

## ZASTOSOWANIE METODY GRADIENTÓW SPRĘŻONYCH W ALGORYTMIE STEROWANIA OPTYMALNEGO WYSOKOŚCIĄ LOTU CZTEROWIRNIKOWEGO BEZZAŁOGOWEGO STATKU POWIETRZNEGO

BARTOSZ BRZOWSKI\*, GRZEGORZ KOWALECZKO\*\*

\*Zakład Awioniki i Uzbrojenia Lotniczego, Wydział Mechatroniki i Lotnictwa, Wojskowa Akademia Techniczna, ul. gen. Sylwestra Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa, Polska, [bartosz.brzozowski@wat.edu.pl](mailto:bartosz.brzozowski@wat.edu.pl)

\*\*Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych ul. Księcia Bolesława 6 01-494 Warszawa, Polska; Wyższa Szkoła Oficerska Sił Powietrznych ul. Dyzwizjonu 303 12, 08-521, Dęblin, Polska, [g.kowaleczko@chello.pl](mailto:g.kowaleczko@chello.pl)

### Streszczenie

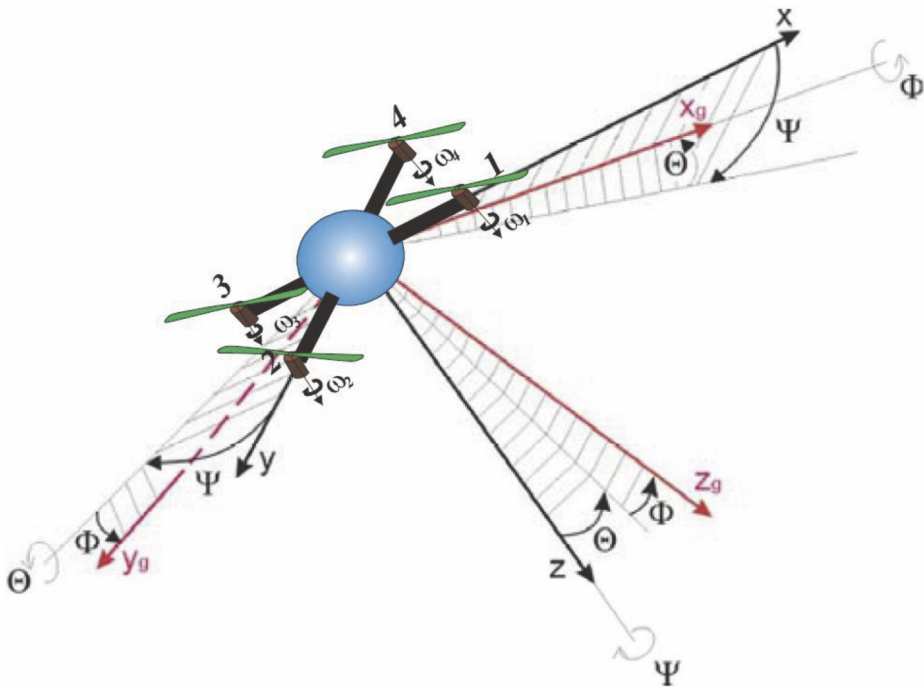
Artykuł przedstawia wyniki przeprowadzonych badań teoretycznych dotyczących zastosowania metody gradientów sprzężonych do rozwiązywania problemu sterowania optymalnego wysokością lotu czterowirnikowego bezzałogowego statku powietrznego (BSP). Ze względu na różnice w strategii sterowania mające wpływ na postać minimalizowanego funkcjonału jakości, problem rozdzielono na dwa zagadnienia – zmianę wysokości oraz stabilizację wysokości. Przeprowadzone analizy pozwoliły na określenie wpływu zmian postaci funkcjonału jakości, jego parametrów czasowych oraz współczynników wagowych na wyznaczoną za pomocą metody gradientów sprzężonych optymalną trajektorię stanu i sterowanie czterowirnikowego BSP podczas zmiany wysokości lotu oraz jej stabilizacji.

Słowa kluczowe: sterowanie optymalne, metoda gradientów sprzężonych, quadrotor, BSP.

### 1. WPROWADZENIE

Wielowirnikowe BSP są w ostatnich latach coraz częściej wykorzystywane do prowadzenia obserwacji, filmowania i fotografii z powietrza. Duże, profesjonalne platformy wielowirnikowe znajdują się obecnie na wyposażeniu straży pożarnej i policji, a także stacji telewizyjnych oraz wytwórni filmowych. Dynamiczny rozwój zainteresowania takimi obiektami oraz powszechne wprowadzanie ich do zastosowań cywilnych nastąpiło w 2014 roku, po ustaleniu przez Urząd Lotnictwa Cywilnego zasad wydawania świadectw kwalifikacji dla operatorów bezzałogowych statków powietrznych. O popularności i powszechności takich konstrukcji świadczy również możliwość nabycia w hipermarketach, nawet za kilkaset złotych, prostych, niewielkich modeli czterowirnikowych wyposażonych w kamerę. Przeznaczone są one do celów rekreacyjnych. Oczywiście dla tych konstrukcji takie parametry jak zasięg, czas lotu i jakość otrzymanego obrazu, zdecydowanie odbiegają od rozwiązań profesjonalnych. Niemniej jednak pozwalają użytkownikom na łatwy dostęp do zaawansowanych technologii bez konieczności zdobywania kosztownych uprawnień do wykonywania lotów.

