metody największej wiarygodności oszacowano parametry uwzględnionych w badaniach rozkładów hipotetycznych. Po wyznaczeniu parametrów nastąpiło rangowanie rozkładów hipotetycznych według wartości otrzymanych dla każdego z przyjętych kryteriów, im mniejsza wartość dla danego kryterium tym wyższa pozycja w rankingu, świadcząca o lepszej jakości dopasowania według danego kryterium. Po ustaleniu rankingu według kryteriów zgodności, każdemu z kryteriów zgodności dopasowania dystrybuant modelowych do empirycznej nadano wagi. Następnie na podstawie uzyskanych trzech rankingów oraz wag nadanych poszczególnym kryteriom zgodności wyznaczana jest zagregowana miara zgodności (oznaczona DESV), która służy do wyznaczenia najlepszego rozkładu prawdopodobieństwa. W prezentowanej metodzie przyjęto, że najmniejsza wartość DESV wyznacza najlepiej dopasowany rozkład hipotetyczny. W przypadku badanego elementu rozkładem tym okazał się uogólniony rozkład gamma. Pokazano, że na podstawie zagregowanego kryterium uwzględniającego trzy statystyki zgodności dopasowania zwiększa się wiarygodność estymacji rozkładu czasu pracy do uszkodzenia, unikając tym samym błędów jakie można popełnić uzależniając się tylko od jednej z nich.

1. Wprowadzenie

W tradycyjnych metodach estymacji parametrów rozkładu czasu zdatności obiektu technicznego lub jego elementu przyjmowana jest a priori określona klasa rozkładów. Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie wyników identyfikacji najlepszych rozkładów prawdopodobieństwa czasów zdatności elementów odnawialnego obiektu technicznego z zastosowaniem zagregowanego kryterium dopasowania (aggregate matching criterion) rozkładu prawdopodobieństwa do danych empirycznych. Obiektem badań są elementy lub podzespoły aktualnie eksploatowanych jednorodnych pojazdów szynowych tworzących flotę obsługiwaną przez operatora. Dane empiryczne pozyskiwane w trakcie eksploatacji pojazdów są niepełne, gdyż w momencie zakończenia badań pojazdy są sprawne i nadal użytkowane. Tak więc autorzy niniejszego artykułu w swoich badaniach nie dysponowali pełnymi danymi o czasach zdatności wszystkich elementów

czy podzespołów badanych pojazdów szynowych. W związku z tym pojawiła się konieczność stosowania metod statystycznych uwzględniających dane cenzurowane (ucięte). Posiadając odpowiednio przygotowaną bazę danych o naprawach pojazdów badanej floty można w miarę łatwo wyznaczyć podstawowe charakterystyki niezawodnościowe wymienianych elementów [25]. Problemem natomiast okazuje się wybór dobrej miary zgodności dopasowania rozkładu czasu zdatności dla uszkadzających się elementów pojazdu. Problem ten jest przedmiotem przedstawionych w tej pracy badań i dotyczy zastosowania zagregowanego kryterium do wyznaczania najlepszych rozkładów czasów zdatności wybranych elementów pojazdu szynowego [33]. Wyniki badań zostały opracowane w postaci rankingu zgodności wybranych rodzin rozkładów z wykorzystaniem zagregowanej miary zgodności dopasowania jako kryterium.

W badaniach obiektów technicznych, jako modele czasów do ich uszkodzenia, są stosowane różne rodziny rozkładów prawdopodobieństwa [17]. Do najczęściej stosowanych w analizie czasów zdatności (Life Data Analysis LDA) należą rozkłady: normalny, wykładniczy i Weibulla [19, 10]. W przeprowadzonych badaniach poza wspomnianymi, autorzy sprawdzali możliwości użycia także innych, rzadziej stosowanych rozkładów, których jakość dopasowania do danych empirycznych dla wielu przypadków okazywała się być lepsza, od tych zazwyczaj stosowanych, są to rozkłady: logarytmiczno-normalny, gamma, uogólniony rozkład gamma, logistyczny, logarytmiczno-logistyczny oraz Gumbela [22]. Funkcje gęstości wymienionych rozkładów oraz ich parametry pokazano w tabeli 1. W przypadku uogólnionego rozkładu gamma, w celu łatwiejszej estymacji parametrów, funkcję gęstości podano także w postaci reparametryzowanej [20].

Tab. 1. Funkcje gęstości oraz parametry estymowane

Typ rozkładu	Gęstość prawdopodobieństwa $f(t)$	Parametry rozkładu
Wykładniczy	$f(t; \lambda) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0, \lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$ – parametr skali
Dwuparametrowy wykładniczy	$f(t; \lambda, \gamma) = \lambda e^{-\lambda(t-\gamma)}, t \geq \gamma, \lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$ – parametr skali γ – parametr położenia
Normalny	$f(t; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}, t \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$	μ – wartość oczekiwana σ – odchylenie standardowe
Logarytmiczno-normalny	$f(t; \mu', \sigma') = \frac{1}{t\sigma'\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(t)-\mu'}{\sigma'}\right)^2}, t > 0, \mu' \in \mathbb{R}, \sigma' > 0$	μ' – wartość oczekiwana $\ln T$ o rozkładzie normalnym, σ' – odchylenie standardowe $\ln T$
Dwuparametrowy Weibulla	$f(t; \beta, \eta) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}, t \geq 0, \beta > 0, \eta > 0$	η – parametr skali β – parametr kształtu
Trójparametrowy Weibulla	$f(t; \beta, \eta, \gamma) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}, t \geq \gamma, \beta > 0, \eta > 0, \gamma \in \mathbb{R}$	η – parametr skali β – parametr kształtu γ – parametr położenia
Gamma	$f(t; \mu, \kappa) = \frac{\exp(\kappa(\ln(t)-\mu) - \exp(\ln(t)-\mu))}{t \Gamma(\kappa)}; t > 0, \mu \in \mathbb{R}, \kappa > 0$	e^μ – parametr skali κ – parametr kształtu
Uogólniony Gamma	$f(t; \theta, \beta, \kappa) = \frac{\beta}{\Gamma(\kappa) \cdot \theta} \cdot \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\kappa\beta-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\beta}, \theta > 0, \beta > 0, \kappa > 0$ <p>Reparametryzacja: $\mu = \ln(\theta) + \frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{1}{\lambda^2}\right); \sigma = \frac{1}{\beta\sqrt{\kappa}}; \lambda = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}$</p> $f(t; \mu, \sigma, \lambda) = \begin{cases} \frac{ \lambda }{\sigma t} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)} \cdot \exp\left[\frac{\lambda \frac{\ln(t)-\mu}{\sigma} + \ln\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) - \exp\left(\lambda \frac{\ln(t)-\mu}{\sigma}\right)}{\lambda^2}\right] & \text{dla } \lambda > 0 \\ \frac{1}{t \cdot \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(t)-\mu}{\sigma}\right)^2\right) & \text{dla } \lambda = 0 \end{cases}$ <p>$t \geq 0, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0, \sigma > 0,$</p>	θ – parametr skali, β – parametr kształtu κ – parametr kształtu

