MINUT 2022 (4), s. 61–69
ISSN 2719-3063

Ewa ŁOBOS

Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska w Gliwicach

Własności pochodnej kierunkowej w zadaniach

Streszczenie. Artykuł zawiera kilka ciekawych i niebanalnych (co jest oczywiście subiektywną opinią autorki) zadań związanych z pochodną kierunkową. Jest przeznaczony dla studentów, którzy chcieliby utrwalić swoją wiedzę w tym zakresie. Zadania nie są trudne, ale wymagają czegoś więcej niż sprawdzenie założeń i podstawienie do wzoru. W pracy podano szczegółowe rozwiązania tych zadań. Na końcu artykułu Czytelnik znajdzie także zadania do samodzielnej pracy.

Słowa kluczowe: pochodna kierunkowa, pochodne cząstkowe, gradient, funkcje wielu zmiennych.

1. Teoria w skrócie

Będziemy zajmować się tylko funkcjami rzeczywistymi dwóch zmiennych rzeczywistych, tzn. funkcjami typu $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^2$. Przypomnijmy podstawowe fakty dotyczące pochodnej kierunkowej (definicje i wyprowadzenia są w [1]). Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu $P_0(x_0, y_0)$, to jej pochodna kierunkowa w punkcie P_0

- istnieje w kierunku dowolnego wektora $\mathbf{u} = [a, b]$, gdzie $a^2 + b^2 > 0$;
- w kierunku wektora $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ jest równa
$$\frac{\partial f}{\partial \ell}\Big|_{P_0} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0} \cos\beta, \tag{1}$$
gdzie $\cos\alpha$ i $\cos\beta$ są kosinusami kierunkowymi wektora $\mathbf{u}$;
- w kierunku wektora $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ jest równa
$$\frac{\partial f}{\partial \ell}\Big|_{P_0} = \|\operatorname{grad} f|_{P_0}\| \cdot \cos\theta, \quad \text{gdzie} \quad \theta = \sphericalangle\left(\mathbf{u}, \operatorname{grad} f|_{P_0}\right); \tag{2}$$
- jest największa w kierunku $\mathbf{u} = \operatorname{grad} f|_{P_0}$ i wówczas $\frac{\partial f}{\partial \ell}\Big|_{P_0} = \|\operatorname{grad} f|_{P_0}\|$;
- jest najmniejsza w kierunku $\mathbf{u} = -\operatorname{grad} f|_{P_0}$ i wówczas $\frac{\partial f}{\partial \ell}\Big|_{P_0} = -\|\operatorname{grad} f|_{P_0}\|$.

Autor korespondencyjny: E. Łobos (Ewa.Lobos@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 10.06.2022 r.

2. Zadania z rozwiązaniami

Przykład 1. Pochodna kierunkowa funkcji $f(x,y) = xy$ w punkcie $P_0(1,2)$ w pewnym kierunku jest równa $-0,4$. Wyznaczyć ten kierunek.

Funkcja f jest funkcją klasy C^1 na całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, więc jest różniczkowalna w otoczeniu każdego punktu. Istnieją zatem pochodne kierunkowe we wszystkich punktach i we wszystkich kierunkach. Najpierw zauważmy, że jeśli pochodna w kierunku wektora $\mathbf{u}$ jest równa $-0,4$, to pochodna w kierunku każdego wektora postaci $t\mathbf{u}$, gdzie $t > 0$, jest taka sama. Ustalmy zatem, że szukany wektor $\mathbf{u} = [a,b]$ ma np. długość 1, tzn. $\sqrt{a^2+b^2} = 1$. Wówczas kosinusy kierunkowe wynoszą:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = a, \qquad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = b.$$

Potrzebne nam są pochodne cząstkowe w punkcie P_0:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0} = y\Big|_{P_0} = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0} = x\Big|_{P_0} = 1.$$