Czterowirnikowy BSP jest obiektem niestatecznym statycznie oraz dynamicznie i wymaga ciągłej stabilizacji położenia w przestrzeni. Sterowanie polega na zmianie prędkości obrotowej każdego z czterech silników umieszczonych na końcach ramion o jednakowej długości. Lot może odbywać się w dwóch konfiguracjach: „x” z dwoma silnikami umieszczonymi w kierunku ruchu oraz „+” z jednym silnikiem umieszczonym w kierunku ruchu (Brzozowski 2010). Najczęściej stosowaną obecnie metodą sterowania takich obiektów jest wykorzystanie regulatora proporcjonalno-całkująco-różniczkującego (PID) do minimalizacji uchybu pomiędzy wartością zadaną oraz aktualną kątów orientacji przestrzennej poprzez zmianę prędkości obrotowej odpowiednich silników (Salih 2010, Brzozowski 2011). Ponadto w ośrodkach na całym świecie prowadzone są badania nad zastosowaniem bardziej zaawansowanych algorytmów opartych między innymi na logice rozmytej oraz sterowaniu optymalnym (Bouabdallah 2007, Sharma 2012). W przeprowadzonych badaniach, na potrzeby opracowania algorytmu sterowania optymalnego wysokością lotu z zastosowaniem metody gradientów sprzężonych, przyjęto lot w konfiguracji „+” oraz układy współrzędnych i numerację wirników zgodnie z rys. 1.



Rys. 1. Układy współrzędnych  $Oxyz$  i  $Ox_g, y_g, z_g$  dla czterowirnikowego BSP oraz kąty przejścia pomiędzy nimi [Kowaleczko, 2010]

### 1.1. Spis stosowanych oznaczeń

- $\alpha$  – współczynnik poprawy wektora sterowania
- $\beta$  – współczynnik kierunku poszukiwań minimum
- $\varepsilon$  – dokładność wyznaczenia minimum
- $\Phi$  – przechylenie
- $\Theta$  – pochylenie
- $\psi$  – odchylenie
- $\omega_i$  – prędkości obrotowe silników

**b** – całkowity współczynnik ciągu śmigła  
**d** – całkowity współczynnik oporu śmigła  
**t** – czas  
**t<sub>0</sub>** – chwila początkowa  
**t<sub>f</sub>** – chwila końcowa  
**p** – prędkość kątowna przechylania  
**q** – prędkość kątowna pochylenia  
**r** – prędkość kątowna odchylenia  
**u** – składowa prędkości w osi x  
**v** – składowa prędkości w osi y  
**w** – składowa prędkości w osi z  
**x** – położenia w osi x  
**y** – położenie w osi y  
**z** – położenie w osi z  
**I** – osiowe momenty bezwładności  
**J<sub>r</sub>** – moment bezwładności śmigła  
**Q<sub>i</sub>** – współczynniki wagowe funkcjonału jakości sterowania  
**S** – zbiór docelowy  
**U** – zbiór sterowań dopuszczalnych  
**X** – zbiór stanów dopuszczalnych  
**λ** – wektor współczynników Lagrange’a  
**g** – wektor trajektorii gradientu sterowania  
**p** – wektor kierunków poszukiwań minimum wektora sterowania  
**u** – wektor sterowań  
**x** – wektor stanu  
**x<sub>0</sub>** – wektor stanu początkowego  
**x<sub>k</sub>** – wektor stanu końcowego  
**φ** – wektorowa funkcja stanu końcowego funkcjonału jakości  
**f** – funkcja wektorowa stanu  
**H** – Hamiltonian  
**J** – funkcjonał jakości sterowania  
**L** – wektorowa funkcja podcałkowa funkcjonału jakości

## 2. METODA GRADIENTÓW SPRZĘŻONYCH W ALGORYTMIE STEROWANIA OPTYMALNEGO

Zgodnie z definicją podaną przez Athansi Falb (1966), zagadnienie sterowania optymalnego dla układu dynamicznego opisanego równaniem różniczkowym:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (1)$$

przy zbiorze docelowym  $S$ , funkcjonałe jakości  $J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u})$ , zbiorze  $U$  sterowań dopuszczalnych i wektorze stanu początkowego  $\mathbf{x}_0$  w chwili początkowej  $t_0$ , brzmi: znaleźć wektor sterowań  $\mathbf{u}$ , należący do zbioru sterowań dopuszczalnych  $U$ , minimalizujący funkcjonał jakości sterowania  $J(\mathbf{u}) = J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u})$ .

Z powyższej definicji wynika, że postawienie problemu sterowania optymalnego wymaga zrealizowania następujących czterech etapów:

1. Opracowanie modelu matematycznego sterowanego obiektu, opisanego za pomocą równania różniczkowego zgodnie ze wzorem (1), przy czym stan  $\mathbf{x}$  jest wektorem

$n$ -wymiarowym dla obiektu  $n$ -tego rzędu o parametrach skupionych a  $f$  jest funkcją wektorową stanu  $\mathbf{x}$  i wektora sterowań  $\mathbf{u}$ .