Logistyczny	$f(t; \mu, \sigma) = \frac{\exp\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma\left(1+\exp\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\right)^2}, t \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$	σ – parametr skali. μ – parametr położenia
Logarytmologiczny	$f(t; \mu, \sigma) = \frac{\exp\left(\frac{\ln(t)-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma t\left(1+\exp\left(\frac{\ln(t)-\mu}{\sigma}\right)\right)^2}, t > 0, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$	μ – parametr skali σ – parametr kształtu
Gumbela	$f(t; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) - \exp\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\right), \sigma > 0$	μ – parametr położenia σ – parametr skali

Estymację parametrów tych rozkładów można przeprowadzać metodami analitycznymi, numerycznie oraz graficznie [16, 26, 29]. Do najczęściej stosowanych metod zalicza się metodę momentów, metodę największej wiarygodności, metodę najmniejszych kwadratów, metodę dopasowania w siatkach rozkładów oraz metodę współczynnika korelacji wykresu prawdopodobieństwa (ang. probability plot correlation coefficient (PPCC)) [1, 38, 32]. W praktyce inżynierskiej najczęściej stosuje się metody numeryczne i graficzne z użyciem specjalistycznych narzędzi informatycznych [12, 39]. Na podstawie danych eksploatacyjnych i wyboru metody estymacji dokonywana jest estymacja parametrów (kształt, skala, położenie) dla wybranych rodzin rozkładów prawdopodobieństwa [28, 37]. Mając oszacowane różne rozkłady można wskazać wśród nich najlepiej dopasowany do danych empirycznych w sensie najmniejszej sumy kwadratów odchyleń.

W proponowanej metodyce identyfikacji czasu zdatności wybranego elementu pojazdu uwzględnione są wszystkie dostępne dane dotyczące czasów/przebiegów pojazdów do uszkodzenia tego elementu we wszystkich pojazdach badanej floty. Obejmuje to przypadek, w którym dany element jest zdatny w momencie przerwania badań, a czas zdatności takiego elementu nazywany jest prawostronnie cenzurowanym. Sposób przygotowania danych statystycznych na podstawie bazy danych eksploatacyjnych opracowany został w artykułach [3, 2].

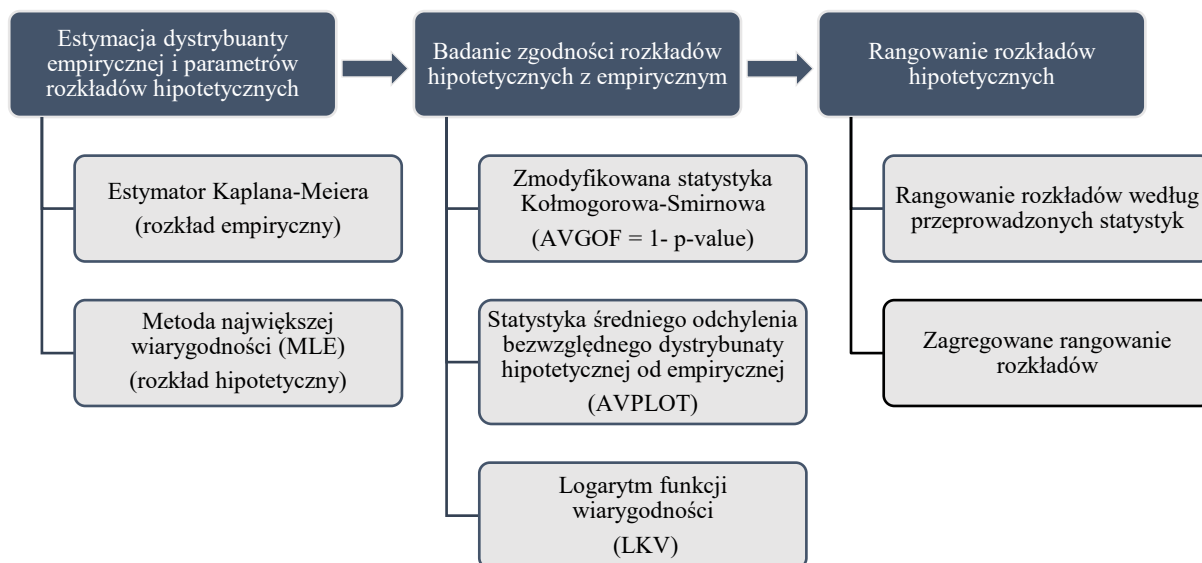
Zamiast tradycyjnego jednokryterialnego wyboru najlepiej dopasowanej rodziny rozkładów prawdopodobieństwa autorzy proponują zastosowanie zagregowanego kryterium uwzględniającego trzy miary zgodności dopasowania rozkładów hipotetycznych. W kryterium tym brany jest pod uwagę ranking zgodności dopasowania poszczególnych modeli probabilistycznych do danych empirycznych w tym do prawostronnie cenzurowanych danych eksploatacyjnych badanej floty pojazdów.

W zagregowanej metodzie wybór rozkładu poprzedzony jest rankingiem rozkładów dla trzech kryteriów zgodności. Estymacji parametrów wybranych rodzin rozkładów dokonano za pomocą programu Weibull++ używając modułu Distribution Wizard, który po przeprowadzeniu odpowiednich obliczeń szereguje rozkłady począwszy od najbardziej dopasowanych. Zanim jednak zostanie przeprowadzone badanie zgodności rozkładów, wyznaczana jest dystrybuanta lub funkcja niezawodności rozkładu empirycznego metodą Kaplana-Meiera, a następnie wyznaczone są parametry rozkładów hipotetycznych metodą największej wiarygodności (MLE – *Maximum Likelihood Estimation*).

Kolejny krok polega na wyznaczeniu statystyk zgodności dopasowania poszczególnych dystrybuant hipotetycznych do dystrybuanty empirycznej oznaczonej F_n . Na tej podstawie dokonywany jest ranking jedenastu rozkładów zestawionych w tabeli 1 stosowanych w analizie przeżycia [18, 30]. Jeśli tylko założenia są spełnione, to rankingi zgodności rozkładów przeprowadzane są niezależnie według trzech kryteriów, z użyciem zmodyfikowanej statystyki Kołmogorowa-Smirnowa (MK-S), średniego odchylenia bezwzględnego dystrybuanty hipotetycznej od empirycznej oraz wartości zlogarytmowanej funkcji wiarygodności [23].

W ostatecznym ustaleniu rankingu rozkładów brane są pod uwagę rankingi uzyskane przez te trzy kryteria z uwzględnieniem wag przypisanych do każdego z nich. Po nadaniu wag kryteriom, wyliczana jest wartość końcowa DESV (ang. *Distribution Estimation Values*), która wskazuje najlepiej dopasowany rozkład wyznaczony według opisanego zagregowanego kryterium. Schemat kolejnych kroków obliczeniowych w zagregowanej metodzie rangowania rozkładów ukazano na rys. 1.

Zgodnie z tym schematem w pierwszym kroku, opierając się na pozyskanych danych oraz analizując długość czasu obserwacji (uciętej prawostronnie) oszacowano estymatorem Kaplana-Meiera parametry funkcji przeżycia i wyznaczono dystrybuantę empiryczną [7]. Następnie w celu wyznaczenia parametrów jedenastu rozkładów hipotetycznych, zestawionych w tabeli 2 zastosowano metodę największej wiarygodności [15, 11].