Ze wzoru (1) mamy $\frac{\partial f}{\partial \ell}\Big|_{P_0} = 2a+b$, więc z treści zadania

$$2a + b = -0,4 \Rightarrow b = -\frac{2}{5} - 2a. \tag{3}$$

Wiemy, że $a^2+b^2 = 1$, czyli

$$a^2 + \left(-\frac{2}{5} - 2a\right)^2 = 1$$

$$a^2 + \frac{4}{25} + \frac{8}{5}a + 4a^2 = 1 \quad \Big| \cdot 25$$

$$125a^2 + 40a - 21 = 0$$

$$\Delta = 40^2 + 4\cdot 21\cdot 125 = (5\cdot 8)^2 + 4\cdot 21\cdot 25\cdot 5 = 25\cdot 64 + 4\cdot 21\cdot 25\cdot 5 = 25\cdot 4(16+105) = 100\cdot 121$$

$$\sqrt{\Delta} = 10\cdot 11 = 110, \qquad a_1 = \frac{-40-110}{250} = -\frac{3}{5}, \qquad a_2 = \frac{-40+110}{250} = \frac{7}{25}.$$

Wzór na b mamy w (3). Zatem

$$b_1 = -\frac{2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{4}{5}, \qquad b_2 = -\frac{2}{5} - \frac{14}{25} = -\frac{24}{25}.$$

Otrzymaliśmy dwa wektory:

$$\mathbf{u}_1 = \left[-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right], \qquad \mathbf{u}_2 = \left[\frac{7}{25}, -\frac{24}{25}\right].$$

Można te wektory pomnożyć przez jakieś liczby dodatnie (zgodnie z uwagą na początku tego przykładu), żeby mieć ładniejszą odpowiedź.

Odp. Pochodna kierunkowa funkcji f w punkcie P_0 jest równa $-0,4$ w dwóch kierunkach, tzn. w kierunkach wektorów $[-3,4]$ i $[7,-24]$.

Dygresja. Wyobraźmy sobie powierzchnię $z = f(x,y)$ jako powierzchnię pasma górskiego (szczyty, doliny, przełęcze). Czy należało spodziewać się dwóch kierunków? Czy możliwe jest, abyśmy otrzymali tylko jeden wektor? A trzy wektory? A żadnego?

Przykład 2. Wyznaczyć wszystkie punkty, w których największa pochodna kierunkowa funkcji $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2)^3}$ jest równa 12.

Oznaczmy współrzędne szukanego punktu: $P(a,b)$. Oczywiście (a,b) musi należeć do dziedziny i w tym punkcie muszą istnieć ciągłe pochodne cząstkowe (inaczej nie rozwiążemy zadania, chyba że z definicji pochodnej kierunkowej). Na szczęście $D_f = \mathbb{R}^2$. Zapiszmy funkcję w wygodniejszej postaci:

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$$

i obliczmy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_P = \frac{3}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x|_P = 3a\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_P = \frac{3}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2y|_P = 3b\sqrt{a^2+b^2}.$$

Zauważmy, że $D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = D_f$ i $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, czyli nie mamy żadnego dodatkowego kłopotu. Obliczamy gradient i jego długość:

$$\operatorname{grad} f|_P = \left[3a\sqrt{a^2+b^2}, 3b\sqrt{a^2+b^2}\right] = 3\sqrt{a^2+b^2}\,[a,b]$$

$$\|\operatorname{grad} f|_P\| = 3\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2} = 3(a^2+b^2).$$

Największa pochodna kierunkowa jest równa długości gradientu, czyli z warunków zadania mamy

$$3(a^2+b^2) = 12$$

$$a^2+b^2 = 4.$$

W zadaniu nie ma nic więcej, czyli mamy nieskończenie wiele punktów $P(a,b)$, gdzie $a^2+b^2=4$.

Odp. Punkty o podanej własności tworzą okrąg o środku $(0,0)$ i promieniu 2.

Dygresja. Wyobraźmy sobie powierzchnię jako góry–doliny i uzasadnić. Czy ten wynik jest prawdopodobny?

Przykład 3. Funkcja $f(x,y) = \ln\frac{xy+1}{y}$ w punkcie P najszybciej rośnie w kierunku wektora $[9,-4]$. Znaleźć wszystkie punkty o tej własności.