2. Określenie ograniczeń wektorów stanu  $\mathbf{x}$  i sterowań  $\mathbf{u}$ , czyli obszarów dopuszczalnych  $X$  i  $U$ , tak aby  $\mathbf{x} \in X$  oraz  $\mathbf{u} \in U$  w czasie od chwili początkowej  $t_0$  do chwili końcowej  $t_f$ .
3. Zdeterminowanie zadania sterowania optymalnego, czyli określenie stanu początkowego  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , z którego należy przeprowadzić obiekt do wybranego stanu końcowego  $\mathbf{x}(t_f)$ , przy czym czas końcowy  $t_f$  nie musi być z góry znany.
4. Zdefiniowanie minimalizowanego funkcjonału jakości sterowania  $J(\mathbf{u})$  o postaci zgodnej z równaniem:

$$J(\mathbf{u}) = \varphi[\mathbf{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (2)$$

Istnieje wiele metod poszukiwania rozwiązania optymalnego dla tak postawionego problemu sterowania. Zdecydowano się na zastosowanie zasady minimum Pontriagina i metody gradientów sprzężonych. Algorytm jako pierwsi zaprezentowali Lasdon, Mitter i Waren (1967). W następnych latach był on modyfikowany i powszechnie stosowany, również do zagadnień związanych z lotnictwem (Mehra 1967, Willoughby 1969). Zastosowanie metody gradientów sprzężonych wymaga wyznaczenia trajektorii gradientu zgodnie ze wzorem:

$$\mathbf{g}(t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \quad (3)$$

gdzie  $H$  – Hamiltonian wyznaczony według formuły:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (4)$$

gdzie  $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(t)$  jest  $n$ -wymiarowym wektorem obliczanym z zależności:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (5)$$

$$\lambda_i(t_f) = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \right|_{t=t_f} \quad (6)$$

Metoda gradientów sprzężonych zastosowana w badaniach wykorzystuje algorytm numeryczny opisany poniżej.

Dla obiektu opisanego równaniem różniczkowym (1), o określonym stanie początkowym  $\mathbf{x}_0$  i współczynniku jakości sterowania (2) należy:

1. Przyjąć dla iteracji  $i = 0$  pierwsze przybliżenie trajektorii sterowania  $\mathbf{u}_0(t)$ ;
2. Przy określonym stanie początkowym  $\mathbf{x}_0$  przeprowadzić całkowanie równania (1) od  $t_0$  do  $t_f$ ;

3. Przeprowadzić całkowanie równania (5), uwzględniając (6), od  $t_f$  do  $t_0$ ;
4. Wyznaczyć trajektorię gradientu zgodnie ze wzorem (3);
5. Wyznaczyć współczynnik  $\beta_i$  zgodnie ze wzorem:

$$\beta_i = \frac{\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{g}_{i+1}(t) \mathbf{g}_{i+1}(t) dt}{\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{g}_i(t) \mathbf{g}_i(t) dt} \quad (7)$$

przy czym dla  $i = 0$  jest  $\beta_0 = 0$ ;

6. Wyznaczyć kierunek poszukiwań minimum:

$$\mathbf{p}_{i+1} = -\mathbf{g}_{i+1} + \beta_i \mathbf{p}_i \quad (8)$$

7. Wyznaczyć trajektorię sterowania:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \alpha \mathbf{p}_i \quad (9)$$

gdzie współczynnik  $\alpha = \min_{\alpha_i} J(\mathbf{u}_i + \alpha \mathbf{p}_i)$  wyznaczany jest metodą złotego podziału minimum jednej zmiennej;

8. Powtórzyć punkty 2-7 obliczeń aż do spełnienia warunku minimum:

$$J(\mathbf{u}_{i+1}) - J(\mathbf{u}_i) \leq \varepsilon \quad (10)$$

gdzie  $\varepsilon$  – dokładność wyznaczenia minimum.

### 2.1. Problem sterowania optymalnego dla czterowirnikowego BSP

Problem sterowania optymalnego dla czterowirnikowego BSP został postawiony przez autorów w ramach odrębnej pracy (Brzozowski 2013), przy czym na potrzeby sterowania wysokością lotu równanie stanu (1) sformułowane na podstawie dynamiki lotu czterowirnikowego BSP (Kowaleczko 2010) uproszczono zakładając symetrię oraz pomijalnie małe zmiany kątów orientacji przestrzennej obiektu. Otrzymano w ten sposób, dla wektora stanu (11), układ dwunastu równań różniczkowych opisanych wzorami (12), w których elementy wektora oznaczono przez „x” z indeksem dolnym dopowiadającym kolejności zmiennych w wektorze stanu. Podczas implementacji modelu czterowirnikowego BSP wykorzystano parametry oraz zależności wyznaczone podczas badań rzeczywistego obiektu (Bouabdallah 2007).

Wektor stanu ma postać:

$$\mathbf{x} = [\Phi, \Theta, \Psi, p, q, r, u, v, w, x, y, z]^T \quad (11)$$

gdzie:  $\Phi, \Theta, \Psi$  – kąty Eulera [rad];  $p, q, r$  – prędkość kątowe [rad/s];  $u, v, w$  – składowe prędkości [m/s];  $x, y, z$  – położenie w przestrzeni [m].

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_4 \\
\dot{x}_2 &= x_5 \\
\dot{x}_3 &= x_6 \\
\dot{x}_4 &= a_1 x_5 x_6 + a_2 x_5 U_0 + a_3 U_2 \\
\dot{x}_5 &= -a_1 x_4 x_6 - a_2 x_4 U_0 + a_3 U_3 \\
\dot{x}_6 &= a_4 U_4 \\
\dot{x}_7 &= \frac{U_1}{m} (\cos x_1 \sin x_2 \cos x_3 + \sin x_1 \sin x_3) \\
\dot{x}_8 &= \frac{U_1}{m} (\cos x_1 \sin x_2 \sin x_3 - \sin x_1 \cos x_3) \\
\dot{x}_9 &= g - \frac{U_1}{m} \cos x_1 \cos x_2 \\
\dot{x}_{10} &= x_7 \\
\dot{x}_{11} &= x_8 \\
\dot{x}_{12} &= x_9
\end{aligned} \tag{12}$$

gdzie:  $a_1 = \frac{I_x - I_z}{I_x}$ ;  $a_2 = \frac{J_r}{I_x}$ ;  $a_3 = \frac{l}{I_x}$ ;  $a_4 = \frac{l}{I_z}$ ;  $U_0 = -\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4$ ;  $U_1 = b(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)$ ;

$U_2 = b(-\omega_2^2 + \omega_4^2)$ ;  $U_3 = b(\omega_1^2 + \omega_3^2)$ ;  $U_4 = d(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2)$ ;  $I$  - osiowe momenty

bezwładności względem osi  $x$  i  $z$ ;  $J_r$  - moment bezwładności śmigła;  $l$  - rozpiętość ramion;  $\omega_i$  - prędkości obrotowe silników;  $b, d$  - współczynniki wyznaczone na podstawie badań obiektu.