Rys. 1. Schemat zagregowanego kryterium rankingowania rozkładów

W drugim kroku, kolejno dla jedenastu rozkładów, za pomocą statystyk zgodności oceniana jest hipoteza zerowa

$$H_0: T \sim F \quad (1)$$

orzekająca, że czas do uszkodzenia T badanego elementu pojazdu ma rozkład prawdopodobieństwa o dystrybuancie F z wyznaczonymi parametrami. Ocena ta jest dokonywana na podstawie próby losowej T_1, T_2, \dots, T_n dotyczącej czasów do uszkodzenia badanego elementu. W niniejszej pracy czasy do uszkodzenia badanego elementu wyrażone są przebiegiem liczonym w kilometrach podobnie jak w pracy [2].

2. Kryteria rankingowania rozkładów hipotetycznych

Wśród zastosowanych kryteriów zgodności szczególną rolę pełni zmodyfikowana statystyka Kołmogorowa-Smirnowa (AVGOF – *average goodness of fit*), która ocenia różnicę statystyczną pomiędzy wartościami dystrybuanty empirycznej i hipotetycznej. Ta szczególna rola tej statystyki wynika z faktu jej dużej wrażliwości na lokalne odchylenia. Ponadto można ją stosować nawet przy małej liczbie danych oraz przy nieznanymi parametrach rozkładu hipotetycznego. Zastosowanie statystyki MK-S jest więc koniecznością, gdy parametry badanych rozkładów muszą być estymowane.

Ponieważ rozkłady statystyk MK-S zależą od hipotetycznej rodziny rozkładów, której parametry są estymowane, więc dla każdego rozkładu wyznaczana jest wartość krytyczna, przy której odrzucana jest hipoteza zerowa [30]. Analityczne wyznaczenie wartości krytycznej często jest trudne lub wręcz niemożliwe, dlatego do jej uzyskania stosowana jest metoda Monte Carlo [6, 18].

Statystyka MK-S użyta do sprawdzenia zgodności rozkładu hipotetycznego z rozkładem empirycznym korzysta ze statystyki D_{max} określonej jako maksimum bezwzględnej różnicy między

wartością dystrybuanty empirycznej $F_n(t)$, a dopasowaną dystrybuantą hipotetyczną $F(t)$ i określona jest wzorem [18]:

$$D_{max} = \max_{1 \leq i \leq n} |F_n(t_i) - F(t_i)| \quad (2)$$

gdzie:

- D_{max} – wartość statystyki,
- n – liczebność próby,
- $F_n(t_i)$ – wartość dystrybuanty empirycznej,
- $F(t_i)$ – wartość dystrybuanty hipotetycznej.

Natomiast wartość krytyczna D_{CRIT} w zmodyfikowanej statystyce Kołmogorowa-Smirnowa jak już wspomniano, ze względu na uciążliwość obliczeń, wyznaczana jest metodą Monte-Carlo.

Statystyka MK-S służy do ustalenia prawdopodobieństwa odrzucenia hipotezy zerowej, tj. prawdopodobieństwa zdarzenia $D_{CRIT} < D_{max}$. Tak więc w pierwszym kryterium podstawą porządkowania hipotetycznych rozkładów jest prawdopodobieństwo:

$$P(D_{CRIT} < D_{max}) \quad (3)$$

Im większa wartość statystyki D_{max} tym coraz bardziej istotna jest różnica pomiędzy rozkładem hipotetycznym określonym przez dystrybuantę F a rozkładem empirycznym określonym przez dystrybuantę F_n . Ponieważ wartość krytyczna D_{CRIT} wyznaczana jest metodą Monte Carlo poprzez m -krotne generowanie n chwil uszkodzeń $t_{s1}, t_{s2}, \dots, t_{sn}$ dla których tworzone są realizacje dystrybuant symulacyjnych $F_s(t_{si}), s = 1, 2, \dots, m$ i dla każdej z nich wyznaczone są maksymalne różnice z wartościami dystrybuanty hipotetycznej

$$d_{max,s} = \max_{1 \leq i \leq m} |F_s(t_{si}) - F(t_{si})|, \quad s = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

więc do oszacowania wartości krytycznej D_{CRIT} przyjęta jest średnia arytmetyczna d_{CRIT} określona wzorem [6]:

$$\widehat{D}_{CRIT} = d_{CRIT} = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^m d_{max,s} \quad (5)$$

Ostatecznie w kryterium MK-S do oceny zgodności rozkładów przyjmujemy;

$$AVGOF(F_n, F) = 100 \cdot P(d_{CRIT} < D_{max}) \quad (6)$$

Duże wartości AVGOF, zbliżone do 100, wskazują, że istnieje istotna różnica między rozkładem hipotetycznym a danymi empirycznymi. Stąd rozkład hipotetyczny jest tym lepszy im mniejsza jest wartość statystyki AVGOF.

W drugim kryterium zgodności badane jest średnie odchylenie bezwzględne dystrybuanty hipotetycznej od empirycznej, a statystyka użyta do oceny zgodności oznaczana AVPLOT (*average plot fit*) wyznaczana jest wg wzoru:

$$AVPLOT(F_n, F) = 100 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |F_n(t_i) - F(t_i)| \quad (7)$$

gdzie:

n – liczebność próby,

$F_n(t_i)$ – wartości dystrybuanty empirycznej,

$F(t_i)$ – wartości dystrybuanty hipotetycznej.

Kryterium to w przeciwieństwie do kryterium MK-S nie jest wrażliwe na lokalne odchylenia, uwzględnia natomiast globalne zróżnicowanie rozkładów i stanowi dobre uzupełnienie do kryterium MK-S.

W trzecim kryterium badania zgodności rozkładów użyta została funkcja wiarygodności (LKV – *Likelihood Value Test*), jako miara dopasowania modelu probabilistycznego do danych empirycznych. Obliczana jest wartość logarytmu funkcji wiarygodności (LKV) dla danych empirycznych [27, 14]. Funkcja wiarygodności L zależy od realizacji próby losowej T_1, T_2, \dots, T_n oraz od parametrów θ_j , dla których przyjmuje ona maksymalne wartości. Ogólna postać funkcji wiarygodności przedstawiona jest zależnością [33, 30]:

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k | T_1, T_2, \dots, T_n) = \prod_{i=1}^n f(T_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \quad (8)$$

gdzie:

n – liczba uszkodzonych elementów,

k – liczba parametrów,

$\theta_j, j = 1, 2, \dots, k$ – parametry rozkładu,

$T_i, i = 1, 2, \dots, n$ – czas do uszkodzenia i -tego elementu,

W badanym przypadku, funkcja została rozszerzona o czynniki uwzględniające dane ucięte prawostronnie. Zlogarytmowana funkcja wiarygodności jest sumą logarytmów gęstości prawdopodobieństwa dla poszczególnych czasów życia badanego elementu [18, 30]:

$$\Lambda(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k | T_1, T_2, \dots, T_n) = \sum_{i=1}^n \ln f(T_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \quad (9)$$

gdzie:

L – funkcja wiarygodności,

n – liczba uszkodzonych elementów,

$\theta_j, j = 1, 2, \dots, k$ – parametry rozkładu,

$T_i, i = 1, 2, \dots, n$ – czas do uszkodzenia i -tego elementu,

Wartości estymatorów nieznanymi parametrów $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ są wyznaczone przez maksymalizację zlogarytmowanej funkcji wiarygodności $\Lambda(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$. Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum tej funkcji jest przyjmowanie wartości 0 przez jej wszystkie pochodne cząstkowe.