Zaczynamy od dziedziny (może jest zbiorem pustym i nie trzeba będzie nic robić). Muszą być spełnione dwa warunki:

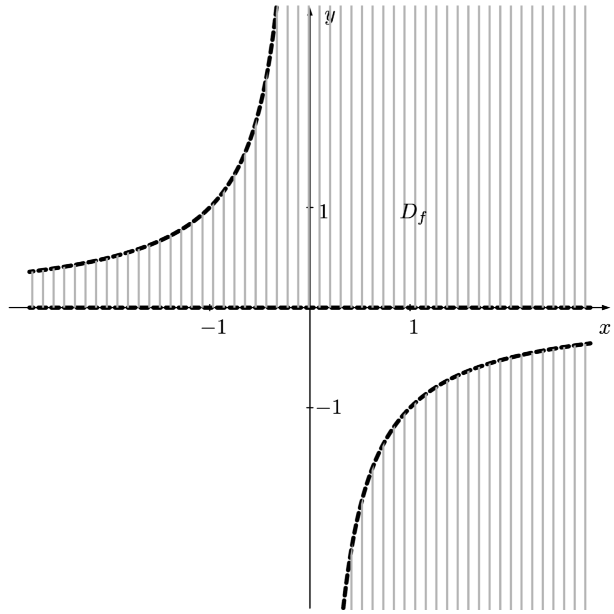
$$1^\circ\ y \neq 0 \qquad \wedge \qquad 2^\circ\ \frac{xy+1}{y} > 0.$$

Warunek 2° można zapisać jako

$$x + \frac{1}{y} > 0$$

$$x > -\frac{1}{y}.$$

Rysujemy linią przerywaną hiperbolę $x = -\frac{1}{y}$ i prostą $y=0$. Dzielą nam one płaszczyznę na cztery obszary. W każdym obszarze wybieramy jakiś punkt i sprawdzamy, czy należy on do dziedziny. Rysujemy dziedzinę.



Funkcja jest klasy C^1, czyli pochodną kierunkową możemy policzyć za pomocą gradientu. Z treści zadania wynika, że gradient funkcji w nieznanym punkcie $P(x,y)$ jest równoległy do wektora $[9,-4]$ i ma taki sam zwrot, czyli

$$\operatorname{grad} f = t[9,-4],\ t>0 \tag{4}$$

(to założenie $t>0$ jest bardzo ważne). Obliczamy pochodne cząstkowe i gradient:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y}{xy+1}\cdot\frac{y\cdot y-(xy+1)\cdot 0}{y^2} = \frac{y}{xy+1},\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{y}{xy+1}\cdot\frac{x\cdot y-(xy+1)\cdot 1}{y^2} = \frac{-1}{y(xy+1)},\\ \operatorname{grad} f &= \left[\frac{y}{xy+1},\frac{-1}{y(xy+1)}\right].\end{aligned}$$

Rozwiązujemy warunek (4):

$$\left[\frac{y}{xy+1},\frac{-1}{y(xy+1)}\right] = [9t,-4t], \qquad t>0$$

$$\frac{y}{xy+1} = 9t \qquad \wedge \qquad \frac{-1}{y(xy+1)} = -4t$$

$$xy+1 = \frac{y}{9t} \qquad \wedge \qquad xy+1 = \frac{1}{4ty}$$

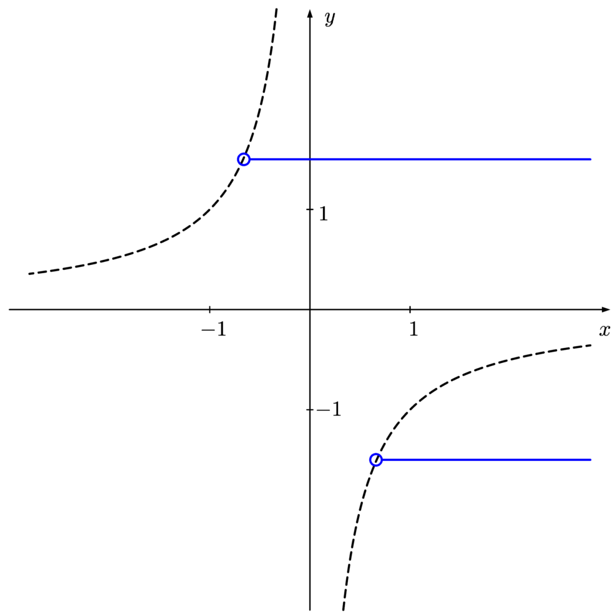
$$\frac{y}{9t} = \frac{1}{4ty}$$

$$4y^2t = 9t$$

(możemy podzielić przez t, bo z założenia jest ono różne od zera)

$$y^2 = \frac{9}{4}, \qquad \text{stąd} \qquad y=\frac{3}{2} \quad \vee \quad y=-\frac{3}{2}.$$

