ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XLIII (2007)

Czesław Bagiński (Białystok)

# Wariacje na temat Problemów Burnside'a*

**1. Wprowadzenie.** W 1902 roku W. Burnside sformułował dwa problemy znane dziś pod nazwą Ogólnego i Ograniczonego Problemu Burnside'a[1], które pytają odpowiednio, o lokalną skończoność grup torsyjnych i lokalną skończoność grup torsyjnych ze wspólnie ograniczonym rzędem wszystkich elementów. Potem, w latach 50-tych, sformułowano jeszcze jeden problem, nazwany Osłabionym Problemem Burnside'a, który pyta o to, czy wśród skończonych grup o ustalonym skończonym wykładniku i ustalonej liczbie generatorów istnieje grupa maksymalnego rzędu?

Teorie i konstrukcje stworzone na potrzeby rozwiązań Problemów Burnside'a dostarczyły skutecznych metod dla znalezienia odpowiedzi na wiele innych ważnych pytań z różnych działów teorii grup i dały silny impuls dla intensywnych dalszych badań w bardzo różnych kierunkach. Niestety, na ogół są to bardzo trudne teorie i ich przedstawienie w krótkiej przeglądowej notce nie jest możliwe. Zrozumienie rozwiązania jedynie Ogólnego Problemu Burnside'a nie wymaga obszernej wiedzy ([3], [9]). Pełne zrozumienie każdego z pozostałych, wymaga przestudiowania przynajmniej jednej z obszernych monografii ([2], [18] – Ograniczony Problem Burnside'a; [11], [22] – Osłabiony Problem Burnside'a).

W niniejszym artykule przedstawimy kilka zagadnień związanych z poszczególnymi Problemami Burnside'a, wchodzących w zakres różnych obszarów teorii grup. Nie będziemy przy tym silić się ani na przedstawienie wyczerpującego obrazu tych obszarów, ani też wnikać w głębsze szczegóły. Motywem przewodnim będą więc Problemy Burnside'a, chociaż czasem będą one bardzo luźno związane z przedstawianymi zagadnieniami.

**2. O grupie Grigorchuka i klasyfikacji skończonych $p$-grup.** W [3] przedstawiono dwa różne rozwiązania Ogólnego Problemu Burnside'a:

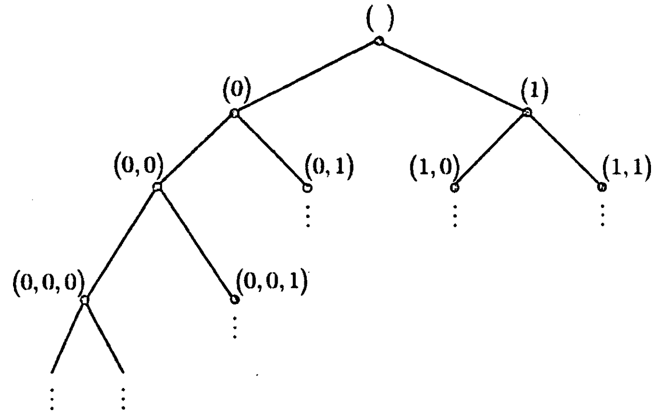
---

* Artykuł ten jest oparty na wykładzie wygłoszonym przez autora w dniu 6 września 2006 roku w Gdańsku na Forum Matematyków Polskich, Gdańsk 4–8 września 2006.

[1] Nazwy dla poszczególnych problemów są przyjęte za Kostrikinem [11].

uproszczoną wersję rozwiązania Goloda z 1964 roku i szczególny przypadek konstrukcji Gupty i Sidki z 1983 roku. Ze wszystkich znanych rozwiązań tego problemu, chyba największą 'medialną karierę' zrobiła konstrukcja R. I. Grigorchuka z 1980 roku. Przedstawimy ją pokrótce.

Niech $\mathcal{T}$ będzie ukorzenionym nieskończonym drzewem binarnym.




Wierzchołkami tego drzewa są wszystkie skończone ciągi binarne i ciąg pusty (korzeń drzewa). Bezpośrednimi potomkami korzenia ( ) są ciągi (0) i (1). Ogólnie jeśli $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ jest wierzchołkiem tego drzewa, to jego bezpośrednimi potomkami są $a0 = (a_1, a_2, \cdots, a_n, 0)$ i $a1 = (a_1, a_2, \cdots \cdots, a_n, 1)$. Dla ustalonego wierzchołka $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ tego drzewa zbiór wszystkich wierzchołków drzewa $\mathcal{T}$, bedących potomkami $v$, wraz z $v$ jako korzeniem, tworzą poddrzewo $\mathcal{T}_v$ izomorficzne z $\mathcal{T}$. Jeśli $\alpha$ jest automorfizmem drzewa $\mathcal{T}$ i $v$ jest jego dowolnym wierzchołkiem różnym od korzenia, to przez $\alpha_v$ oznaczymy automorfizm drzewa $\mathcal{T}$, który na poddrzewie $\mathcal{T}_v$ działa tak, jak $\alpha$ na $\mathcal{T}$, a na wierzchołkach nie należących do $\mathcal{T}_v$ działa tożsamościowo. Dokładniej, dla $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ oznaczmy przez $vu$ konkatenację ciągów $v$ i $u$ tzn. $vu = (v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_m)$. Jeśli teraz $w = vu$, to $\alpha_v(w) = v\alpha(u)$. Jeśli natomiast $w$ nie da się przedstawić w postaci $vu$, to $\alpha_v(w) = w$.

Niech teraz $\pi$ będzie automorfizmem drzewa $T$, które transponuje poddrzewa $\mathcal{T}_{(0)}$ i $\mathcal{T}_{(1)}$, tzn. dla $w = (w_1, w_2, \dots, w_k)$, $k > 0$, mamy

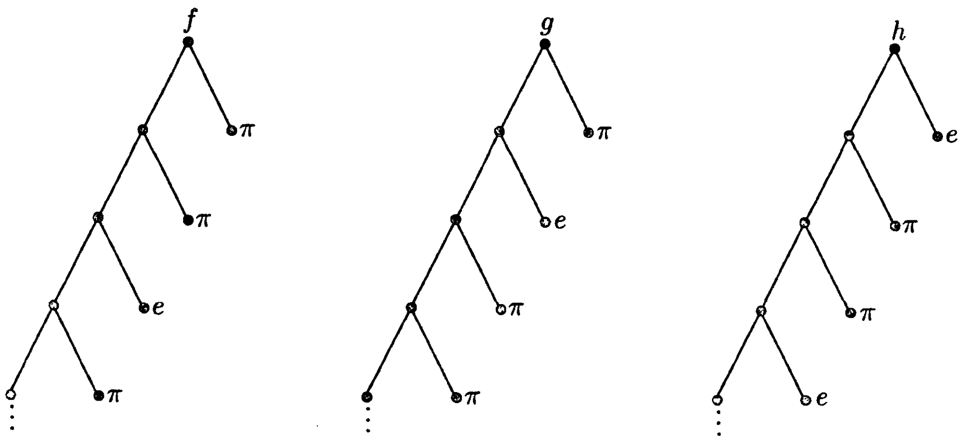
$$\pi(w) = (w_1 + 1 (\mathrm{mod}\ 2), w_2, \dots, w_k)$$

i rozważmy trzy inwolucje $f, g, h$ zdefiniowane rekurencyjnie wzorami:

$$f = g_{(0)} \circ \pi_{(1)}, \quad g = h_{(0)} \circ \pi_{(1)}, \quad h = f_{(0)} \circ \pi_{(1)}.$$

Przekształcenia te działają tak, jak pokazuje poniższy rysunek (patrz [13], str. 283):

Nietrudno zauważyć, że $f$, $g$ i $h$ są parami przemienne i $\{e, f, g, h\}$ jest czwórkową grupą Kleina ($e$ jest przekształceniem tożsamościowym).