W algorytmie zastosowano ograniczenia dla wszystkich zmiennych wektora stanu oprócz położenia  $x$  i  $y$  w przestrzeni. Kąty orientacji przestrzennej ograniczono do  $\pm 0,1$  [rad], prędkości kątowe do  $\pm 0,05$  [rad/s], składowe prędkości do 5 [m/s] oraz uniemożliwiono lot poniżej wysokości zerowej. Ograniczenie wektora sterowań wynikało z parametrów silników, których maksymalna prędkość obrotowa wynosiła 800 [obr/min].

W związku z istotnością poszczególnych zmiennych wektora stanu w kolejnych etapach, dla każdego etapu lotu, konieczne jest wyznaczenie innego funkcjonału jakości sterowania. Na tej podstawie określono postać funkcjonału jakości sterowania wysokością lotu:

$$J = Q_1 (x_{12}(t_f) - x_{f12})^2 + \int_{t_0}^{t_f} Q_2 (x_8(t))^2 dt \tag{13}$$

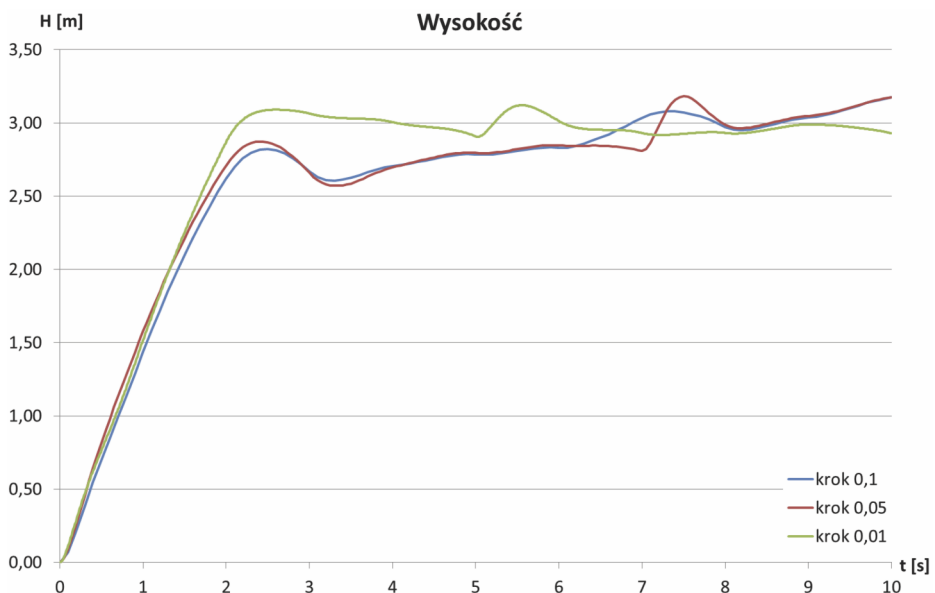
gdzie wzięto pod uwagę dwie zmienne wektora stanu współrzędną wysokości oraz składową pionową prędkości lotu.

Zaproponowana postać funkcjonału jakości pozwala na uzyskanie optymalnej trajektorii sterowania, gdy podczas lotu prędkość pionowa będzie jak najmniejsza zaś położenie końcowe będzie jak najbliższe zadanej wysokości lotu. Współczynniki  $Q_1$  i  $Q_2$  zostały wprowadzone w celu zdeterminowania wagi poszczególnych zmiennych na końcową wartość funkcjonału

jakości sterowania. Wpływ zmian wartości tych współczynników został pokazany i omówiony w kolejnym rozdziale artykułu.