Powinniśmy teraz jeszcze sprawdzić, czy dla tak wyliczonych wartości y wyrażenie $\frac{y}{xy+1}$ jest dodatnie (bo ma ono być równe $9t$, gdzie $t > 0$). Nie musimy jednak nic liczyć, bo to (akurat w tym zadaniu) wynika z dziedziny. Zatem rysujemy proste $y = \frac{3}{2}$ i $y = -\frac{3}{2}$, a następnie bierzemy ich część wspólną z dziedziną funkcji.



Z rysunku odczytujemy, że szukane punkty należą do zbioru

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon \left[y = \frac{3}{2} \wedge x > -\frac{2}{3}\right] \vee \left[y = -\frac{3}{2} \wedge x > \frac{2}{3}\right]\right\}.$$

Odp. Punkty o podanej własności należą do zbioru A. Na rysunku zaznaczono je na niebiesko.

Przykład 4. Niech $f(x, y) = \ln(2y - x)$. Wyznaczyć punkty, w których pochodna kierunkowa funkcji f w pewnym kierunku wynosi $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Zaczynamy od dziedziny (może jest zbiorem pustym i nie trzeba będzie nic robić). Musi być spełniony warunek

$$2y - x > 0.$$

Dziedziną funkcji jest zbiór punktów tworzących półpłaszczyznę: $D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon y > \frac{1}{2}x\right\}$. Funkcja jest klasy C^1, czyli pochodną kierunkową w dowolnym punkcie dziedziny możemy policzyć za pomocą gradientu, np. ze wzoru (2). Obliczamy więc pochodne cząstkowe, gradient i jego długość:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{2y - x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{2y - x},$$

$$\operatorname{grad} f = \left[\frac{-1}{2y - x}, \frac{2}{2y - x}\right],$$

$$\|\operatorname{grad} f\| = \sqrt{\frac{1}{(2y - x)^2} + \frac{4}{(2y - x)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{|2y - x|} = \frac{\sqrt{5}}{2y - x}$$

(bo $2y - x > 0$, czyli $|2y - x| = 2y - x$).

Nie musimy wprowadzać specjalnych oznaczeń na współrzędne punktu, którego szukamy — będzie to po prostu punkt $P(x, y)$. Z treści zadania i wzoru (2) mamy

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = \|\text{grad}\, f\| \cdot \cos\theta \qquad \wedge \qquad \frac{\partial f}{\partial \ell} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\|\text{grad}\, f\| \cdot \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2y - x} \cdot \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{2y - x}{2}.$$

Liczba po prawej stronie jest dodatnia (wynika to z dziedziny). Aby była równa kosinusowi pewnej liczby θ, musi być mniejsza lub równa 1. Korzystamy tu z ciągłości funkcji kosinus. Mamy:

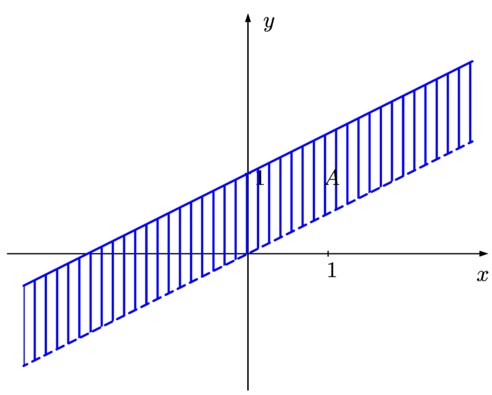
$$0 < \frac{2y - x}{2} \leq 1$$

$$0 < 2y - x \leq 2$$

$$x < 2y \leq x + 2$$

$$\frac{1}{2}x < y \leq \frac{1}{2}x + 1.$$

Sprawdzamy, czy punkty (x, y) spełniające powyższy warunek należą do dziedziny — oczywiście należą. Szkicujemy rysunek i piszemy odpowiedź.