TWIERDZENIE 1. *Niech $\mathcal{G}$ będzie podgrupą grupy automorfizmów drzewa $\mathcal{T}$ generowaną przez zbiór $\{\pi, f, g, h\}$. Wówczas $\mathcal{G}$ jest nieskończoną 2-grupą (zwaną grupą Grigorchuka).*

Dowód tego twierdzenia, negatywnie rozwiązującego Ogólny Problem Burnside'a nie jest skomplikowany. Można się o tym przekonać np. w [9], str. 236 lub w [13], str. 284, a też samodzielna próba jego udowodnienia może być bardzo pouczająca.

Konstrukcja Grigorchuka jest często przywoływana w związku z pytaniem Milnora o istnienie grup o pośrednim wzroście. Dla nas jest to pretekst do zwrócenia uwagi na zagadnienie klasyfikacji grup skończonych. Istnieje kilka różnych podejść do tego zagadnienia. Jednym z najbardziej naturalnych, ale i prymitywnych kryteriów klasyfikacyjnych, jest wielkość grupy, przy czym nie liczba elementów grupy jest tu wielkością, a liczba liczb pierwszych (niekoniecznie różnych), których iloczyn jest rzędem grupy.

Pierwsze próby takiej klasyfikacji sięgają początków teorii grup, kiedy to A. Cayley w 1854 roku podał listę grup rzędu $2^2$ i $2 \cdot 3$. Jak pokazuje poniższa tabela, postępy są dość mierne nawet w przypadku $p$-grup, a też ta tabela nie zawiera informacji o wielości podejmowanych prób i ilości błędów, jakie po drodze popełniano, zanim opis grup ustalonego rzędu okazał się poprawnym.

| *Rząd* | *Kto* | *Kiedy* | *Rząd* | *Kto* | *Kiedy* |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$, $2^2$ | Cayley | 1854 | $p^2$ | Netto | 1882 |
| $2^3$ | Kempe | 1886 | $p^3$ | Cole i Glover | 1893 |
| $p^4$ | Hölder, Young | 1893 | $2^5$ | Miller | 1896 |
| $3^5$ | James | 1968 | $2^6$ | Miller; Hall i Senior | 1930, 1964 |
| $3^6$ | Baldwin | 1987 | $2^7$ | James, Newman, O'Brien | 1990 |
| $p^7$ | Wilkinson[2] | 1988 | $2^8$ | O'Brien | 1991 |

[2] Wynik dotyczy grup o wykładniku $p$. Praca Wilkinsona zawiera błędy.

Wydaje się, że nie ma szans na klasyfikację skończonych grup, analogiczną do tej, jaką uzyskano dla skończonych grup prostych. Nie można tego zrobić nawet w przypadku, gdy ograniczymy się do rzędów postaci $p^n$, gdzie $p$ jest liczbą pierwszą, ponieważ nie istnieje skończona liczba niezmienników, charakteryzująca z dokładnością do izomorfizmu wszystkie skończone $p$-grupy. Lista niezmienników, pozwalających na odróżnienie grup, jak i lista grup ustalonego rzędu gwałtownie rośnie wraz ze wzrostem rzędu. W latach sześćdziesiątych G. Higman i C. C. Sims udowodnili, że liczba $G(p^n)$ grup rzędu $p^n$ jest równa

$$G(p^n) = p^{2\frac{n^3}{27}+O(n^{8/3})},$$

a więc jest funkcją zarówno argumentu $n$, jak i $p$. Mimo tego, dla ustalonego $n$ nie jest problemem podanie kompletnej listy grup rzędu $p^n$. Poważnym problemem jest natomiast jej redukcja, do listy nie zawierającej powtórzeń.

Jak zaznaczyliśmy, działalność prowadzącą do opisu grup ustalonego rzędu trudno uznać za próbę klasyfikacji skończonych grup lub nawet jej protezę. Ma ona jednak pewne walory, chociażby z tego powodu, że pozwala przetestować pewne hipotezy ogólnej natury, jak też tworzy 'biblioteki' grup i komputerowych narzędzi do badania ich własności i pokazuje ograniczenia dla możliwości komputerów. Dla potwierdzenia tego stwierdzenia odnotujmy jeszcze dwa wyniki, których uzyskanie było oparte na obliczeniach komputerowych. Zacznijmy od wyniku, który można dopisać do powyższej tabeli.

TWIERDZENIE 2. *Jeśli $p$ jest liczbą pierwszą, to*

($a$) ([16]) *dla $p \geqslant 5$, liczba nieizomorficznych grup rzędu $p^6$ jest równa liczbie*

$$3p^2+39p+344+24NWD(p-1,p)+11NWD(p-1,4)+2NWD(p-1,5).$$

($b$) ([17]) *dla $p > 5$, liczba $p$-grup rzędu $p^7$ jest równa liczbie*

$$\begin{aligned}3p^5 + 12p^4 + 44p^3 + 170p^2 + 707p + 2455 +\\ (4p^2 + 44p + 291)NWD(p-1,3) +\\ (p^2 + 19p + 135)NWD(p-1,4) +\\ (3p + 31)NWD(p-1,5) +\\ 4NWD(p-1,7) + 5NWD(p-1,8) + NWD(p-1,9).\end{aligned}$$

*Ponadto, istnieje* 9 310 *grup rzędu* $3^7$ *oraz* 34 297 *grup rzędu* $5^7$.

Pod koniec ubiegłego wieku kilku matematyków niemieckich i australijskich, zmotywowanych zbliżającym się końcem wieku, podjęło się sklasyfikowania grup rzędu $\leqslant$ 2 000. Projekt zakończył się sukcesem. Zgodnie z [4] istnieje

49 910 529 484

grup rzędu $\leqslant$ 2000.

Liczbę 2-grup rzędu nie większego niż $2^{10}$ podaje następująca tabela [4].

| $2^n$ | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1 024 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Liczba grup | 1 | 2 | 5 | 14 | 51 | 267 | 2 328 | 56 092 | 10 494 213 | 49 487 365 422 |

Liczba grup rzędu $\leqslant 2\,000$, które nie są 2-grupami, wynosi 423 164 062, co stanowi mniej niż $0,85\%$ wszystkich grup tego rzędu. Można więc zażartować, że

*Prawie wszystkie grupy skończone są 2-grupami.*

Zatem bez obaw o posądzenie, że zajmuję się w mojej pracy badawczej jakimiś marginaliami, mogę się teraz przyznać, że głównym obszarem moich zainteresowań naukowych są $p$-grupy.

