

## ANALITYCZNE I DOŚWIADCZALNE WYZNACZENIE NOŚNOŚCI KRYTYCZNEJ NA ZWICHRZENIE BELKI DWUTEOWEJ

### Streszczenie

Zginana belka może utracić stateczność ogólną lub miejscową środnika bądź pasa ściskanego w zależności od rozmieszczenia i sposobu obciążenia, kształtu i cech geometrycznych przekroju poprzecznego, długości, warunków podparcia czy też pośrednich więzów sprężystych. Problem praktyczny wymiarowania sprowadza się do oceny nośności przekroju belki, której miernikiem jest moment krytyczny zwichrzenia tj. utraty płaskiej postaci zginania ze skręceniem względem osi wzdłużnej. Rozwiązanie analityczne ma postać zamknięte tylko dla przypadku obciążenia stałym momentem gnącym. Inne przebiegi momentów gnących są uwzględniane we wzorze analitycznym poprzez współczynnik  $C_1$ .

W pracy przedstawiono rozwiązanie analityczne, które posłużyło do sformułowania wzorów, zamieszczonych w normach PN-90/B-03200 oraz PN-EN 1993-1-1: 2006 do wyznaczania momentu krytycznego zwichrzenia. Wartości tych momentów zweryfikowano wykonując rozwiązanie metodą elementów skończonych oraz przez pomiar doświadczalny. Zamieszczono stanowisko laboratoryjne do badania zwichrzenia belki o profilu dwuteowym I80. Wyniki otrzymane z pomiarów posłużyły do wyznaczenia momentu krytycznego zwichrzenia, którego wartość porównano z wynikami otrzymanymi ze wzorów i z obliczeń programami MES. W literaturze krajowej znane są opracowania z wynikami badań doświadczalnych, wykonanymi przez m.in. prof. J. Żmuda [2].

### WSTĘP

Przekroje, dla których momenty bezwładności znacznie się różnią  $J_y \gg J_z$  oraz mają relatywnie małą sztywność na skręcanie, przy obciążeniu w płaszczyźnie większej sztywności giętej ulegają wygięciu względem osi słabszej, jest to utrata płaskiej postaci zginania, której towarzyszy skręcenie względem osi wzdłużnej, taką deformację nazywamy zwichrzeniem.

W obliczeniach stanu granicznego elementu zginanego wyznacza się współczynnik  $\chi_{LT}$  redukcyjny dla nośności przekroju na zginanie, do obliczenia, którego potrzebna jest wartość momentu krytycznego zwichrzenia  $M_{cr}$ . W artykule przedstawiono różne obliczeniowe metody wyznaczania momentu krytycznego zwichrzenia teoretyczne oraz normowe wzory, obliczenia programem metody MES i wynik uzyskany z doświadczenia.

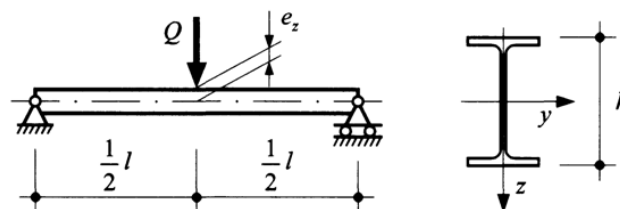
Przedstawiono wzory analityczne pozwalające oszacować moment krytyczny zwichrzenia niestężonych belek podpartych widelkowo, pod obciążeniem siłą skupioną przyłożoną do pasa górnego w połowie rozpiętości belki.

## 1. ANALITYCZNE WYZNACZENIE MOMENTU ZWICHRZENIA

### 1.1. Analityczne wyznaczenie nośności krytycznej na zwichrzenie belki dwuteowej

W literaturze [1],[6] zamieszczone są rozwiązania problemu zwichrzenia dla belki widelkowo podpartej z obciążeniem przez momenty skupione na końcach belki, wówczas przebieg momentu gnącego jest funkcją stałą i jest to jedyny przypadek posiadający wzór na moment krytyczny zwichrzenia, jako rozwiązanie zamknięte. Każdy inny wariant obciążenia posiada rozwiązanie w postaci szeregu funkcyjnego, w tym także przypadek belki z obciążeniem siłą skupioną w połowie rozpiętości belki.

Doświadczalne wyznaczenie siły krytycznej zwichrzenia dotyczy belki dwuteowej IPN80, o długości  $l=220$  cm, moment bezwładności względem osi słabej  $I_z = 6,29$  cm<sup>4</sup>, moment bezwładności na skręcanie swobodne  $I_T = 0,93$  cm<sup>4</sup>, moment bezwładności deplanacji  $I_\omega = 84$  cm<sup>6</sup> dlatego też, dla takiej belki wykonamy obliczenia teoretyczne.