Odp. Punkty o podanej własności tworzą zbiór $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{1}{2}x < y \leq \frac{1}{2}x + 1\}$. Na rysunku zaznaczono je kolorem niebieskim.

Przykład 5. Największa pochodna kierunkowa funkcji $f(x, y) = 6xy + 3x^2 - 2y^3$ w punkcie P jest równa $-\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_P$. Znaleźć wszystkie punkty o tej własności.

Podana funkcja jest wielomianem, więc $f \in C^1(\mathbb{R})$. Na pewno przydadzą się nam pochodne kierunkowe i gradient:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6y + 6x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6x - 6y^2, \qquad \text{grad}\, f = [6y + 6x, 6x - 6y^2] = 6[x + y, x - y^2].$$

W tym zadaniu również nie wprowadzamy specjalnych oznaczeń na współrzędne punktu P. Rozwiążemy je dwoma sposobami (dla urozmaicenia).

I sposób

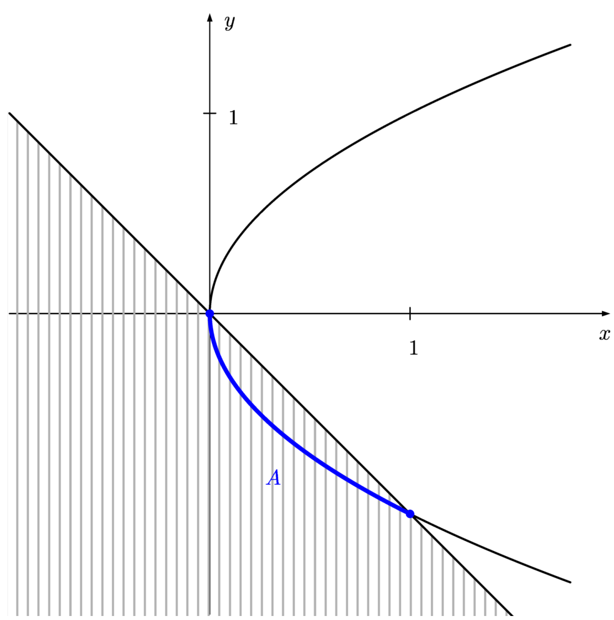
Pamiętamy, że pochodna cząstkowa względem x w punkcie P jest pochodną kierunkową w kierunku wektora $[1,0]$, więc pochodna kierunkowa w kierunku przeciwnym (tzn. $[-1,0]$) jest równa $-\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_P$. Z treści zadania wynika, że wektor $[-1,0]$ wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji f, tzn.

$$\operatorname{grad} f = t[-1,0], \quad \text{gdzie} \quad t \geq 0$$

(teraz dopuszczamy $t=0$, bo pochodna względem x może mieć wartość zero — wówczas wszystkie pochodne kierunkowe też będą równe zero). Mamy:

$$[6y+6x, 6x-6y^2] = [-t,0] \Leftrightarrow \big(6x+6y=-t \quad \wedge \quad 6x-6y^2=0\big)\,.$$

Pierwszy warunek mówi, że $6x+6y \leq 0$ (bo $6x+6y=-t$ i $t \geq 0$), czyli naszych punktów musimy szukać na półpłaszczyźnie $y \leq -x$. Drugi warunek mówi, że nasze punkty leżą na paraboli $x=y^2$. Rysujemy oba zbiory i zaznaczamy część wspólną.



Z rysunku (akurat wyszedł ładny) możemy wszystko odczytać i napisać odpowiedź.

Odp. Punkty o podanej własności tworzą zbiór $A = \{(a, -\sqrt{a})\colon a \in \langle 0,1\rangle\}$. Na rysunku zaznaczono je kolorem niebieskim.

Dygresja. Odpowiedź można też sformułować inaczej, np.:

- Podany warunek spełniają wszystkie punkty postaci $P(a, -\sqrt{a})$, gdzie $a \in \langle 0,1\rangle$.
- Podany warunek spełniają wszystkie punkty postaci $P(b^2, -b)$, gdzie $b \in \langle 0,1\rangle$.
- Podany warunek spełniają wszystkie punkty postaci $P(c^2, c)$, gdzie $c \in \langle -1,0\rangle$.