Jedną z licznych, ważnych własności grupy Grigorchuka jest następujące:

TWIERDZENIE 3. *Grupa Grigorchuka $\mathcal{G}$ zawiera wszystkie skończone 2-grupy z dokładnością do izomorfizmu.*

Wobec tego, 'prawie' wszystkie grupy skończone są zawarte w grupie Grigorchuka.

Istnieją inne, ważniejsze podejścia do prób klasyfikacji skończonych $p$-grup. Są one oparte na lepszym doborze kluczowego niezmiennika, będącego podstawą klasyfikacji. Jednym z nich jest podejście zapoczątkowane w końcu lat siedemdziesiątych XX wieku oparte na pojęciu ko-klasy skończonych $p$-grup.

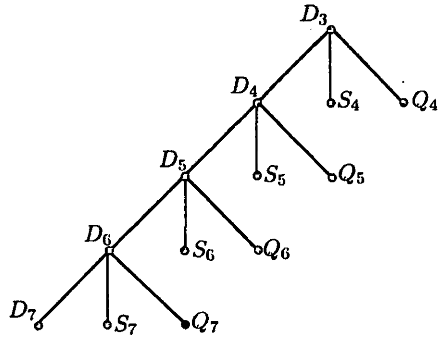
DEFINICJA 1. (a) Mówimy, że grupa $G$ jest nilpotentna, jeśli istnieje liczba naturalna $n$ taka, że dla dowolnych $g_1, g_2, \ldots, g_{n+1} \in G$ zachodzi równość

$$(g_1, g_2, \ldots, g_{n+1}) = 1,$$

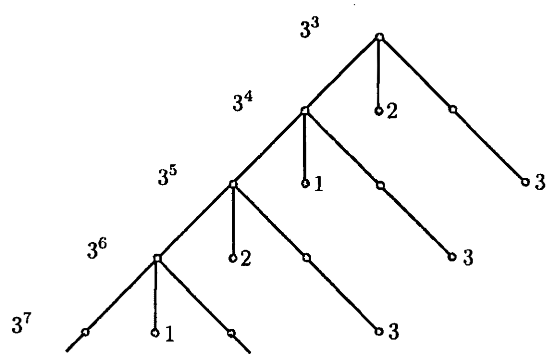
gdzie $(g_1, g_2) = g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2$ i dla $i > 1$, $(g_1, g_2, \ldots, g_{i+1}) = ((g_1, g_2, \ldots, g_i), g_{i+1})$. Najmniejsza liczba naturalna $n$ o tej własności nazywa się stopniem nilpotentności grupy $G$.

(b) Niech $G$ będzie grupą o rzędzie $p^n$ i stopniu nilpotentności $m$. *Ko-klasą* grupy $G$ nazywamy liczbę $n - m$.

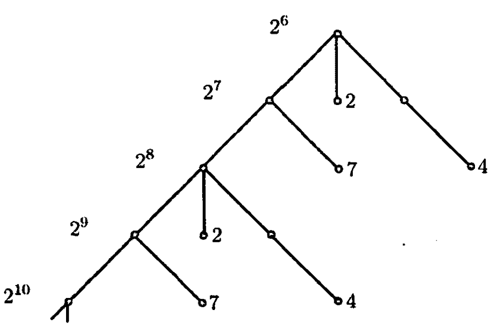
W szczególności, grupy o maksymalnym stopniu nilpotentności, to grupy o ko-klasie 1, ponieważ maksymalny stopień nilpotentności grupy rzędu $p^n$ jest równy $n-1$. Tak więc, np. 2-grupy o ko-klasie 1 rzędu $2^n$ są to grupy: dihedralna $D_n$, półdihedralna $S_n$ i uogólniona grupa kwaternionów $Q_n$. Można je rozmieścić jako wierzchołki nieskończonego drzewa tak, że potomkami dowolnie ustalonego wierzchołka są grupy, z których ów wierzchołek można uzyskać dzieląc przez centralną podgrupę rzędu 2 zawartą w komutancie grupy. Mamy zatem jedną nieskończoną gałąź, w której wierzchołkami są grupy $D_n$ i nieskończenie wiele 'odrostów' długości jeden kończących się wierzchołkami $S_n$ i $Q_n$, a te z kolei są 'bezpłodne' – nie mają potomków.

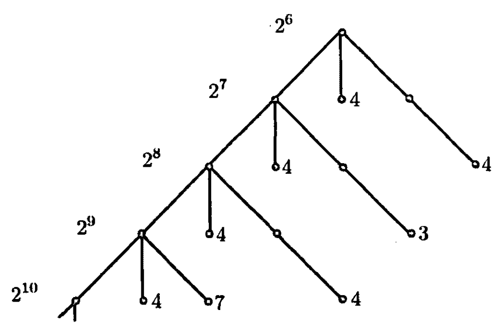



Takie drzewa stanowią podstawę klasyfikacji $p$-grup ustalonej ko-klasy dla dowolnej liczby pierwszej $p$. Dla 3-grup o ko-klasie 1 odpowiedni graf jest nieco bardziej skomplikowany. Tu również jest jedna gałąź nieskończona i z każdego wierzchołka tej gałęzi wyrastają odrosty długości 1 lub 3. Na rysunku podane są liczby mówiące ile jest tych 'bezpłodnych' odrostów od wierzchołka bezpośrednio poprzedzającego.




Wszystkie 2-grupy o ko-klasie 2, poza pewną liczbą sporadycznych przypadków niedużego rzędu, można podzielić na 5 rodzin, którym można przypisać analogiczne grafy. Dwa z nich pokazuje poniższy rysunek.



Z każdym z tych grafów w naturalny sposób można związać pro-2-grupę, przy tym dla różnych grafów te pro-2-grupy nie są izomorficzne i dodatkowo wyczerpują one wszystkie pro-2-grupy o rozważanej ko-klasie. Oprócz 2-grup wchodzących w skład rodzin związanych z poszczególnymi grafami dla ustalonej ko-klasy, występują 2-grupy, których do takich rodzin zaliczyć nie można. Takich grup jest 'niewiele', bo skończona liczba, nazwijmy je, jak wyżej, sporadycznymi. Przykładowy wynik, który przedstawia sytuację w rodzinach 2-grup o ko-klasach 2 i 3 podaje następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 4. (M. F. Newman, E. O'Brien (1999))

(*a*) *Istnieje* 5 *nieizomorficznych pro-2-grup o ko-klasie* 2. *Dla dowolnego* $n \geqslant 6$ *istnieje* 38 *nieizomorficznych* 2-*grup rzędu* $2^n$ *o ko-klasie* 2, *gdy* $n$ *jest parzyste i* 29 *takich grup dla* $n$ *nieparzystego. Istnieją* 23 *sporadyczne* 2-*grupy o ko-klasie* 2 (*wszystkie mają rząd* $\leqslant 2^6$).