Rys. 1. Schemat belki [6]

Zależność na siłę krytyczną zwichrzenia belki, wg Timoshenki [1],

$$Q_{cr} = \gamma_2 \frac{\sqrt{EI_z GI_T}}{L^2}$$

parametry

$$\frac{L^2 GI_T}{EI_\omega} = \frac{2200^2 \cdot 0,8077 \cdot 10^5 \cdot 0,93 \cdot 10^4}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 84 \cdot 10^6} = 206,1$$

$$\gamma_2 = 15,41525$$

siła i moment krytyczny zwichrzenia wynoszą

$$Q_{cr} = \gamma_2 \frac{\sqrt{EI_z GI_T}}{L^2} = 15,41525 \cdot$$

$$\frac{\sqrt{2,1 \cdot 10^5 \cdot 6,29 \cdot 10^4 \cdot 0,8077 \cdot 10^5 \cdot 0,93 \cdot 10^4}}{2200^2} = 10,032 \text{ kN}$$

$$M_{cr} = \frac{1}{4} Q_{cr} L = \frac{1}{4} 10,032 \cdot 2,2 = 5,5178 \text{ kNm}$$

## 1.2. Wyznaczenie momentu zwichrzenia według normy PN-90B-03200

W powyższej normie do obliczenia teoretycznego momentu zwichrzenia podano wzór [3]

$$M_{cr} = 0,76a_s N_z + \sqrt{(0,76a_s N_z)^2 + 1,37^2 N_z (i_0^2 N_\varphi)} = \frac{Q_{cr} L}{4}$$

siła krytyczna względem osi słabej wynosi

$$N_z = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 6,29 \cdot 10^4}{2200^2} = 26,935 kN$$

parametr

$$i_0^2 N_\varphi = \frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2} + GI_t = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 0,084 \cdot 10^9}{2200^2} + \frac{2,1 \cdot 10^5}{2(1+0,3)} \cdot 0,93 \cdot 10^4 = 787124,88 kNmm^2$$

moment krytyczny zwichrzenia wynosi

$$M_{cr} = 0,76 \cdot 40 \cdot 26935,46 + \sqrt{(0,76 \cdot 40 \cdot 26935,46)^2 + 1,37^2 \cdot 26935,46(787124883,7)} = 7,1799 kNm$$

a siła krytyczna wynosi

$$Q_{cr} = \frac{4M_{cr}}{L} = \frac{4 \cdot 7179947,506}{2200} = 13,054 kN$$

## 1.3. Wyznaczenie momentu zwichrzenia według normy PN-EN 1993-1-1. Eurokod 3, cz.1-1.

Sprężysty moment krytyczny jest obliczany według formuły wprowadzonej z teorii zwichrzenia [4,5]

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{(kL)^2} \left\{ \sqrt{\left(\frac{k}{k_w}\right)^2 \frac{I_\omega}{I_z} + \frac{(kL)^2 GI_T}{\pi^2 EI_z} + (C_2 z_g)^2} - (C_2 z_g) \right\}$$

$C_1$  - współczynnik równoważności rozkładu stałego momentu

gnącego względem rzeczywistego rozkładu momentu gnącego,  $C_2$  - współczynnik określający wpływ współrzędnej przyłożenia siły skupionej względem środka ścinania,

$z_g$  - odległość między punktem przyłożenia siły a środkiem ścinania,

$k$  i  $k_w$  - współczynniki długości efektywnej.

Podstawiając do wzoru dane liczbowe otrzymamy

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{(kL)^2} \left\{ \sqrt{\left(\frac{k}{k_w}\right)^2 \frac{I_\omega}{I_z} + \frac{(kL)^2 GI_T}{\pi^2 EI_z} + (C_2 z_g)^2} - (C_2 z_g) \right\} = 1,348 \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 6,29 \cdot 10^4}{2200^2} \left\{ \sqrt{\frac{84 \cdot 10^6}{6,29 \cdot 10^4} + \frac{2200^2 \cdot 0,81 \cdot 10^5 \cdot 0,93 \cdot 10^4}{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 6,29 \cdot 10^4} + (0,63 \cdot 40)^2} - (0,63 \cdot 40) \right\} = 5,359 kNm$$

Siła krytyczna zwichrzenia

$$Q_{cr} = \frac{4M_{cr}}{L} = \frac{4 \cdot 5359007,566}{2200} = 9,7437 kN$$

## 2. NUMERYCZNE WYZNACZANIE MOMENTU ZWICHRENIA

Zastosowano: program LTBeam [7] i program Autodesk Robot Structural Analysis [9].