### 3. BADANIA ALGORYTMU STEROWANIA WYSOKOŚCIĄ LOTU

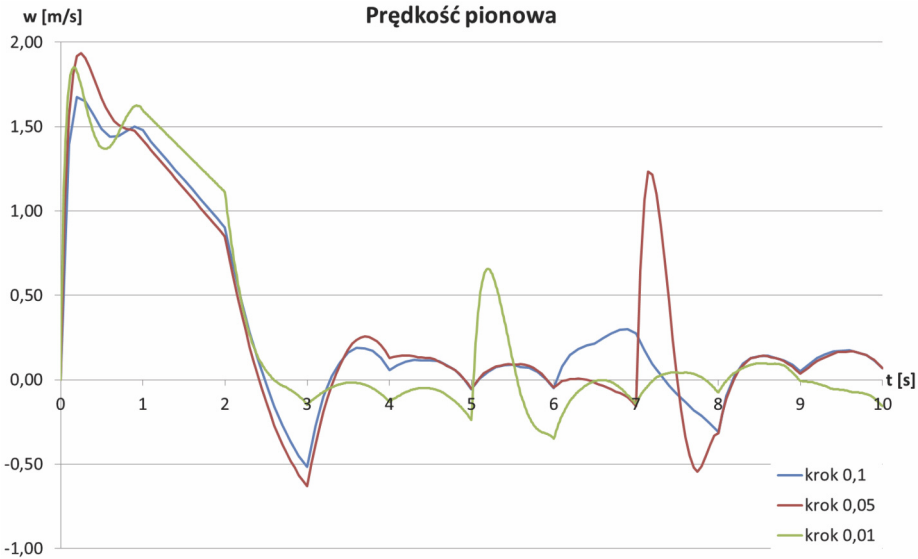
Badania zastosowania metody gradientów sprzężonych do rozwiązania problemu sterowania optymalnego wysokością lotu czterowirnikowego BSP obejmowały wpływ zmian czasu i kroku całkowania oraz wartości współczynników  $Q_1$  i  $Q_2$  funkcjonału (13) na trajektorię stanu i sterowania. Przeprowadzono szereg obliczeń dla różnych kombinacji wspomnianych parametrów, po czym wybrano reprezentatywne przypadki dla wznoszenia z poziomu zerowego do wysokości 3 [m] przy całkowitym czasie lotu 10 [s]. W przypadku zaprezentowanych poniżej wyników algorytm wykonywał obliczenia iteracyjnie przyjmując za wektor wartości początkowych stan końcowy z poprzedniej iteracji. W każdej iteracji funkcjonał jakości spełniał przyjęty warunek minimum dla zadanego czasu całkowania od  $t_0$  do  $t_f$ . Dlatego też konieczne było rozpoczynanie minimalizacji przy nowych warunkach początkowych, w celu otrzymania trajektorii sterowania optymalnego oraz wektora stanu dla przyjętego czasu lotu. Podany czas całkowania dotyczy pojedynczej iteracji, natomiast całkowity czas przedstawiony na wykresach oznacza przyjęty czas lotu. Liczba powtórzeń algorytmu wynikała z zadanego czasu całkowania i całkowitego czasu symulowanego lotu.



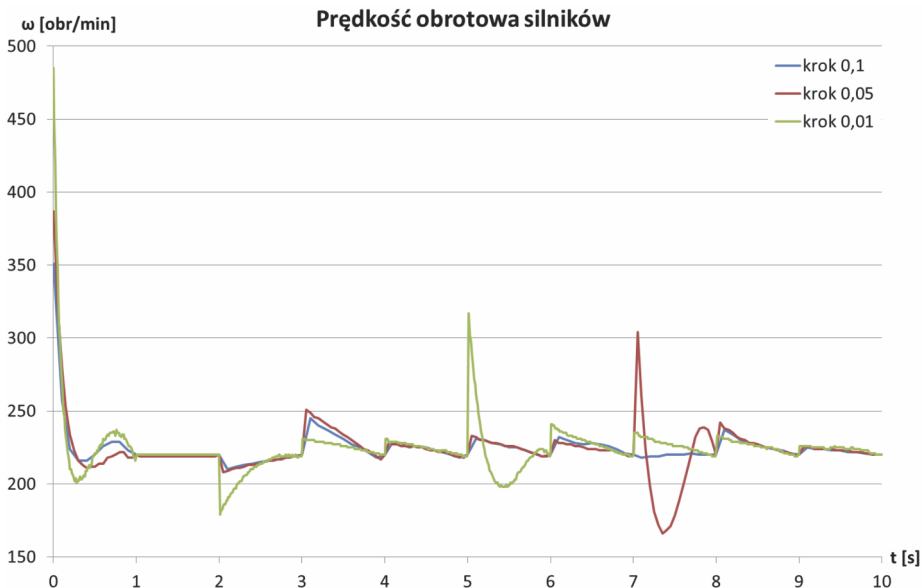
Rys. 2. Zmiana wysokości lotu dla  $Q_1 = Q_2 = 1$  oraz  $t_f - t_0 = 1$  s dla różnej wartości kroków całkowania [Brzozowski – opracowanie własne]

Nie znaleziono w literaturze informacji na temat metod doboru wartości współczynników wagowych funkcjonału jakości. Dlatego też, konieczne było przeprowadzenie licznych testów, pozwalających na znalezienie takich wartości współczynników  $Q_1$  i  $Q_2$  oraz czasu i kroku całkowania, dla których trajektoria zmian wysokości była zawsze zbliżona do zadanej wartości wysokości zarówno przy wznoszeniu jak i opadaniu. Na rys. 2 przedstawiono zależność otrzymanych wyników zmiany wysokości w zależności od kroku całkowania przy jednakowych wartościach współczynników  $Q_1 = Q_2 = 1$  oraz czasie całkowania równym 1 [s]. Widać, że dla

kroków 0,1 [s] oraz 0,05 [s] wyniki są podobne, ale zdecydowanie bardziej zbliżone do wartości zadanej otrzymane zostały dla kroku całkowania 0,01 [s].