(*b*) *Istnieją* 54 *nieizomorficzne pro-2-grupy o ko-klasie* 3. *Istnieją* 1782 *sporadyczne* 2-*grupy o ko-klasie* 3 (*wszystkie mają rząd* $\leqslant 2^{14}$).

Niestety, nie znaleziono jeszcze takich pełnych opisów $p$-grup dla $p > 2$ i ustalonej ko-klasie. Ba, nawet grupy o ko-klasie 1 dla $p = 5$ (nie mówiąc o większych $p$) nie są do końca opisane. Niemniej, wiele w tej dziedzinie zrobiono. Główny nurt badań na tym polu był prowadzony w związku z następującą listą pięciu hipotez sformułowanych przez C. R. Leedhama-Greena i M. F. Newmana w 1980 roku.

(A) *Istnieje funkcja* $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *taka, że dla dowolnej skończonej* $p$-*grupy o ko-klasie* $r$ *istnieje normalna podgrupa* $K$ *o stopniu nilpotentności* $\leqslant 2$ *i indeksie* $\leqslant f(p,r)$.

(B) *Istnieje funkcja* $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *taka, że każda skończona* $p$-*grupa o ko-klasie* $r$ *jest rozwiązalna stopnia* $\leqslant g(p,r)$.

(C) *Każda pro-*$p$*-grupa o skończonej ko-klasie jest rozwiązalna.*

(D) *Dla ustalonych* $p$ *i* $r$ *istnieje tylko skończona liczba pro-*$p$*-grup o ko-klasie* $r$.

(E) *Istnieje tylko skończona liczba pro-*$p$*-grup rozwiązalnych o ustalonej ko-klasie* $r$.

Nietrudno zauważyć, że prawdziwość dowolnego z tych zdań implikuje prawdziwość wcześniejszych. Została ona potwierdzona, tyle, że w kolejności, w jakiej je podano. Może właśnie dzięki temu powstała obszerna i piękna teoria, w której intensywnie korzysta się z technik innych działów matematyki. Chętnych do zapoznania się z nią odsyłam do niełatwej monografii [13]. Dodam, że w tej teorii ważną rolę spełnia również grupa Grigorchuka.

Inne, liczne podejścia do opisu skończonych $p$-grup są mniej usystematyzowane. Jest nadzieja, że tę sytuację nieco poprawi, od kilku lat zapowiadana, trzytomowa monografia J. G. Berkovicha, 'Finite $p$-groups'. Jej trzeci tom, napisany wspólnie z Z. Janko, kończy się listą ponad 1 300 nierozwiązanych problemów dotyczących tej dziedziny zajmujących prawie 100 końcowych stron.

**3. Wokół wolnych grup Burnside'a.** Rozwiązanie Ograniczonego Problemu Burnside'a sprowadza się do rozstrzygnięcia, czy grupa $B(m,n)$ jest skończona. Jest ona zdefiniowana jako grupa o $m$ generatorach, w której każda zależność między elementami wynika z tożsamości $x^n = 1$ i aksjomatów grupy. Mówiąc precyzyjnie, jest to grupa wolna w klasie równościowej (rozmaitości) grup wyznaczonej przez tożsamość $x^n = 1$. Rozwiązanie Adiana i Novikova mówi o nieskończoności grupy $B(m,n)$ dla $m \geqslant 2$ i dowolnego nieparzystego $n \geqslant 4\,381$. Udoskonalenia teorii podane przez Adiana, pozwoliły na wzmocnienie tezy przez obniżenie wykładnika $n$ do wartości nieparzystych, nie mniejszych niż 665 [2]. Rozwiązania dla dostatecznie dużych parzystych wykładników zostały podane przez S. V. Ivanova [8] dla wykładników postaci $2^9k \geqslant 2^4 \cdot 8$ i niezależnie przez I. G. Lysionka [14] dla wykładników postaci $2^4k \geqslant 8\,000$. Podobnie, jak prace Adiana i Novikova, oba rozwiązania są bardzo długie: praca Ivanova liczy ponad 300 stron, a Lysionka – ponad 200. Rozwiązania te różnią się także metodami. Ivanov oparł się na metodach Olshanskiego ([18]), a Lysionok na monografii [2].

Teoria Olshanskiego pozwoliła na konstrukcję nieskończonych grup torsyjnych (o bardzo dużych wykładnikach będących liczbami pierwszymi), w których każda podgrupa jest cykliczna. Są one oczywiście grupami ilorazowymi odpowiednich grup $B(2,n)$. Ta ostatnia ma nieskończenie wiele nieizomorficznych ilorazów. Okazuje się ponadto, że dla dowolnego $m$, grupę $B(m,n)$ (a więc i $B(\infty,n)$) można monomorficznie zanurzyć w $B(2,n)$. Zatem są w niej zawarte nieskończone rosnące ciągi podgrup, jak i nieskończone malejące.

Grupy $B(m,n)$ mają również inne cechy charakterystyczne dla grup wolnych w klasie wszystkich grup. Jedną z nich jest fakt, że centralizator jej dowolnego elementu różnego od neutralnego jest grupą cykliczną, czy to, że ma ona wzrost podobny do wzrostu grupy wolnej. Przypomnijmy, że jeśli $G$ jest grupą skończenie generowaną, to jej funkcja wzrostu $\gamma(s)$ przyjmuje wartości równe liczbie różnych elementów, jakie można otrzymać w postaci iloczynów $s$ elementów ze zbioru jego generatorów lub ich odwrotności. Dla grupy wolnej o dwóch generatorach łatwo stwierdzić, że $\gamma(s) = 4 \cdot 3^{s-1}$, gdy tymczasem dla grupy $B(2,n)$, gdzie $n$ jest liczbą nieparzystą większą od 665, zachodzi nierówność $\gamma(s) \geqslant 4 \cdot (2,9)^{s-1}$. Obie grupy mają więc wzrost wykładniczy.

Czytelnika zainteresowanego poznaniem innych własności grup $B(m,n)$ i to podanych z pierwszej ręki odsyłamy do przeglądowej pracy [1], skąd zaczerpnięto powyższe informacje. Autor sygnalizuje w niej również główną ideę teorii Adiana i Novikova. Poniżej zajmiemy się jedną z ważnych klas grup, dla opisu której, techniki stworzone na potrzeby rozwiązania Ograniczonego Problemu Burnside'a przyniosły istotne korzyści.

DEFINICJA 2. Grupę $G$ nazywamy *mierzalną* (ang. *amenable group*), jeżeli istnieje miara $\mu$ określona na $G$ taka, że:

(i) $\mu(G) = 1$;

(ii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, dla dowolnych rozłącznych podzbiorów $A$ i $B$ grupy $G$;

(iii) dla dowolnego $g \in G$ i dowolnego $A \subseteq G$, $\mu(A) = \mu(gA)$.