### 2.1. Obliczenia programem LTBeam

LTBeam jest darmowym programem służącym do wyznaczania wartości momentu krytycznego metodą elementów skończonych. Dzieli on belkę na 100 – 200 elementów prętowych, o 7 stopniach swobody w każdym węźle. Dodatkowy stopień swobody w stosunku do standardowych (6 stopniowych) modeli prętowych wynika z uwzględnienia deplanacji przekrojów.

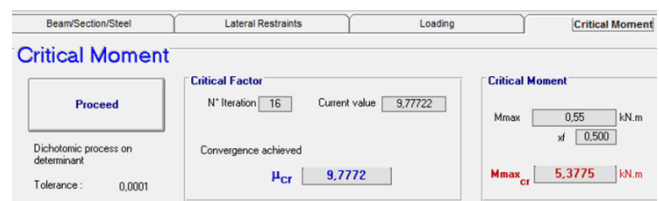
Program umożliwia m.in. uwzględnienie podatności podpór, dowolnego rozkładu momentu zginającego, dodatkowych podpór pośrednich, czy miejsca przyłożenia obciążenia. Wynik uzyskuje się rozwiązując zagadnienie uogólnionego problemu własnego związane z utratą stateczności.

Z obliczeń programem LTBeam [7] (zalecanego w PN-EN 1993-1-1. Eurokod 3) otrzymano wartość momentu krytycznego

$$M_{cr} = 5,3775 kNm$$

oraz siły krytycznej

$$Q_{cr} = \frac{4M_{cr}}{L} = \frac{4 \cdot 5,3775}{2,2} = 9,7772 kN$$



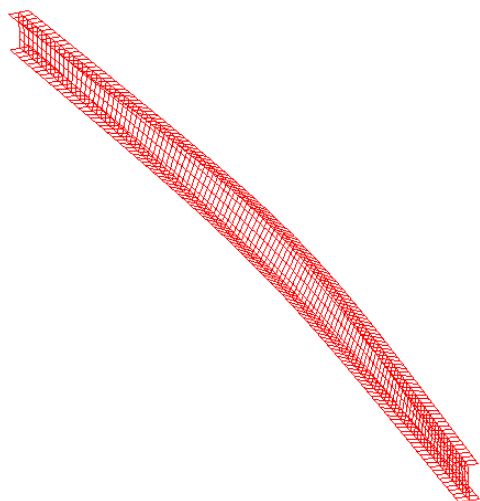
Rys. 2. Wyniki obliczeń z programu LTBeam

### 2.2. Obliczenia za pomocą programu Autodesk Robot Structural Analysis

Program ten jest zaawansowanym narzędziem służącym do analiz statycznych, stateczności, dynamiki i innych, korzystającym z metody elementów skończonych.

Modelując zginaną belkę za pomocą elementów powłokowych (rys.3), uzyskano rozwiązanie utraty stateczności ogólnej zwanej zwichrzeniem belki.





Rys.3 Model obliczeniowy i postać zwichrzeniowa belki

Wyznaczona z programu wartość siły krytycznej

$$Q_{cr} = 9,7438kN$$

oraz wartość momentu krytycznego

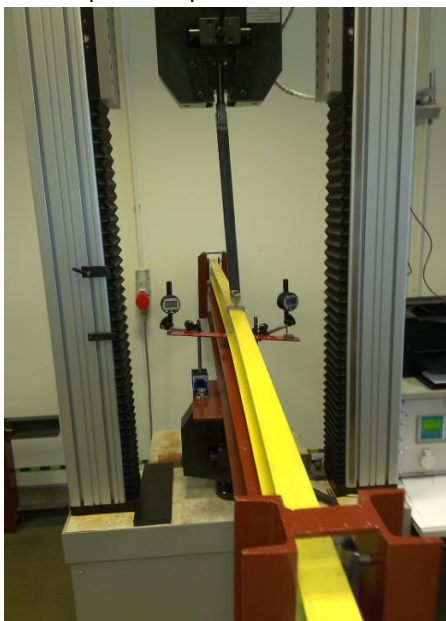
$$M_{cr} = \frac{1}{4} Q_{cr} L = \frac{1}{4} 9,7438 \cdot 2,2 = 5,359kNm$$