W celu wyznaczenia estymatorów nieznanymi parametrów wyznaczone są pochodne cząstkowe $\frac{\partial \Lambda(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_j}$ funkcji Λ względem parametrów $\theta_j, j = 1, 2, \dots, k$. Aby oszacować parametry należy każdą pochodną cząstkową przyrównać do zera i rozwiązać k równań:

$$\frac{\partial \Lambda(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_1} = 0$$

... ..

(10)

$$\frac{\partial \Lambda(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_k} = 0$$

W ostatnim kroku, na podstawie każdego z trzech kryteriów zgodności dla wszystkich 11 rozkładów nadawane są rangi od najlepiej do najgorzej dopasowanego rozkładu hipotetycznego do danych empirycznych. Na tej podstawie dla każdego kryterium zgodności z osobna porządkowane są rozkłady hipotetyczne poprzez przypisanie im kolejnych liczb naturalnych. Na koniec na podstawie uzyskanych trzech rankingów oraz wag nadanych poszczególnym kryteriom zgodności wyznaczana jest zagregowana miara zgodności DESV. Miara ta dla i -tej dystrybuanty hipotetycznej F_i wyznaczana jest ze wzoru (11):

$$DESV(F_i) = RAVGOF(F_i) \cdot WAVGOF + RAVPLOT(F_i) \cdot WAVPLOT + RLKV(F_i) \cdot WLKV \quad (11)$$

gdzie:

RAVGOF(F_i) oznacza rangę rozkładu F_i według kryterium AVGOF,
 RAVPLOT(F_i) oznacza rangę rozkładu F_i według kryterium AVPLOT,
 RLKV(F_i) oznacza rangę rozkładu F_i według kryterium LKV,
 WAVGOF oznacza wagę kryterium AVGOF,
 WAVPLOT oznacza wagę kryterium AVPLOT,
 WLKV oznacza wagę kryterium LKV.

Zagregowane kryterium DESV zgodności dopasowania rozkładów jest więc średnią ważoną poszczególnych rang rozkładów hipotetycznych. Po wyliczeniu wartości DESV dla poszczególnych hipotetycznych rozkładów wyznaczany jest ich ostateczny ranking. Rozkład, który uzyska najmniejszą wartość DESV jest pozycjonowany jako najlepiej dopasowany według zaprezentowanego zagregowanego kryterium zgodności i otrzymuje w rankingu numer 1. Zagregowane kryterium jest zastosowane do podjęcia ostatecznej decyzji wyboru najlepiej dopasowanego rozkładu hipotetycznego do danych empirycznych spośród badanych rozkładów hipotetycznych.

3. Przedmiot badań

Zagregowane kryterium rangowania rozkładów czasów zdatności wybranych elementów pojazdu przeprowadzono na podstawie danych eksploatacyjnych floty 45 jednorodnych pojazdów szynowych transportu miejskiego. Badano pięcioczęłowe niskopodłogowe tramwaje Traminio S105P o całkowitej masie 42,5 tony i około 32 metrach długości. Są to wagony przegubowe i jednoprzestrzenne. Tramwaj może zabrać na pokład maksymalnie 229 pasażerów, w tym 48 na miejscach siedzących. Zakres danych eksploatacyjnych obejmował pięć początkowych lat użytkowania floty, w tym dwa lata objęte gwarancją, a trzy kolejne kontraktem serwisowym [31, 9]. Wszystkie tramwaje użytkowane były w podobnych warunkach eksploatacyjnych tj. tej samej infrastrukturze torowej, zbliżonych dziennych i rocznych przebiegach oraz takim samym harmonogramem i zakresem serwisowania (obsług prewencyjnych).



Rys. 2. Tramwaj Tramino S105P

Z bazy danych o uszkodzeniach tramwajów badanej floty, do badania rozkładu czasu do uszkodzenia wybrano zamek otwierania drzwi kabiny motorniczego. Uszkodził się on 54 razy w ciągu pierwszych pięciu lat eksploatacji badanej floty i wygenerował koszty w wysokości 0,52% wszystkich obsług korekcyjnych [5]. Zamek zamocowany jest na drzwiach pomiędzy przestrzenią pasażerską a kabiną motorniczego. Aby otworzyć drzwi kabiny motorniczego od zewnątrz należy specjalnym kluczem odblokować mechanicznie zamek. Uszkodzeniu ulegał element ryglujący zamek, blokując się i tym samym uniemożliwiając otwarcie drzwi i wejście do pojazdu motorniczemu. Należało wówczas w zależności od miejsca, w którym nastąpiło uszkodzenie, wezwać serwis lub siłowo wyważyć drzwi, uszkadzając konstrukcję mocowania zaczepu rygla. Za każdym razem, uszkodzony zamek wymieniany był na nowy. Przyczyną uszkodzenia zamka było zbyt intensywne zużywanie się mechanizmu wewnętrznego odpowiedzialnego za wysuwanie rygla, spowodowane źle dobranym materiałem konstrukcyjnym, w wyniku czego zamek zacinał się, a czasem uniemożliwiał wyjęcie włożonego do niego klucza. Fotografie zamka zamieszczono na rys. 3.



Rys. 3. Zamek otwierania drzwi kabiny motorniczego

4. Dane empiryczne

Proces eksploatacji tramwajów stanowi cenne źródło informacji konieczne do oceny niezbędnych charakterystyk niezawodnościowych oraz prognozowania kosztów ich utrzymania. Pod pojęciem informacji eksploatacyjnej należy rozumieć wszelkie dane o zdarzeniach zachodzących w fazie użytkowania i obsługiwanego tramwajów [13]. Dane te odgrywają kluczową rolę w planowaniu i bieżącym zarządzaniu eksploatacją floty pojazdów, jak również w doskonaleniu technologii i konstrukcji pojazdów [4, 35]. Informacje eksploatacyjne odgrywają szczególnie ważną rolę dla przewoźników użytkujących pojazdy, gdyż umożliwiają właściwe planowanie kosztów eksploatacji, przeglądów i napraw oraz ocenę stosowania środków transportu [24, 34].