Rys. 3. Zmiana prędkości pionowej dla  $Q_1 = Q_2 = 1$  oraz  $t_f - t_0 = 1$  s dla różnej wartości kroków całkowania [Brzozowski - opracowanie własne]

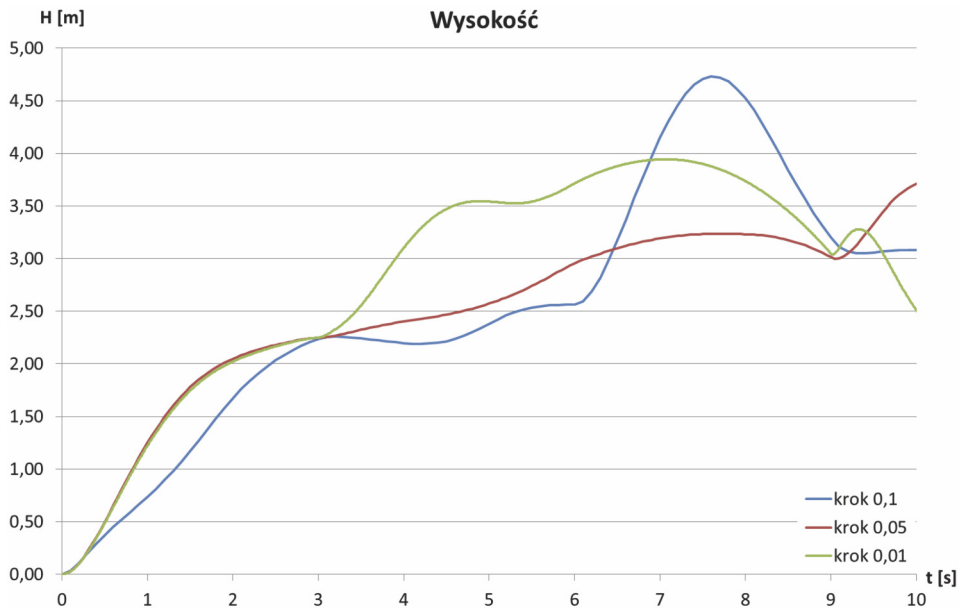


Rys. 4. Zmiana prędkości obrotowej silników dla  $Q_1 = Q_2 = 1$  oraz  $t_f - t_0 = 1$  s dla różnej wartości kroków całkowania [Brzozowski - opracowanie własne]

Ze względu na iteracyjny charakter zastosowanego algorytmu na rys. 3 oraz rys. 4 widać cykliczne zmiany prędkości pionowej oraz sygnałów sterujących. Na rys. 4 dla kroku całkowania 0,01 [s] można ponadto zaobserwować bardzo częste „oscylacje” prędkości

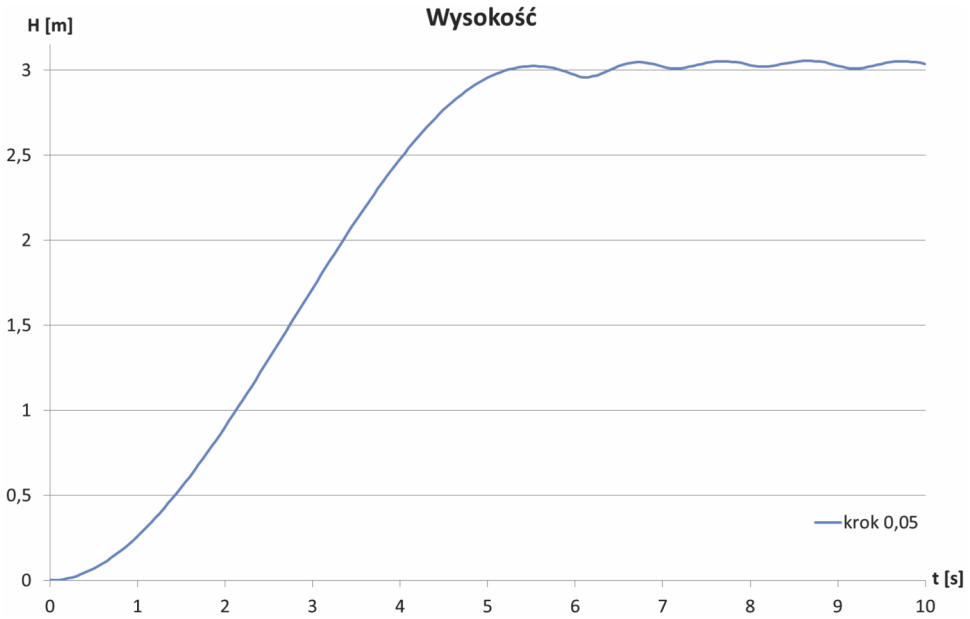


obrotowej silników, co może mieć negatywny wpływ na ich długotrwałą i niezawodną pracę. Podczas zwiększania czasu całkowania /przy niezmiennych wartościach współczynników  $Q_1$  i  $Q_2$ / zaobserwowano rozregulowanie i brak zbieżności wyników. Przykładowy przebieg zmian wysokości lotu dla czasu całkowania 3 [s] i różnej wartości kroków zamieszczono na rys. 5. Można zaobserwować, że algorytm sterowania optymalnego przy każdej iteracji znajduje, zamiast minimum globalnego, minimum lokalne.