### 3. DOŚWIADCZALNE WYZNACZENIE MOMENTU ZWICHRZENIA

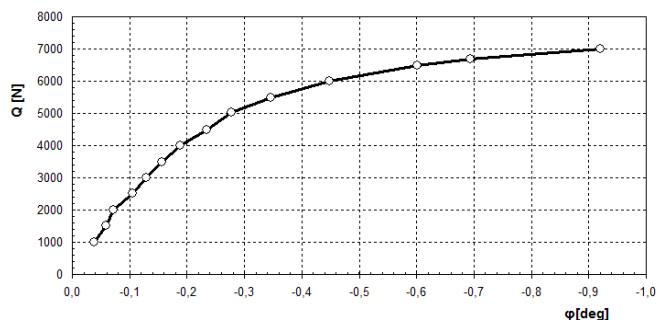
Stanowisko do badań przedstawia rys.4. Obciążenie  $Q$  wykonywała maszyna, mierzone były przemieszczenia pionowe na podstawie, których wyznaczony był kąt skręcenia  $\varphi$  przekroju względem osi wzdłużnej, otrzymany wykres zamieszczono na rys.5. Następnie przekształcając hiperbolę otrzymaną z wyników pomiarów do równania prostej za pomocą metody Southwella wyznaczono wartości

$$Q_{cr} = 9,2327kN$$

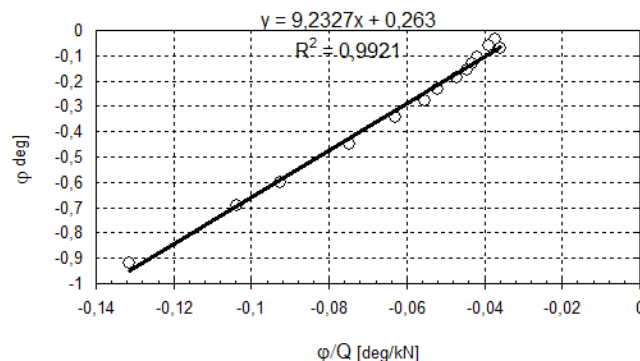
$$M_{cr} = \frac{1}{4} Q_{cr} L = \frac{1}{4} 9,2327 \cdot 2,2 = 5,08kNm$$



Rys.4. Stanowisko badawcze wykonanie stanowiska: dr inż. K. Dziewiecki, mgr inż. Z. Mazur: U T-H w Radomiu



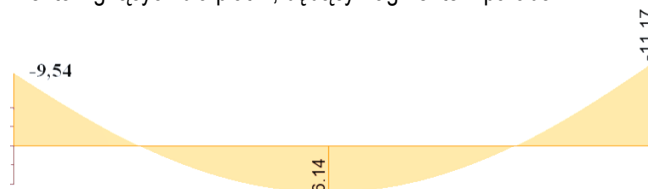
Rys.5. Wykres siły  $Q$  w funkcji kąta skręcenia  $\varphi$



Rys.6. Prosta wyznaczona z metody Southwella

### 4. PROJEKTOWE WYZNACZENIE MOMENTU ZWICHRZENIA

W obliczeniach projektowania, na ogół występują wykresy momentów gnących o dowolnym przebiegu, przykładowo wykres momentów gnących dla płatwi, będący fragmentem paraboli.



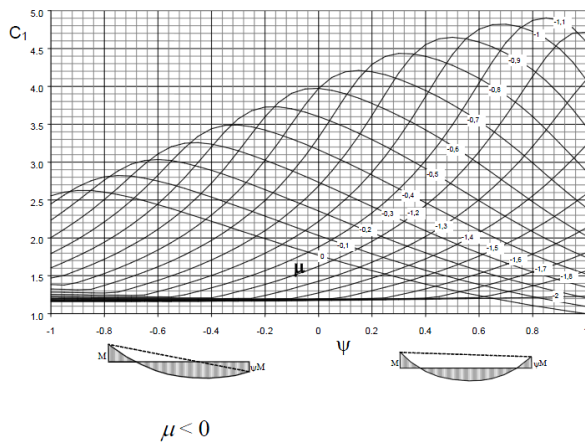
Rys.7 Moment gnący dla płatwi

Określenie współczynnika  $C_1$  wymaga zestawienia obciążenia od kombinacji:  $(1+2) \cdot 1,15 + 3 \cdot 1,50 + 7 \cdot 0,90$ , (dla IPE 160 ciężar własny wynosi  $0,16 \text{ kN/m}$ ).