Przed przystąpieniem do estymacji parametrów probabilistycznych modeli czasów zdatności wybranych elementów pojazdu należy odpowiednio przygotować dane eksploatacyjne. Dla badanej floty użytkowanych tramwajów dane eksploatacyjne dotyczące poszczególnych elementów pojazdu są ucięte prawostronnie typu I, co oznacza że dla ustalonego czasu użytkowania floty tramwajów tylko w części pojazdów zamek uległ uszkodzeniu i był wymieniany na nowy, a w niektórych pojazdach był wymieniany wielokrotnie. Ponieważ obiektem badań są intensywnie użytkowane pojazdy, więc czasy do uszkodzenia poszczególnych elementów tramwaju liczone są przebiegiem wyrażonym w kilometrach. Znany jest czas rozpoczęcia eksploatacji każdego pojazdu oraz rejestrowane są przebiegi tramwajów przy których nastąpiły uszkodzenia jego elementów [33, 2]. Z przebiegów tramwajów wyznaczane są przebiegi uszkadzających się elementów. Metodę wyznaczania przebiegu uszkadzających się elementów pojazdu przedstawiono w pracy [3].

Odpowiednio przygotowane dane zestawiono w tab. 2. Zawierają one dokładny czas do chwili uszkodzenia badanego elementu – zamka kabiny motorniczego z floty 45 badanych tramwajów wyrażony przebiegiem w kilometrach i oznaczony jako F (ang. *failure*) oraz czas pracy pozostałych nieuszkodzonych zamków, oznaczonych jako S (ang. *suspension*), także wyrażony osiągniętym przebiegiem do chwili zatrzymania badań. W momencie zatrzymania badań wszystkie zamki w 45 pojazdach były sprawne, mimo że wiele z nich było wymienianych z powodu uszkodzenia. Ponieważ głównym powodem wymiany zamka na nowy jest uszkodzenie mechanizmu otwierania, dlatego uszkodzenia tego typu zakwalifikowano do kategorii uszkodzeń mechanicznych.

Tab. 2. Prawostronnie cenzurowane czasy do uszkodzenia zamka w 5-letnim okresie eksploatacji

Przebieg [km]	F/S	Przebieg [km]	F/S	Przebieg [km]	F/S	Przebieg [km]	F/S
174 124	F	256 382	F	114 128	S	67 733	F
196 837	S	144 819	S	135 078	F	300 557	S
317 275	S	223 684	F	136 600	F	103 378	F
292 525	F	46 217	F	97 832	S	177 506	F
112 431	S	43 897	S	377 101	S	23 153	S
196 218	F	155 522	F	93 585	F	242 544	F
1 910	F	201 423	S	238 103	S	89 047	S
93 529	S	119 376	F	285 538	F	125 785	F
334 484	S	198 190	S	43 117	S	58 407	F
366 935	F	368 449	S	221 226	F	117 646	S
28 826	S	340 330	F	117 701	S	202 396	F
191 367	F	58 964	S	28 934	F	127 143	S
21 117	F	193 641	F	135 673	F	287 695	F
135 831	S	155 920	S	155 828	S	53 863	S
348 956	F	206 246	F	92 594	F	174 580	F
38 020	S	144 352	S	197 981	S	139 571	S
188 493	F	371 800	S	148 840	F	210 775	F
70 534	F	22 482	F	27 858	F	102 038	S
102 343	S	139 974	F	107 491	F	131 537	F
340 236	F	39 840	F	52 280	S	126 738	F
52 022	S	127 333	F	250 370	S	83 497	S
115 592	F	21 021	S	282 989	F	176 928	F
79 071	F	376 601	S	77 834	S	81 021	F

72 135	F	354 513	S	86 028	F	103 807	S
105 552	S	203 105	F	226 082	S	-	-

F – uszkodzenie, S – przeżycie

Na podstawie danych z tabeli 2 dokonano estymacji parametrów dla 11 hipotetycznych rozkładów. Wyniki estymacji wszystkich badanych rozkładów podano w zestawieniu tabelarycznym (tab. 3).

Tab. 3. Oszacowane parametry badanych rozkładów

1P-Exponential	2P-Exponential	Normal	Lognormal
$\hat{\lambda} = 3,413E-06$	$\hat{\lambda} = 3,937E-06$ $\hat{\gamma} = 21117$	$\hat{\mu} = 218 279,5$ $\hat{\sigma} = 115 461,8$	$\hat{\mu}' = 12,184$ $\hat{\sigma}' = 0,819$
2P-Weibull	3P-Weibull	Gamma	G-Gamma
$\hat{\beta} = 1,745$ $\hat{\eta} = 255 316,9$	$\hat{\beta} = 1,885$ $\hat{\eta} = 266 209,6$ $\hat{\gamma} = -10 300,12$	$\hat{\mu} = 11,53$ $\hat{\kappa} = 2,307$	$\hat{\mu} = 12,415$ $\hat{\sigma} = 0,605$ $\hat{\lambda} = 0,857$
Logistic	Loglogistic	Gumbel	
$\hat{\mu} = 211 755,9$ $\hat{\sigma} = 68 491,7$	$\hat{\mu} = 12,198$ $\hat{\sigma} = 0,447$	$\hat{\mu} = 274 770,6$ $\hat{\sigma} = 104 341,5$	

5. Identyfikacja najlepszego rozkładu prawdopodobieństwa

Do wyboru najlepszego rozkładu hipotetycznego spośród 11 rozważanych zastosowano opisane w części 2 zagregowane kryterium ich rangowania. W ustaleniu rankingu rozkładów przeprowadzono najpierw estymację parametrów hipotetycznych rozkładów, a następnie przeprowadzono ranking tychże rozkładów na podstawie opisanych trzech kryteriów. Wyniki tego rankingu zestawione są w tab. 4.

Pierwsza kolumna wskazuje nazwę rozkładu prawdopodobieństwa. Druga zawiera wartości statystyki Kołmogorowa-Smirnowa AVGOF – prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy roboczej dla statystyki MK-S. Kolumna trzecia opisana jako AVPLOT przedstawia wartość średnią bezwzględnych wartości różnic pomiędzy dystrybuantami empiryczną a hipotetyczną. Czwarta kolumna oznaczona jako LKV przedstawia miary dopasowania rozkładów wyznaczone z zastosowaniem kryterium zlogarytmowanej funkcji wiarygodności [8, 36, 21].

Tab. 4. Wyniki poszczególnych statystyk dla danych z tabeli 1

Rozkład	AVGOF	AVPLOT	LKV
1P-Exponential	80,740	7,599	-720,16
2P-Exponential	55,253	5,666	-712,58
Normal	30,946	4,178	-715,65
Lognormal	14,276	2,790	-711,82
2P-Weibull	1,034	1,709	-709,71
3P-Weibull	2,396	1,870	-710,23
Gamma	0,045	1,585	-709,78
G-Gamma	0,289	1,589	-709,66
Logistic	36,386	3,730	-717,34
Loglogistic	1,716	1,768	-710,49
Gumbel	84,250	6,355	-723,73