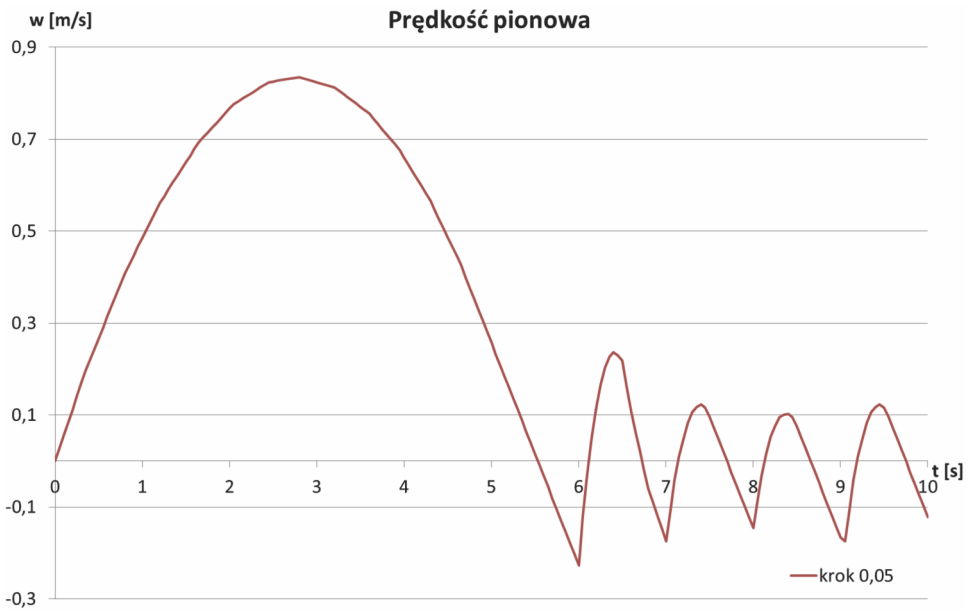


Rys. 5. Zmiana wysokości lotu dla  $Q_1 = Q_2 = 1$  oraz  $t_f - t_0 = 3$  s dla różnej wartości kroków całkowania [Brzozowski – opracowanie własne]

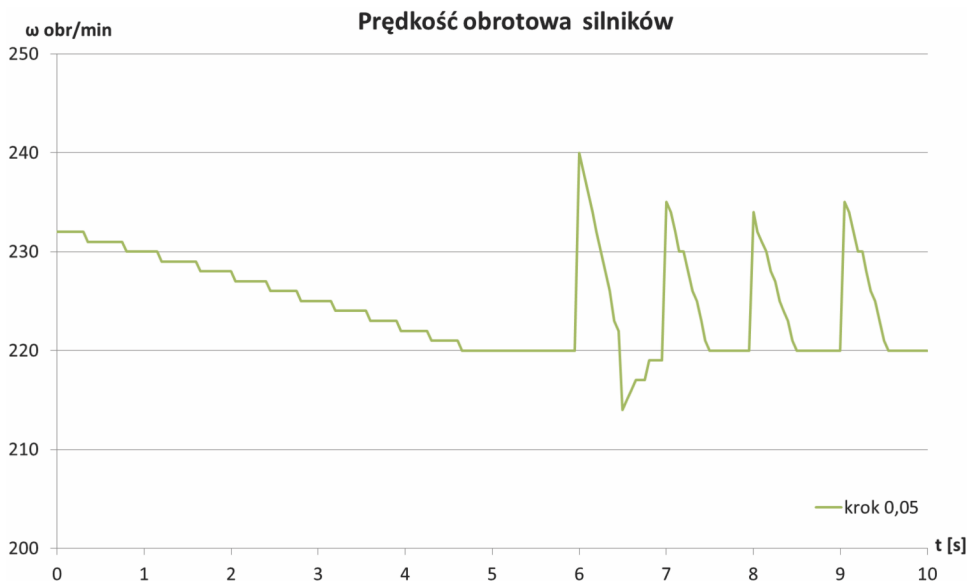
Zwiększanie wartości współczynników  $Q_1$  lub  $Q_2$  powodowało pogorszenie wyników, a nawet zdarzały się przypadki niezalezienia minimum funkcjonału jakości sterowania. Poprawę wyników uzyskano jedynie dla wartości współczynnika  $Q_2$  mniejszych od  $Q_1$ , gdy jednocześnie  $Q_1$  było mniejsze lub równe jedności. Oceniono, że najbardziej zadowalające wyniki osiągnięto dla czasu całkowania 5 [s] z krokiem 0,05 [s] przy współczynnikach wagowych o wartościach  $Q_1 = 1$  oraz  $Q_2 = 0,1$ . Na rys. 6 przedstawiono wykres zmian wysokości dla tych parametrów. Widać, że podczas pierwszej iteracji następuje zmiana wysokości natomiast w drugiej jej stabilizacja. Oscylacje wysokości w położeniu równowagi wynikają ze zmian prędkości pionowej (rys. 7), co spowodowane jest wyznaczoną optymalną trajektorią sterowania (rys. 8). Analiza otrzymanych wyników wskazuje, że oscylacje prędkości pionowej w drugiej iteracji (rys. 7) wynikają z części całkowej funkcjonału. Ponieważ w drugiej iteracji różnica pomiędzy stanem początkowym i wartością zadaną wysokości jest nieznaczna, większy wpływ na ostateczną wartość funkcjonału jakości ma prędkość pionowa. W przyjętej postaci funkcjonału jakości nie uwzględniono zależności określającej wektor sterowania – wprowadzone zostało jedynie ograniczenie maksymalnej prędkości obrotowej silników. Z tego powodu trajektoria sterowania optymalnego przyjmuje charakter piłokształtny (rys. 8). Gdy wartość aktualna wysokości lotu jest niższa niż zadana, wówczas następuje skokowy wzrost wartości prędkości sterowania, a następnie zmniejszanie jej aż do osiągnięcia zadanej wysokości.