$$q = (0,16 + 0,14) \cdot 1,15 + 3,0 \cdot 1,5 + 0,9 \cdot 0,57 = 5,35 \text{ kN/m}$$

$$\mu = \frac{qL^2}{8M} = \frac{5,35 \cdot 5^2}{8 \cdot (-11,17)} = -1,50$$

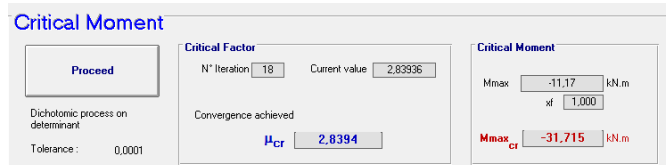
z monogramu (rys.8) odczytamy  $C_1 = 2,35$



Rys. 8 Nomogramy współczynnika  $C_1$  [8]

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \sqrt{\frac{I_\omega + \frac{L^2 GI_T}{\pi^2 EI_z}}{I_z + \frac{L^2 GI_T}{\pi^2 EI_z}}} = 2,35 \frac{\pi^2 \cdot 210000 \cdot 68,3 \cdot 10^4}{5000^2} \sqrt{\frac{3958 \cdot 10^6}{68,3 \cdot 10^4} + \frac{5000^2 \cdot 81000 \cdot 3,61 \cdot 10^4}{\pi^2 \cdot 210000 \cdot 68,3 \cdot 10^4}} = 31,9 \text{ kNm}$$

Wyznaczony moment krytyczny zweryfikowałem stosując program obliczeniowy LTBeam (rys. 9).



Rys. 9. Wartość momentu krytycznego obliczonego programem LTBeam

Otrzymane wartości są z techniczną dokładnością takie same.

## PODSUMOWANIE

W przedstawionych wynikach widoczna jest bardzo dobra zgodność wartości  $M_{cr}$  z obliczeń wzorem Eurokodu oraz z programów metody elementów skończonych Autodesk Robot Structural Analysis i LTBeam, błąd oszacowania nie przekraczał 1,3%.

Wyniki otrzymane z programów numerycznych LTBeam i Robot są praktycznie identyczne. Zatem można przeprowadzić takie obliczenia zwłaszcza w sytuacjach bardziej złożonego obciążenia, czy innych warunków podparcia belki.

Natomiast, niezgodność wyników teoretycznych obliczeń z wynikami doświadczenia, wynosząca około 5%, może być spowodowana: imperfekcją geometryczną belki, sposobem przyłożenia obciążenia poprzez łącznik, którego kierunek ukośny wprowadza dodatkową składową poziomą obciążenia, a ta działa destabilizująco powodując pomniejszenie odporności belki na zwichrzenie a tym samym zmniejszając wartości  $Q_{cr}$  i  $M_{cr}$ .

## BIBLIOGRAFIA

1. Timoshenko S.P., Gere J.M.: *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.
2. Żmuda J.: *Problemy niestateczności w projektowaniu dźwigarów stalowych*, Studia i Monografie, nr 156, Wydaw. Politechniki Opolskiej, Opole 2004.
3. *Norma PN-90/B-03200: Konstrukcje stalowe – Obliczenia statyczne i projektowanie*.
4. *Norma ENV 1993-1-1: Eurocode 3 – Design of steel structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings*, CEN, Brussels 1992.
5. *Norma PN-EN 1993-1-1: Eurokod 3 – Projektowanie konstrukcji stalowych – Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków*, PKN, Warszawa 2006.
6. Rykaluk K.: *Zagadnienia stateczności konstrukcji metalowych*, DWE, Wrocław 2012
7. LTBeam, CTICM (Centre Technique Industriel de la Construction Metallique-France)
8. Załącznik SN003a-PL-EU
9. Autodesk Robot Structural Analysis

## DETERMINATION OF THE LATERAL BUCKLING MOMENT OF I-SHAPED BEAM

### Abstract

An analytic solution that served for formulation of the formulas contained in PN-90/B-03200 and PN-EN 1993-1-1: 2006 standards for determination of the lateral buckling moment is presented in the paper. The values of that moment were verified by getting a solution with use of Finite Element Method and by experimental measurements. A laboratory stand for testing lateral buckling of I-shaped beam 80 is shown. The results from measurements served for determination of the lateral buckling moment and the obtained value was compared to the results from the formulas and from the FEM program calculations.

Autor:

Dr inż. Sławomir Stachura

Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny w Radomiu