Po wyznaczeniu statystyk zgodności dla trzech kryteriów i nadaniu rang poszczególnym rozkładom prawdopodobieństwa, kolejnym krokiem było przypisanie wag trzem kryteriom zgodności. W pracy użyto wartości wag dobranych przez producenta oprogramowania jako domyślne, wyznaczone na podstawie praktyki inżynierskiej, wynikającej z wielu analiz prowadzonych w zastosowaniach przemysłowych. Stosując wagi przypisane każdemu z kryteriów obliczono średnią ważoną dla uzyskanych rang poszczególnych kryteriów. Na koniec za pomocą

zaprezentowanego zagregowanego kryterium DESV dokonano ostatecznego rankingu jedenastu hipotetycznych rozkładów. W estymacji parametrów hipotetycznych rozkładów oraz w ich rankingowaniu korzystano z programu Weibull++. Dla analizowanych danych przyjęto następujące wagi dla poszczególnych kryteriów AVGOF – 40, AVPLOT – 10 i LKV – 50. Po wyliczeniu wartości DESV wyznaczano ranking rozkładów (tab. 5). Rozkład, który uzyskał najmniejszą wartość DESV jest pozycjonowany jako najlepiej dopasowany według zaprezentowanego zagregowanego kryterium i otrzymał w rankingu numer 1. Jak widać z tab. 5 najmniejszą wartości statystyki DESV uzyskano dla uogólnionego rozkładu gamma. Obliczona ona została ze wzoru (11) w następujący sposób:

$$DES\,V = (2 \times 40) + (2 \times 10) + (1 \times 50) = 150 \quad (12)$$

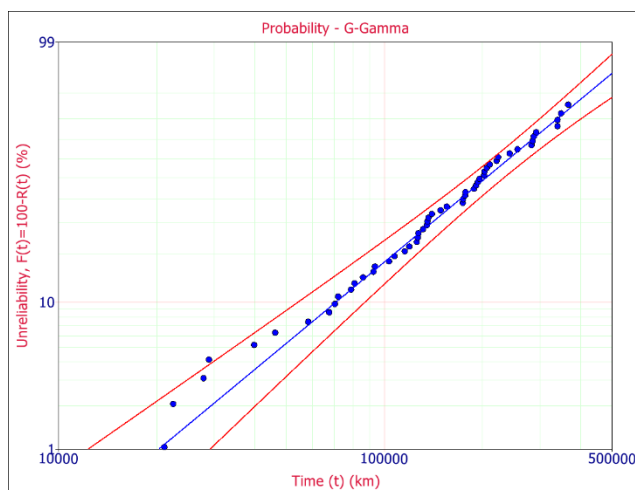
Tak więc, dla danych zawartych w tabeli 2, dotyczących uszkodzeń zamka w ciągu 5 lat eksploatacji floty tramwajów, stosując opracowane zagregowane kryterium jako najlepszy wybrano uogólniony rozkład gamma, co jest odnotowane w ostatniej kolumnie tab. 5.

Tab. 5. Wartości średnich ważonych oraz ranking rozkładów

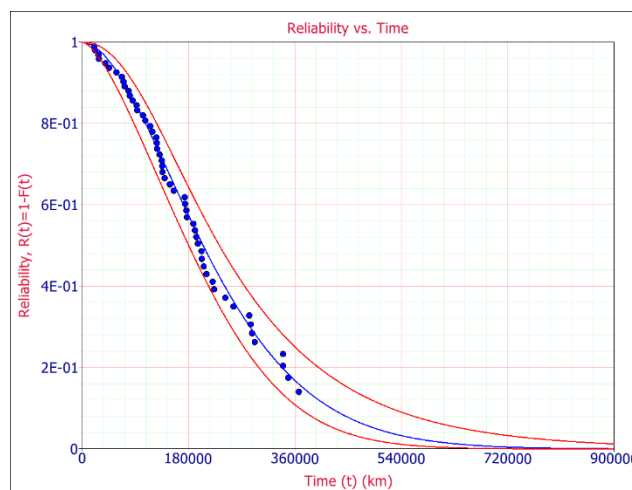
Rozkład	AVGOF	AVPLOT	LKV	DES\,V	Ranking
1P-Exponential	10	11	10	1010	9
2P-Exponential	9	9	7	800	7
Normal	7	8	8	760	6
Lognormal	6	6	6	600	5
2P-Weibull	3	3	2	250	3
3P-Weibull	5	5	4	450	4
Gamma	1	1	3	200	2
G-Gamma	2	2	1	150	1
Logistic	8	7	9	840	8
Loglogistic	4	4	5	450	4
Gumbel	11	10	11	1090	10

Oszacowane reparametryzowane parametry μ, σ, λ dla tego rozkładu uzyskały następujące wartości $\hat{\mu} = 12,415$; $\hat{\sigma} = 0,6058$; $\hat{\lambda} = 0,8572$. Obliczona intensywność uszkodzeń zamka wyniosła 0,000000617/km, a średni czas do uszkodzenia 229 623 km.

Dla zobrazowania dopasowania wytypowanego rozkładu na rys. 4 zaprezentowano dane na siatce uogólnionego rozkładu gamma. Na kolejnych rysunkach przedstawiono funkcję niezawodności (rys. 5), gęstości prawdopodobieństwa (rys. 6) oraz histogram liczebności uszkodzeń (rys. 7).



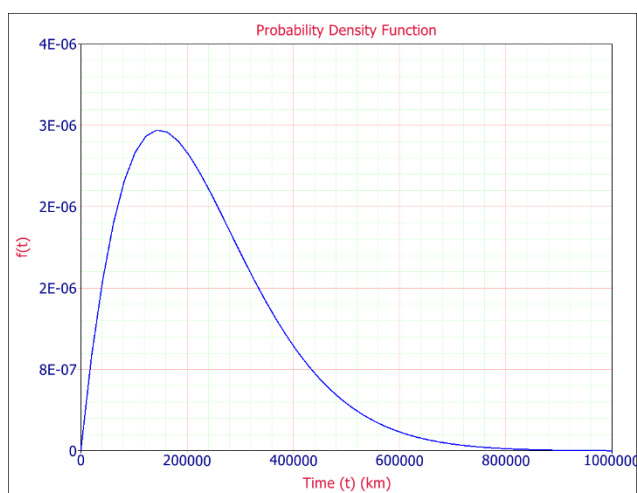
Rys. 4. Przedstawienie danych w siatce probabilistycznej uogólnionego rozkładu gamma



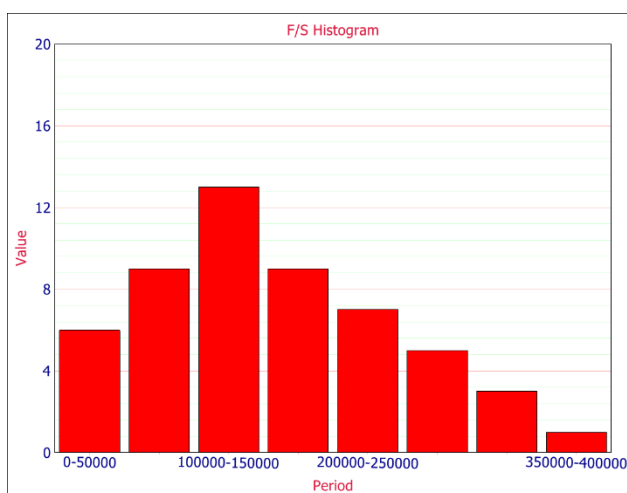
Rys. 5. Funkcja niezawodności

Na rys. 4. niebieska linia reprezentuje zamodelowane prawdopodobieństwo wystąpienia uszkodzeń zgodnie z uogólnionym rozkładem gama, a czerwona linia to dwustronne 95% przedziały ufności. Wykres funkcji niezawodności (rys. 5) pokazuje zmianę wartości niezawodności w czasie wyrażonym jako przebieg w km, wskazując trend w zachowaniu się badanego elementu w przypadku kolejnych uszkodzeń. Wykres funkcji gęstości prawdopodobieństwa uszkodzeń, umożliwia wizualizację rozkładu danych w czasie (rys. 6). Wykres histogramu (rys. 7) pokazuje, że stosunkowo duża część uszkodzeń mieści się między wartościami 50 000 a 200 000 km.