Pojęcie grupy mierzalnej pojawiło się w związku ze słynną konstrukcją z 1924 roku, zwaną paradoksem Banacha-Tarskiego. Banach i Tarski pokazali, że dla dowolnych podzbiorów $A$ i $B$ o niepustych wnętrzach, zawartych w przestrzeni $\mathbb{R}^3$, istnieją ich rozkłady na rozłączne podzbiory: $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$ takie, że dla każdego $i = 1, 2, \ldots n$, istnieje $\sigma \in SO(3)$ taki, że $A_i^\sigma = B_i$. Jak zauważył J. von Neumann, istnienie paradoksu Banacha-Tarskiego jest konsekwencją własności grupy $SO(3)$, a nie geometrii przestrzeni $\mathbb{R}^3$. On też wprowadził pojęcie grupy mierzalnej i udowodnił podstawowe fakty z nim związane.

STWIERDZENIE 5. (J. von Neumann, 1929).

(*a*) *Każda grupa skończona jest mierzalna.*

(*b*) *Każda grupa abelowa jest mierzalna.*

(*c*) *Rozszerzenie grupy mierzalnej za pomocą grupy mierzalnej jest grupą mierzalną; w szczególności, grupy rozwiązalne są mierzalne.*

Pozostawiamy czytelnikowi próby udowodnienia powyższych faktów. Stają się one dużo łatwiejsze, jeśli skorzystać z następującej charakteryzacji grup mierzalnych, podanej przez Følnera w 1955 roku: Grupa $G$ jest mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych podzbiorów $M, S \subset G$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taki skończony podzbiór $N \subset G$, że $M \subset N$ oraz zachodzi nierówność

$$\frac{|N \cap sN|}{|N|} > 1 - \varepsilon,$$

dla każdego $s \in S$.

Niemierzalność grupy $SO(3)$ daje właśnie możliwość konstrukcji Banacha-Tarskiego. Z pracy von Neumanna wynika, że niemierzalną jest także grupa $SL(2, \mathbb{Z})$, bo zawiera nieabelową grupę wolną, jako podgrupę. Z tego powodu, analogiczne konstrukcje do konstrukcji Banacha-Tarskiego są możliwe także w $\mathbb{R}^2$. Jemu (tzn. von Neumannowi) przypisywane jest również autorstwo następującego pytania:

*Czy każda grupa niemierzalna zawiera nieabelową grupę wolną?*

W 1972 roku J. Tits udowodnił ważne twierdzenie, znane dziś pod nazwą alternatywy Titsa, dające pozytywną odpowiedź na pytanie von Neumanna dla grup liniowych.

TWIERDZENIE 6 (J. Tits, 1972). *Niech $G$ będzie grupą liniową nad ciałem charakterystyki zero. Wówczas $G$ zawiera nieabelową podgrupę wolną lub $G$ zawiera rozwiązalną podgrupę skończonego indeksu.*

Negatywne rozwiązanie problemu w ogólnym przypadku, jako pierwszy podał A. J. Olshanskii w 1980 roku, wykorzystując do tego swoje techniki wypracowane na potrzeby Ograniczonego Problemu Burnside'a. Dwa lata później S. I. Adian udowodnił, że dla $m > 1$ i nieparzystych $n \geqslant 665$, grupy $B(m, n)$ nie są mierzalne. One, rzecz jasna, nie zawierają nieabelowych podgrup wolnych.

Kontrprzykłady podane zarówno przez Olshanskiego, jak i Adiana są grupami nieskończenie prezentowalnymi. Pytanie o to, czy istnieją takie kontrprzykłady skończenie prezentowalne, podał m.in. R. Grigorchuk w 1982 roku. Przez wiele lat głównym kandydatem na kontrprzykład była tzw. grupa $F$ Thompsona. Można ją zdefiniować w następujący sposób:

$$F = \langle x_0, x_1, x_2, \ldots \mid x_i^{-1} x_j x_i = x_{j+1} \text{ dla } i < j \rangle.$$

W tej prezentacji mamy nieskończenie wiele generatorów i tyleż relacji określających. Można jednak bez trudu zastąpić ją prezentacją:

$$F = \langle x_0, x_1 \mid (x_0 x_1^{-1}, x_0^{-1} x_1 x_0) = 1,\ (x_0 x_1^{-1}, x_0^{-2} x_1 x_0^2) = 1 \rangle.$$

Jest to zatem skończenie generowana grupa skończenie prezentowalna. Grupa $F$ ma wiele interesujących własności i zastosowań (patrz [5]). Wiadomo też, że nie zawiera ona nieabelowej wolnej podgrupy, a w 1979 wysunięto hipotezę, że jest to grupa niemierzalna. Niestety, podejmowane próby potwierdzenia tej hipotezy, póki co, nie przyniosły rozstrzygnięcia.

W 2002 roku pojawiła się praca A. Yu. Olshanskiego i M. V. Sapira [19], w której podano konstrukcję skończenie prezentowalnej grupy niemierzalnej, niezawierającej nieabelowej wolnej podgrupy. Na ponad 100 stronach autorzy konstruują grupę $G$, która jest rozszerzeniem grupy o wykładniku $n$, (dla bardzo dużych $n$), za pomocą grupy cyklicznej. Ten przykład pozwala nawiązać do jeszcze jednego problemu. Otóż, z powyższej informacji wynika, że w skonstruowanej grupie $G$, dla dowolnych $x, y \in G$, zachodzi równość $(x, y)^n = 1$. W 1961 roku I. D. MacDonald postawił następujące pytanie:

*Niech $G$ będzie grupą, w której dla dowolnych $x, y \in G$ spełniony jest warunek $(x, y)^n = 1$. Czy komutant $G'$ grupy $G$ jest grupą torsyjną?*

W pracy, w której to pytanie było postawione, MacDonald udowodnił, że jeżeli w grupie $G$ spełniona jest tożsamość $(x, y)^2 = 1$, to $G'$ ma wykładnik 4. Dowód twierdzenia nie jest szczególnie trudny i sugerujemy czytelnikowi wypróbowania swoich sił. W 1965 roku N. Gupta pokazał, że jeżeli $G$ spełnia tożsamość $(x,y)^3 = 1$, to $G'$ jest 3-grupą. Do dzisiaj jednak nie wiadomo, czy przy tym założeniu $G'$ ma skończony wykładnik. Dowód N. Gupty oparty był na niełatwej do odkrycia, następującej obserwacji:

*Jeśli $c \in G$ jest taki, że $c^3 = 1$, to dla dowolnego $x \in G$,*

$$\begin{aligned}(cx)^3 &= (x^2c^2x^{-1})^{-1}(xc^2xcx^{-2})^{-1}(x^2c^2x^{-1})(xc^2xcx^{-2})x^3\\ &= (x^2c^2x^{-1}, xc^2xcx^{-2})x^3\end{aligned}$$

W 1999 roku, korzystając z technik Olshanskiego, Deryabina i Kozhevnikov podali konstrukcję kontrprzykładu odpowiadającego na pytanie MacDonalda, dla dostatecznie dużych nieparzystych $n$ ($n > 10^{75}$), a w 2000 roku S. I. Adian podał konstrukcje kontrprzykładów dla dowolnej liczby nieparzystej $n$ większej od 1001.