II sposób

Wiemy, że największa pochodna kierunkowa jest równa długości gradientu. Każdy wektor ma nieujemną długość, więc największa pochodna kierunkowa musi być nieujemna. Mamy więc do rozwiązania następującą koniunkcję dwóch warunków:

$$\begin{aligned} \|\operatorname{grad} f\| &= -\frac{\partial f}{\partial x} & \wedge \qquad -\frac{\partial f}{\partial x} &\geq 0 \\ 6\sqrt{(x+y)^2+(x-y^2)^2} &= -6(x+y) \ \Big|(\ldots)^2 & -6(x+y) &\geq 0 \\ (x+y)^2+\left(x-y^2\right)^2 &= (x+y)^2 & x+y &\leq 0 \\ x-y^2 &= 0 & y &\leq -x. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy te same warunki. W tej metodzie była jedna pułapka: podnoszenie równania stronami do kwadratu. Trzeba pamiętać o sprawdzeniu znaku obu stron i ewentualnych dodatkowych założeniach, jeśli decydujemy się na taki krok. Tu nie było problemu, bo już w pierwszym wierszu napisaliśmy, że prawa strona pierwszego równania musi być nieujemna.

3. Zadania i odpowiedzi

Warto teraz rozwiązać samodzielnie kilka zadań, np. podanych poniżej. Więcej zadań Czytelnik może znaleźć w [2] i [3].

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie punkty, w których pochodna kierunkowa funkcji $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{y}$ w pewnym kierunku jest równa $-\frac{1}{3}$.

Zadanie 2. Największa pochodna kierunkowa funkcji $f(x,y) = \dfrac{1}{3}x^3 + y^2 - 2xy$ w punkcie P jest równa $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_P$. Znaleźć wszystkie punkty o tej własności.

Zadanie 3. Najmniejsza pochodna kierunkowa funkcji $f(x,y) = \dfrac{1}{3}x^3 + y^2 - 2xy$ w punkcie P jest równa $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_P$. Znaleźć wszystkie punkty o tej własności.

Zadanie 4. Wyznaczyć wszystkie punkty, dla których wektor $\mathbf{u} = [12, 1]$ wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji $f(x,y) = \sqrt{4x^2 - y^2}$.

Zadanie 5. Wyznaczyć wszystkie punkty, dla których wektor $\mathbf{u} = [-4, 3]$ wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji $f(x,y) = \sqrt{4x^2 - y^2}$.

Odpowiedź 1. Punkty o podanej własności tworzą zbiór $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \leq 9 \quad \wedge \quad y \neq 0\}$. Jest to koło o środku $(0,0)$ i promieniu 3 bez punktów leżących na osi Ox.
Wskazówka. Jeśli pochodna tej funkcji w pewnym kierunku jest równa $-\frac{1}{3}$, to w kierunku przeciwnym jest równa $\frac{1}{3}$. Zadanie można rozwiązać podobnie jak przykład 4.

Odpowiedź 2. Wszystkie punkty o tej własności mają postać $P(a, a)$, gdzie $a \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 2, +\infty)$. Tworzą one dwie półproste.

Odpowiedź 3. Wszystkie punkty o tej własności mają postać $P(a, \frac{1}{2}a^2)$, gdzie $a \in \langle 0, 2\rangle$.

Odpowiedź 4. Wszystkie punkty o tej własności mają postać $P(3a, -a)$, gdzie $a > 0$.

Odpowiedź 5. Nie ma takich punktów.

Literatura

1. E. Łobos, *O pochodnej kierunkowej i gradiencie*, MINUT 2022 (4), s. 47–60.
2. E. Łobos, J. Macura, B. Sikora, *Calculus and linear algebra in exercises. Part 1*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2020, pp. 143–145.
3. J. Stewart, *Calculus Early Transcendentals*, Thomson/Brooks Cole 2008, pp. 920–921; `https://www.stewartcalculus.com/` (dostęp: 8.06.2022 r.).