Prezentacja graficzna estymowanych charakterystyk funkcyjnych (niezawodność, gęstość prawdopodobieństwa) oraz histogramu liczebności uszkodzeń może zostać użyta w celu łatwiejszego ustalenia postaci uszkodzenia. Informacja ta jest istotna w przypadku prognozowania przebiegu uszkodzeń oraz wyznaczania kosztów obsługi korekcyjnych z nimi związanych w przyszłości.



Rys. 6. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa



Rys. 7. Histogram

Z przedstawionych badań czasu do uszkodzenia zamka kabiny motorniczego wynika, że najlepiej dopasowanym rozkładem wyznaczonym według zagregowanego kryterium jest uogólniony rozkład gama. Należy również zaznaczyć, iż wraz z pojawiającymi się kolejnymi uszkodzeniami zagregowana metoda dopasowania rozkładu może wskazać inny rozkład jako najlepiej dopasowany gdyż nowe dane, zwłaszcza gdy będzie ich dużo w stosunku do dotychczas uwzględnionych, mogą układać się wg innego modelu. Bardzo pomocna w takim przypadku jest analiza siatki rozkładu prawdopodobieństwa, pozwalająca wstępnie ocenić dopasowanie wybranego modelu hipotetycznego do odpowiedniego przypadku.

Analizując dane o uszkodzeniach z użyciem zagregowanej metody, należy zdawać sobie sprawę z tego, że czasami żaden z modeli statystycznych rozkładu nie pasuje do analizowanych danych. W takim przypadku otrzymuje się najlepsze rozwiązanie z najgorszych, które może słabo opisywać dane (niewielkie dopasowanie). W innych przypadkach, w których wiele modeli może być dobrze dopasowanych do danych empirycznych, same statystyki nie wystarczą, w takim przypadku znajomość mechanizmu uszkodzenia może być nieoceniona przy doborze najbardziej odpowiedniego modelu hipotetycznego. Ważne jest, aby pamiętać, że chociaż zagregowana metoda dla małych prób, także uszereguje wybrane rozkłady prawdopodobieństwa w zależności od liczby parametrów w konkretnym rozkładzie hipotetycznym, to używanie jej w takich przypadkach, obarczone jest dużą niepewnością i zalecane jest aby używać jej dla większych zbiorów danych.

Należy ponadto mieć na uwadze, że dwuparametrowy rozkład wykładniczy, trójparametrowy Weibulla oraz uogólniony gama, zawierają parametr położenia, którego zmiana powoduje przesunięcie dystrybuanty i funkcji rozkładu prawdopodobieństwa bez zmiany jego kształtu.

Uogólniony rozkład gamma to natomiast złożony model, który może łatwo naśladować wiele innych rozkładów i dlatego często wydaje się być najlepiej dopasowanym do analizowanych danych.

Analizując dane naniesione na siatki probabilistyczne, często można stwierdzić, że mają one więcej niż jeden rodzaj uszkodzenia (np.: zmęczeniowe, eksploatacyjne, konstrukcyjne, technologiczne, itd.). W takim przypadku wszystkie rozkłady uszeregowane według zagregowanej metody wyboru rozkładu mogą okazać się źle dopasowanymi, ponieważ opracowana metoda może być stosowana tylko dla jednorodnego typu uszkodzeń badanego elementu. W takich sytuacjach należy uwzględnić możliwość skorzystania z mieszaniny jednego lub kilku rozkładów, np. z połączenia dwóch rozkładów Weibulla.

6. Podsumowanie

Uzyskane wyniki stanowią ważny argument do możliwości zastosowania proponowanej zagregowanej metody doboru rozkładu hipotetycznego do danych empirycznych. Uwzględniając trzy kryteria oceny dokładności dopasowania, unika się błędów jakie można popełnić uzależniając się tylko od jednego z nich.

Używanie tylko jednego kryterium określającego jakość dopasowania dystrybuanty hipotetycznej do empirycznej, często może okazać się niewystarczające, zależy to od wielu zmiennych głównie od ilości danych, czy dane są pełne czy ucięte (cenzurowane), ale przede wszystkim od rodzaju uszkodzenia.

Zagregowana metoda identyfikacji rozkładu hipotetycznego uwzględniająca trzy kryteria, jest metodą ogólną i ma szerokie zastosowanie, przy spełnieniu odpowiednich warunków, a więc liczba obserwacji musi być odpowiednio duża oraz powinna zawierać dokładne dane dotyczące czasów do uszkodzenia lub do zakończenia badań. Zmodyfikowana statystyka K-S (AVGOV) jest wrażliwa na lokalne odchylenia. Z kolei średnie odchylenie bezwzględne dystrybuanty hipotetycznej od dystrybuanty empirycznej (AVPLOT), nie jest już tak wrażliwe na lokalne odchylenia, uwzględnia natomiast globalne zróżnicowanie rozkładów i stanowi dobre uzupełnienie do kryterium MK-S. Dla trzeciego kryterium, czyli logarytmu funkcji wiarygodności (LKV) istotna jest wielkość próby, gdyż w przypadku małych próbek uzyskana wartość może być mocno obciążona.

Korzyści wynikające z poprawnego doboru rozkładu zmiennej losowej czasu zdatności obiektu odnawialnego jakim jest pojazd szynowy są znaczące m.in. ze względu na koszty generowane poprzez niewykorzystanie trwałości potencjalnej elementu jak i strat wynikających z wymuszonych obsług korekcyjnych i nieplanowanego przestoju pojazdu.

Badania zostały sfinansowane z następujących środków: PUT 04/43/SBAD/0111 oraz 05/51/SBAD/3584

Literatura

1. Abernethy R B. The New Weibull Handbook: Reliability & Statistical Analysis for Predicting Life, Safety, Survivability, Risk, Cost, and Warranty Claims (Fifth ed.), Florida, 2010.
2. Andrzejczak K, Selech J. Flexible Prediction of the Vehicle Component Damage. Transport Means 2018: Proceedings of the 22nd International Scientific Conference, Trakai, Lithuania, Part II, 2018; 987-990.
3. Andrzejczak K, Selech J. Generalised Gamma Distribution in the Corrective Maintenance Prediction of Homogeneous Vehicles. In: Kabashkin I, Yatskiv (Jackiva) I, Prentkovskis O. (eds) Reliability and Statistics in Transportation and Communication. RelStat 2018. Lecture Notes in Networks and Systems. Springer, Cham 2018; 68: 519-530, ISBN 978-3-030-12450-2.