Odnotujmy na koniec pozytywną odpowiedź na pytanie MacDonalda dla grup, które można 'przybliżać' grupami skończonymi.

TWIERDZENIE 7 (P. Shumyatsky, 1999). *Niech $n = p^s$ będzie potęgą liczby pierwszej $p$. Jeżeli $G$ jest residualnie skończona i spełnia tożsamość $(x,y)^n = 1$, to $G'$ jest lokalnie skończona.*

Ten wynik sugeruje naturalne pytanie o to, czy teza powyższego twierdzenia jest prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej $n$ i czy lokalną skończoność komutanta można wzmocnić skończonością jego wykładnika?

**4. O grupach z warunkiem Engela.** W rozważaniach prowadzących do rozwiązania Ograniczonego Problemu Burnside'a, jedną z kluczowych ról odegrały własności dołączonej algebry Liego $L(G)$ skończonej $p$-grupy $G$. Przypomnijmy pokrótce jej konstrukcję. Niech $G$ będzie skończoną $p$-grupą. Definiujemy w niej ciąg podgrup normalnych: $\gamma_1 G = G$, $\gamma_2 G = (G,G) = \langle (x,y) |\ x,y \in G\rangle$ i ogólnie $\gamma_{n+1}G = (\gamma_n G, G) = \langle (x,y) |\ x \in \gamma_n G,\ y \in G\rangle$, zwany jej dolnym ciągiem centralnym. Ponieważ każda grupa ilorazowa $L_i = \gamma_i G/\gamma_{i+1}G$ jest abelowa wprowadzamy w nich, dla wygody, addytywny zapis działania i w sumie prostej

$$L(G) = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots$$

definiujemy mnożenie Liego: dla $a = x\gamma_{i+1}G$, $b = y\gamma_{j+1}G$, gdzie $x \in \gamma_i G$, $y \in \gamma_j G$ przyjmujemy

$$[a,b] = (x,y)\gamma_{i+j+1}G,$$

następnie korzystając z liniowości rozszerzamy je na całą grupę $L(G)$. Oba te działania wprowadzają w $L(G)$ strukturę algebry Liego nad pierścieniem $\mathbb{Z}_{p^k}$, gdzie $p^k$ jest maksymalnym rzędem elementów z $G$. Istnieje wiele podobieństw między grupą $G$ i algebrą $L(G)$, które pozwalają niektóre pytania dotyczące grupy przetłumaczyć na język algebry Liego, a następnie, dzięki pewnemu uproszczeniu rachunków wynikającemu z 'linearyzacji' komutatora grupowego, udaje się na te pytania odpowiedzieć, uzyskując jednocześnie odpowiedź na pytanie dotyczące grupy. Taki schemat towarzyszył rozwiązaniu Ograniczonego Problemu Burnside'a i wielu innych problemów, jak choćby tych dotyczących automorfizmów skończonych $p$-grup (patrz [10]). Nie ma więc nic dziwnego w tym, że pewne pytania dotyczące algebr Liego w naturalny sposób dają się przeformułować na pytania dotyczące grup. Dotyczy to zwłaszcza tych pytań, których przeformułowanie dla grup sprowadza się praktycznie do zastąpienia operacji mnożenia Liego, operacją komutatora grupowego.

DEFINICJA 3. Mówimy, że algebra Liego $L$ (grupa $G$) spełnia warunek $E_n$ (zwany też $n$-tym warunkiem Engela), jeżeli dla dowolnych $x, y \in L$ $(g, h \in G)$ zachodzi równość

$$[x, \underbrace{y, y, \ldots, y}_{n}] \quad (\text{odpowiednio } (g, \underbrace{h, h, \ldots, h}_{n}))$$

Oczywiście, każda algebra (grupa) nilpotentna stopnia $n$ spełnia warunek $E_n$. Jak pokazał J. P. Razmyslov, odwrotna implikacja na ogół nie zachodzi. Mimo tego w wielu szczególnych przypadkach warto rozważać, czy taka odwrotna implikacja ma miejsce. Rozwiązanie Ograniczonego Problemu Burnside'a dla grup o wykładniku $p$ ($p$ liczba pierwsza) wynika z następującego twierdzenia Kostrikina.

TWIERDZENIE 8 (A. I. Kostrikin, 1959). *Jeśli algebra Liego o $d$ generatorach, nad ciałem charakterystyki $p > 0$, spełnia warunek $E_n$ dla $n < p$, to jest nilpotentna stopnia ograniczonego funkcją zależną od $d$ i $n$.*

Innymi słowy, algebra Liego nad ciałem charakterystyki $p$, z warunkiem Engela $E_n$, gdzie $n < p$, jest lokalnie nilpotentna. Dla algebr Liego nad ciałem charakterystyki 0 teza jest jeszcze silniejsza.

TWIERDZENIE 9 (E. I. Zelmanov, 1988). *Jeśli algebra Liego, nad ciałem charakterystyki* 0, *spełnia warunek $E_n$, to jest nilpotentna stopnia ograniczonego funkcją zależną od $n$.*

Pytanie o lokalną nilpotentność grup z warunkiem $E_n$ okazuje się dużo trudniejsze. Mimo prawie 80 lat badań, odpowiedzi udało się uzyskać tylko w bardzo szczególnych przypadkach.

TWIERDZENIE 10 (E. Zorn, 1930). *Dla dowolnej liczby naturalnej $n$, każda skończona grupa z warunkiem $E_n$ jest nilpotentna.*

Opuszczenie założenia o skończoności znacznie komplikuje sytuację, chociaż z przypadkiem $n = 2$ można się zmierzyć samodzielnie.

STWIERDZENIE 11 (F. W. Levi, 1942). *Jeżeli grupa $G$ spełnia warunek $E_2$, to $G$ jest nilpotentną stopnia nie większego niż* 3. *Jeżeli $G$ nie ma elementów rzędu* 3, *to $G$ jest nilpotentna stopnia nie większego niż* 2.

Do dowodu wystarczy najpierw zauważyć, że w grupie z warunkiem $E_2$, każdy element jest przemienny ze swoim dowolnym sprzężeniem, a następnie dokonując nieskomplikowanych rachunków i obserwacji dowieść, że w takiej grupie, przestawiając sąsiednie symbole w komutatorach $(x_1, x_2, x_3)$ i $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ dostajemy elementy odwrotne do tych komutatorów. Wykorzystując te fakty oraz tożsamość Witta

$$(x, y^{-1}, z)^y/(y, z^{-1}, x)^z(z, x^{-1}, y)^x = 1$$

można udowodnić najpierw, że $(x_1, x_2, x_3)^3 = 1$, a niezależnie od tego, że $(x_1, x_2, x_3, x_4)^2 = 1$. Te dwa fakty razem oznaczają, że $(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$.