Rys. 6. Zmiana wysokości lotu dla  $Q_1 = 1$ ,  $Q_2 = 0,1$  oraz  $t_f - t_0 = 5$  s  
[Brzozowski – opracowanie własne]



Rys. 7. Zmiana prędkości pionowej dla  $Q_1 = 1$ ,  $Q_2 = 0,1$  oraz  $t_f - t_0 = 5$  s  
[Brzozowski – opracowanie własne]



Rys. 8. Zmiana prędkości obrotowej silników dla  $Q_1 = 1$ ,  $Q_2 = 0,1$  oraz  $t_f - t_0 = 5$  s  
[Brzozowski – opracowanie własne]

### 3.1. Wnioski z przeprowadzonych badań

Otrzymane wyniki pokazują, że należy rozdzielić proces sterowania wysokością lotu na dwa etapy – na etap wznoszenia i etap stabilizacji wysokości. Dla każdego z tych etapów konieczne jest zastosowanie innych postaci funkcjonałów jakości starowania, tak aby wyeliminować oscylacyjny charakter zmian prędkości pionowej oraz sygnału sterującego podczas stabilizacji wysokości. W oparciu o analizę wyników ustalono, że, aby uzyskać płynny przebieg trajektorii wektorów stanu i sterowań, liczba przedziałów całkowania powinna wynosić około 100. Na tej podstawie powinien być dobierany czas i krok całkowania w algorytmie numerycznym. Ponadto stwierdzono, że zasadne będzie opracowanie algorytmu lub metodologii określania współczynników  $Q$  funkcjonału jakości, aby nie było konieczne prowadzenie licznych i długotrwałych badań oraz ocena ich wpływu na otrzymane wyniki.

## 4. PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiono opracowany i zaimplementowany numeryczny algorytm sterowania optymalnego metodą gradientów sprzężonych dla czterowirnikowego BSP. Omówiono przeprowadzone badania symulacyjne mające na celu weryfikację poprawności działania algorytmu dla przyjętych parametrów. Zaprezentowane wyniki potwierdzają bardzo istotny wpływ współczynników funkcjonału jakości sterowania na skuteczność algorytmu. Podczas definiowania problemu sterowania optymalnego należy bardzo dokładnie przeanalizować obiekt sterowania aby odpowiednio dobrać funkcjonał jakości sterowania optymalnego oraz wartości współczynników. Dobrany funkcjonał jakości zaprezentowany w artykule bardzo dobrze nadaje się do zastosowania na etapie zmiany wysokości lotu, jednakże podczas stabilizacji wysokości otrzymana trajektoria sterowania charakteryzuje się zbyt dużą zmiennością wartości prędkości obrotowej silników. Planuje się przeprowadzenie dalszych badań dla różnych funkcjonałów jakości dla etapu wznoszenia i stabilizacji wysokości, przyjmując również postacie uwzględniające wektor sterowań.

## LITERATURA

- [1] Athans, M., Falb, P. L., 1966, *Sterowanie optymalne, wstęp do teorii i jej zastosowania*, WNT, Warszawa.
- [2] Bouabdallah, S., 2007, "Design and Control of Quadrotors with Application to Autonomous Flying, Doctoral dissertation," EPFL, Switzerland.
- [3] Brzozowski, B., Falkowski, K., 2010, "Unmanned Aerial Vehicle of Quadrotor Class for Civil and Military Purposes," *Scientific Aspects of Unmanned Mobile Vehicle*, pp. 27-34.
- [4] Brzozowski, B., Falkowski, K., Olejnik, A., 2011, „Budowa układu stabilizacji wysokości lotu czterowirnikowego statku powietrznego,” *Projektowanie Mechatroniczne. Zagadnienia wybrane*, s. 9-16.
- [5] Brzozowski, B., Kowaleczko, G., 2013, „Problem sterowania optymalnego dla czterowirnikowego BSP,” *Prace Instytutu Lotnictwa*, **230**, s. 3-11.
- [6] Kowaleczko, G., Kuliński, M., Nowakowski, M., 2010, "Preliminary Study of the Quadrotor Flight Dynamics," *Scientific Aspects of Unmanned Mobile Vehicle*, pp. 123-144.
- [7] Lasdon, L. S., Mitter, S. K., Waren, A. D., 1967, "The Conjugate Gradient Method for Optimal Control Problems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, **2**(12), pp. 132-138.
- [8] Mehra, R. K., Bryson, E. Jr., 1967, "Conjugate Gradient Methods with an Application to V/STOL Flight-path Optimization," *Technical Report no. 543*, NASA, USA.
- [9] Sharma, A., Barve, A., 2012, "Controlling of Quad-rotor UAV using PID Controller and Fuzzy Logic Controller," *International Journal of Electrical, Electronics and Computer Engineering*, **1**(2), pp. 38-41.
- [10] Salih, A. L., Moghavvemi, M., Mohamed, H. A. F., Gaeid, K. S., 2010, "Flight PID Controller Design for a UAV Quadrotor," *Scientific Research and Essays*, **5**(23), pp. 3660-3667.
- [11] Willoughby, J. K., 1969, "Adaptations of the Conjugate Gradient Method to Optimal Control Problems with Terminal State Constraints," *Retrospective Theses and Dissertations*, Paper 4166, Iowa State University, USA.

## **CONJUGATE GRADIENT METHOD FOR FLIGHT ALTITUDE OPTIMAL CONTROL ALGORITHM OF A QUADROTOR UNMANNED AERIAL VEHICLE**

### *Abstract*

*This paper presents results of studies on the usage of conjugate gradient method for solving optimal control problem of flight altitude control of a quadrotor unmanned aerial vehicle (UAV). Due to the differences in the control strategy affecting the character of minimized quality functional, the problem was resolved on two issues: changing the flight altitude and altitude stabilization. Conducted researches allowed to determine the impact of changes in the form of a quality functional as well as of its timing and weighting factors on the designated optimal control and state trajectory of a quadrotor UAV using conjugate gradient method during changing and stabilizing flight altitude.*

*Keywords: optimal control, conjugate gradient method, quadrotor, UAV.*