4. Andrzejczak K, Selech J. Investigating the trends of average costs of corrective maintenance of public transport vehicles. *Journal of KONBiN*, 2017; 41: 207-226. DOI 10.1515/jok-2017-0011.
5. Andrzejczak K, Selech J. Quantile analysis of the operating costs of the public transport fleet. *Transport Problems*, 2017; 12 (3): 103-111.
6. Andrzejczak K. *Statystyka elementarna z wykorzystaniem systemu Statgraphics*, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 1997.
7. Bartnik G, Pieniak D, Niewczas A M, Marciniak A. Probabilistic model for flexural strength of dental composites used in modelling reliability of the “tooth-dental composite” system. *Eksploracja i Niezawodność – Maintenance and Reliability*, 2016; 18 (1): 136–141, <http://dx.doi.org/10.17531/ein.2016.1.18>.
8. Bavuso S J. *Aerospace Applications of Weibull and Monte Carlo Simulation with Importance Sampling*, IEEE, Annual Reliability and Maintainability Symposium, Proc. 1997.
9. Dolce J E. *Analytical Fleet Maintenance Management*, SAE International, SUA, 1994.
10. Elmahdy E E. Modelling Reliability Data with Finite Weibull or Lognormal Mixture Distributions. *Appl. Math. Inf. Sci.* 2017; 11 (9), 1081-1089.
11. Ferreira L A, Silva J L. Parameter estimation for Weibull distribution with right censored data using EM algorithm. *Eksploracja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 2017; 19 (2): 310–315, <http://dx.doi.org/10.17531/ein.2017.2.20>.
12. Fuc P, Rymaniak L, Ziolkowski A. The correlation of distribution of PM number emitted under actual conditions of operation by PC and HDV vehicles, *WIT Transactions on Ecology and the Environment*. WIT Press, 2013; 174: 207. ISBN: 978-1-84564-718-6.
13. Gill A. Optimisation of the technical object maintenance system taking account of risk analysis results. *Eksploracja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 2017; 19 (3): 420–431, <http://dx.doi.org/10.17531/ein.2017.3.13>.
14. Hajkowski J, Popielarski P, Sika R. Prediction of HPDC casting properties made of AlSi9Cu3 alloy, *Advances in Manufacturing*, SPRINGER, Manufacturing, 2017, 621-631, DOI: 10.1007/978-3-319-68619-6_59.
15. Hirose H. Bias Correction for the Maximum Likelihood Estimation in Two-parameter Weibull Distribution, *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, 1999; 6, 1, <https://www.reliasoft.com/Weibull> [dostęp 2018].
16. Johnson R A, Miller I, Freund J E. *Probability and Statistics for Engineers*, eighth ed., Pearson Education Limited Co., UK, 2014.
17. Kececioglu D. *Reliability & Life Testing Handbook*, PrenticeHall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1993; 1.
18. Lawless J F. *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, second ed., Wiley, 2002.
19. Lawless J F. *Statistical Models And Methods for Lifetime Data*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1982.
20. Lee E T, Wang J W. *Statistical Methods for Survival. Data Analysis*, John Wiley & Sons Inc; (3rd Edition), 2003.
21. Legát V, Mošna F, Aleš Z, Jurča V. Preventive maintenance models – higher operational reliability. *Eksploracja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 2017; 19 (1): 134–141, <http://dx.doi.org/10.17531/ein.2017.1.19>.
22. Liu J, Song B, and Zhang Y. Competing failure model for mechanical system with multiple functional failures. *Advances in Mechanical Engineering* 2018, 10(5) 1–16. DOI: 10.1177/1687814018773155.
23. Loska A. Exploitation assessment of selected technical objects using taxonomic methods, *Eksploracja i Niezawodność – Maintenance and Reliability*, 2013; 15, 1.
24. Młynarski S, Pilch R, Smolnik M, Szybka J. Methodology of network systems reliability assessment on the example of urban transport. *Eksploracja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 2018; 20 (2): 278–283, <http://dx.doi.org/10.17531/ein.2018.2.14>.

26. Młyńczak M. Analiza danych eksploatacyjnych w badaniach niezawodności obiektów technicznych, *Zeszyty Naukowe WSOWL*, 2001; 1 (159).
27. Nelson W. *Applied Life Data Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1982.
28. Perz P, Malujda I, Wilczyński D, Tarkowski P. Methods of controlling a hybrid positioning system using LabVIEW, 21th Scientific Polish–Slovak Conference "Machine Modeling and Simulations 2016", *Procedia Engineering* 2017; 177, 339-346.
29. Pieniak D, Niewczas A M, Niewczas A, Bieniaś J. Analysis of Survival Probability and Reliability of the Tooth-composite Filling System. *Eksploatacja i Niezawodność - Maintenance and Reliability* 2011; 2(50): 25-34.
30. ReliaSoft Corporation, *Life Data (Weibull) Analysis Reference*, ReliaSoft Publishing Tucson, AZ, 2008.
31. Research Project "Increase in the efficiency of functioning of public means of transport as a result of implementation of LCC and RAMS concepts in accordance with the IRIS standards based on integrated information technology system" financed by Polish National Center for Research and Development. No. PBS3/B6/30/2015.
32. Rojek I, Kujawińska A, Hamrol A, Rogalewicz M. Artificial neural networks as a means for making process control charts user friendly. In: Burduk A., Mazurkiewicz D. (eds.), *Intelligent Systems in Production Engineering and Maintenance – ISPEM 2017, Advances in Intelligent Systems and Computing*, Springer, 637, 168-178, 2017.
33. Selech J. *Prognozowanie kosztów obsługiwanego korekcyjnego pojazdów transportu masowego*. Monografia, Wydawnictwo Naukowe ITeE-PIB, Radom 2019, ISBN 978-83-7789-557-3.
34. Świdorski A, Józwiak A, Jachimowski R. Operational quality measures of vehicles applied for the transport services evaluation using artificial neural networks, *Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability*, 2018; 20 (2), 292-299.
35. Trojanowska J, Kolinski A, Galusik D, Varela M L R, Machado J. A methodology of improvement of manufacturing productivity through increasing operational efficiency of the production process. In: Hamrol A., Cizak O., Legutko S., Jurczyk M. (eds) *Advances in Manufacturing. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Cham, 2018; 23-32.
36. Walus K J. Driver's Strategy and Braking Distance in Winter, *Transport Means 2017: Proceedings of the 21st International Scientific Conference*, Juodkrante, Lithuania. 2017; Part 2, 505 – 509, ISSN 1822-296 X, e-ISSN 2351-7034.
37. Wojtkowiak D, Talaśka K, Malujda I, Domek G. Estimation of the perforation force for polymer composite conveyor belts taking into consideration the shape of the piercing punch. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2018. <https://doi.org/10.1007/s00170-018-2381-3>.
38. Ziółkowski J, Borucka A. Model Markowa w logistycznym zarządzaniu przedsiębiorstwem, *Journal of Conbin*, 2016; 2 (38). ISSN 1895-82-82
39. Żurek J, Ziółkowski J, Borucka A. Application of Markov processes to the method for analysis of combat vehicle operation in the aspect of their availability and readiness, *Safety and Reliability – Theory and Applications – Čepin & Briš (Eds)©*, Taylor & Francis Group, London, 2017; 2343-2352. ISBN 978-1-138-62937-0.