Grupy z warunkiem $E_3$ nie muszą być nilpotentne. Dowodzi tego choćby przykład 18.3.1. z [9]. Niemniej, prawdziwe jest następujące

TWIERDZENIE 12 (H. Heineken, 1961). *Każda grupa $G$ z warunkiem $E_3$ jest lokalnie nilpotentna. Ponadto, jeśli $G$ nie zawiera elementów rzędu* 2 *i* 5, *to jest nilpotentna stopnia* $\leqslant 4$.

Dowód tego faktu jest dość długi i bardziej skomplikowany [7]. Na odpowiedź dla grup z warunkiem $E_4$ trzeba było czekać już kilkadziesiąt lat. Po pierwsze, jak udowodnił G. Traustason, w grupach z warunkiem $E_4$ zbiór elementów skończonego rzędu tworzy podgrupę, która modulo centrum grupy jest iloczynem prostym swoich $p$-podgrup [21]. To pozwala na redukcję pytania do dwóch klas grup: beztorsyjnych i torsyjnych o wykładniku będącym liczbą pierwszą. Dla małych wykładników 2 lub 3 odpowiedź jest łatwa, ponieważ są to grupy nilpotentne. W 1996 roku M. Vaughan-Lee udowodnił, że grupy o wykładniku 5 z warunkiem Engela są lokalnie skończone, a więc również lokalnie nilpotentne [23]. W swoim dowodzie Vaughan-Lee istotną część rozważań powierzył programowi komputerowemu – implementacji algorytmu Knutha-Bendixa na potrzeby opisu własności rozważanych grup.

Zanim uzyskano pełne rozwiązanie problemu dla grup z warunkiem $E_4$, dość dobrze opisano ich strukturę. Największy wkład wniósł tu G. Traustason, który udowodnił następujące twierdzenie.

STWIERDZENIE 13. *Niech $G$ będzie grupą spełniającą warunek $E_4$.*

(*a*) *$G$ spełnia tożsamość półgrupową*,

(*b*) *Jeśli $G$ nie zawiera elementów rzędu* 2, 3 *i* 5, *to jest nilpotentna stopnia* $\leqslant 7$,

(*c*) *Jeśli $G$ jest generowana przez* 2 *elementy*, *to jest nilpotentna*,

(*d*) *$G$ jest lokalnie nilpotentna wtedy i tylko wtedy*, *gdy jej każda podgrupa generowana przez* 3 *elementy jest nilpotentna*.

W 2005 roku w dość obszernej pracy [6] G. Havas i M. R. Vaughan-Lee podali wreszcie dowód twierdzenia

TWIERDZENIE 14. *Każda grupa z warunkiem $E_4$ jest lokalnie nilpotentna.*

Podobnie, jak w przypadku grup o wykładniku 5 ciężar dowodu spadł na algorytm Knutha–Bendixa i program komputerowy będący jego implementacją, który posłużył dowodowi tego, że pewna podgrupa o trzech generatorach jest nilpotentna. Dowód tego faktu, bez pomocy komputera przedstawił G. Traustason w tym samym numerze czasopisma co praca Havasa i Vaughan-Lee. Tak więc, dowód Twierdzenia 14 można przeprowadzić bez pomocy komputera.

Kilka ważnych wyników uzyskano dla grup, w których każda para elementów spełnia warunek $(x, y, \ldots, y) = 1$, gdzie liczba wystąpień elementu $y$ jest równa $n = n(x, y)$. Nazywamy je grupami Engela.

TWIERDZENIE 15 (K. W. Gruenberg, 1953). *Każda rozwiązalna grupa Engela jest nilpotentna.*

Z tego twierdzenia łatwo wyprowadzić Twierdzenie 10, tak z resztą, jak i z poniższego twierdzenia Baera.

TWIERDZENIE 16 (R. Baer, 1957). *Każda grupa Engela, w której każdy wstępujący ciąg podgrup stabilizuje się, jest nilpotentna.*

Jeśli skorzystamy z poniższego lematu, to łatwo z twierdzenia Baera wyprowadzić twierdzenie Gruenberga. Dowód samego lematu jest co prawda niedługi, ale może być wcale niełatwym zadaniem do samodzielnego rozwiązania.

LEMAT 17 (Burns, Medvedev, 1998). *Jeżeli $G$ jest skończenie generowaną grupą z warunkiem Engela, to jej komutant $G'$ jest skończenie generowany.*

Istnieją inne wyniki dotyczące grup Engela w szerszych klasach grup, te jednak wymagałyby poszerzenia aparatu pojęciowego. Odnotujmy tylko dość zaskakujący wynik J. S. Wilsona i E. I. Zelmanova z 1992 roku

TWIERDZENIE 18. *Każda proskończona grupa Engela jest lokalnie nilpotentna.*

Grupy Engela nie muszą być lokalnie nilpotentne. Dowodzi tego konstrukcja Goloda negatywnie rozwiązująca Ogólny Problem Burnside'a. Jeśli weźmiemy taką grupę o co najmniej trzech generatorach, to każde dwa elementy generują w niej $p$-grupę skończoną, a więc nilpotentną. Sama grupa Goloda lokalnie nilpotentną oczywiście nie jest.

Odnotujmy jeszcze jeden związek grup Engela z Ograniczonym Problemem Burnside'a. Otóż, do dziś nie wiadomo, czy skończenie generowane grupy o wykładniku $p$, gdzie $p$ jest liczbą pierwszą $5 \leqslant p < 665$, są skończone. Znany problem Kostrikina stawia pytanie

*Czy w grupie wolnej $F_2 = \langle x, y \rangle$ element $(x, y, y, y, y, y, y)$ daje się wyrazić w postaci iloczynu potęg o wykładniku 5 elementów tej grupy?*

Innymi słowy, czy grupa o wykładniku 5 spełnia warunek $E_6$. Negatywna odpowiedź na to pytanie dałaby negatywną odpowiedź na Ograniczony Problem Burnside'a dla przypadku grup o tym wykładniku (patrz [12]).

W związku z problemem Kostrikina przypomnijmy powszechnie znany fakt, że element $(x, y)$ jest iloczynem kwadratów elementów z $F_2$. Istotnie,

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad (x,y) &= x^{-1}y^{-1}xy = (x^{-1}y^{-1})(x^{-1}y^{-1}yx)xy \\
&= (x^{-1}y^{-1})^2(yx^2y) = (x^{-1}y^{-1})^2y^2(y^{-1}x^2y) \\
&= (x^{-1}y^{-1})^2y^2(y^{-1}xy)^2.
\end{aligned}
$$

Zwykle ta obserwacja jest podawana w postaci stwierdzenia mówiącego, że każda grupa o wykładniku 2 jest abelowa, co też oznacza, że każda grupa o wykładniku 2 spełnia warunek $E_n$, dla $n \geqslant 1$. Nieco trudniej dowieść, że każda grupa o wykładniku 3 spełnia warunek $E_n$ dla $n \geqslant 2$.

$$
\begin{aligned}
(2) \quad (x,y,y) &= (x,y)^{-1}y^{-1}(x,y)y = (y^{-1}x^{-1}yx)y^{-1}(x^{-1}y^{-1}xy)y \\
&= (y^{-1}x^{-1}yx)y^{-1}(x^{-1}y^{-1}(x^{-1}y^{-1}x^{-1}xyx)xy)y \\
&= (y^{-1}x^{-1}yx)(y^{-1}x^{-1})(y^{-1}x^{-1})(y^{-1}x^{-1})xyx^2y^2 \\
&= (y^{-1}x^{-1}yx)(y^{-1}x^{-1})^3(xyx^2y^2) \\
&= (y^{-1}x^{-1}yx)(y^{-1}x^{-1})^3(x^{-1}y^{-1}xyy^{-1}x^{-1}yx)(xyx^2y^2) \\
&= (y^{-1}x^{-1}yx)(y^{-1}x^{-1})^3(x^{-1}y^{-1}xy)(y^{-1}x^{-1}yx^2yx^2y^2) \\
&= (y^{-1}x^{-1}yxy^{-1}x^{-2}y^{-1}xy)^3(y^{-1}x^{-1}(yx^2)^3xy)(y^{-1}x^{-3}y) \\
&= (y^{-1}x^{-1}yxy^{-1}x^{-2}y^{-1}xy)^3(y^{-1}x^{-1}yx^3y)^3(y^{-1}x^{-1}y)^3.
\end{aligned}
$$

Można spróbować wyobrazić sobie poziom trudności problemu Kostrikina, jeśli zważymy, że rozwinięcie wyrażenia $(x, y, y)$ daje słowo $(y^{-1}x^{-1}yx)$ $y^{-1}(x^{-1}y^{-1}xy)y$ długości 10, a $(x, y, y, y, y, y, y)$ daje nieskracalne słowo długości 190 w symbolach zbioru $\{x, x^{-1}, y, y^{-1}\}$.

Problemy sformułowane przez Burnside'a ponad sto lat temu wywarły ogromny wpływ na rozwój teorii grup i mimo upływu lat, nadal pozostają w obszarze zainteresowań specjalistów, zwłaszcza tych, którzy zajmują się kombinatoryczną teorią grup i grupami z różnymi warunkami skończoności. Te trzy blisko ze sobą związane problemy zostały rozwiązane kompletnie różnymi metodami, a kolejno pojawiające się rozwiązania w żadnym stopniu nie ułatwiły uzyskania odpowiedzi na pozostałe. Za to, nowe idee i wysoce zaawansowane metody wypracowane na potrzeby rozwiązań dały silny impuls dla dynamicznego rozwoju różnych, wzajemnie odległych obszarów teorii grup.

Trudno, w krótkim artykule przedstawić pełny wachlarz zagadnień, dla których owe nowe metody odegrały i odgrywają istotną rolę. Z punktu widzenia walorów popularyzatorskich niełatwo także znaleźć atrakcyjną ilustrację skuteczności tych metod na przykładzie dowodu wybranego ważniejszego faktu, zrozumiałego nie tylko dla wąskiego kręgu specjalistów. Są one na ogół bardzo długie i bardzo rozbudowane pojęciowo, chociaż same fakty lub problemy mogą mieć łatwo zrozumiałe, by nie powiedzieć 'przyjazne' brzmienie, jak choćby ten, pierwszy z brzegu, nierozwiązany do dziś przypadek Ograniczonego Problemu Burnside'a:

*Czy każda grupa generowana przez dwa elementy, w której każdy element spełnia równanie*

$$x^5 = 1,$$

*jest skończona?*

**Literatura**


[1] S. I. Adian, *Problem Burnside'a o grupach torsyjnych i problemy z nim związane* (ros.), Sowremennye Prabliemy Matiematiki. No. 1, Ross. Akad. Nauk, Inst. Mat. im. Steklova, Moskwa, 2003, 5–28 (electronic).

[2] S. I. Adian, *Problem Burnside'a i tożsamości w grupach* (ros.), Moskwa 1975.

[3] C. Bagiński, *O problemach Burnside'a*, Wiadomości Matematyczne, 33, 1997, 53–74.

[4] H. U. Besche, B. Eick, E. A. O'Brien, *A millenium Project: Constructing Small Groups*, Int. J. Algebra and Comput. 12 (2002), 623–644.

[5] J. W. Cannon, W. J. Floyd, R. W. Parry, *Introductory notes on Richard Thompson' groups*, L'Ens. Math., 42 (1996), 215–256.

[6] G. Havas, M. Vaughan-Lee, *4-Engel groups are locally nilpotent*, Int. J. Algebra Comput. 15(4) (2005), 649–682.

[7] H. Heineken, *Engelsche Elemente der Lange drei*, Illinois J. Math. 5 (1961) 681–707.

[8] S. V. Ivanov, *The free Burnside groups of sufficiently large exponents*, Int. J. Algebra Comput., 4 (1994), 1–307.

[9] M. I. Kargapołow, J. I. Mierzlakow, *Podstawy teorii grup*, PWN, Warszawa 1989.

[10] E. I. Khukhro, *Grupy nilpotentne i ich automorfizmy rzędu pierwszego* (ros.), Freiburg 1992.

[11] A. I. Kostrikin, *Wokół Burnside'a* (ros.), Moskwa, Nauka, 1986.

[12] Kourovskaja Tietrad', *Zbiór nierozwiązanych problemów z teorii grup*, redakcja E. I. Khukhro i V. D. Mazurov, Novosibirsk, 2004.

[13] C. R. Leedham-Green, S. McKay, *The Structure of Groups of Prime Power Order*, Oxford University Press, 2002.

[14] I. G. Lysonok, *Nieskończone grupy Burnside'a o parzystym wykladniku* (ros.), Izv. RAS. Ser. mat., 60 (3) (1996), 3–224.

[15] J. von Neumann, *Zur allgemeinen Theorie des Masses*, Fund. Math. 13 (1929), 73–116.

[16] M. F. Newman, E. A. O'Brien and M. R. Vaughan-Lee, *Groups and nilpotent Lie rings whose order is the sixth power of a prime*, J. Algebra 278 (2004), 383–401.

[17] E. A. O'Brien and M. R. Vaughan-Lee, *The groups with order $p^7$ for odd prime $p$*, J. Algebra, 292 (2005), 243–258.

[18] A. Yu. Olshanskii, *Geometria relacji określających w grupach* (ros.), Moskwa 1989.

[19] A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir, *Non-amenable finitely presented torsion-by-cyclic groups*, arXiv:math.GR/0208237 v1 30 Aug 2002.
[20] G. Traustason, *Two generator* 4*-Engel groups*, Int. J. Algebra Comput. 15(2) (2005), 309–316.
[21] G. Traustason, *A note on the local nilpotence of* 4*-Engel groups*, Int. J. Algebra Comput. 15(4) (2005), 757–764.
[22] M. Vaughan-Lee, *The Restricted Burnside Problem*, Clarendon Press, Oxford 1993.
[23] M. Vaughan-Lee, *Engel-4 groups of exponent 5*, Proc. London Math.Soc. 74 (1997), 306–334.

Czesław Bagiński
Politechnika Białostocka
15–351 Białystok
ul. Wiejska 45A
e-mail: baginski@pb.bialystok.pl