

W ramach realizowanego przez miesięcznik „Builder” programu „Wspieramy młodych inżynierów budownictwa” dajemy możliwość pierwszych publikacji naukowych młodym doktorantom.

ZWICHRZENIE BELEK

w podejściu teoretycznym i numerycznym



Sebastian Balcerowiak
Wojciech Chojnacki
Jędrzej Dobrzański
 Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego,
 Politechnika Wroclawska

Artykuł dotyczy niestateczności elementów belkowych przy zginaniu. Podjęto w nim próbę inżynierskiego objaśnienia zjawiska zwicchrzenia oraz sposobu obliczania momentu krytycznego przy użyciu powszechnie znanych wzorów analitycznych oraz – jako alternatywę – programów obsługujących metodę elementów skończonych.

W codziennej praktyce inżynierskiej często zachodzi potrzeba wyznaczenia momentu krytycznego dla elementów prętowych. Wzory uzyskane na drodze ścisłych rozważań teoretycznych sprawdzają się dla prostych przypadków (np. belka swobodnie podparta), lecz dla elementów o bardziej skomplikowanych warunkach podparcia i nietypowych przebiegach momentów gnących standardowe wzory mogą okazać się niewystarczające, a wyniki z nich uzyskane – niemiernodajne. Wychodząc naprzeciw tym wymaganiom, autorzy niniejszego artykułu prezentują prostą metodę pozwalającą uzyskiwać zadowalające wyniki.

Artykuł jest skierowany do osób mających podstawową wiedzę z wytrzymałości materiałów i został napisany w celu usystematyzowania ogólnej wiedzy o zjawisku zwicchrzenia od strony teoretycznej i numerycznej.

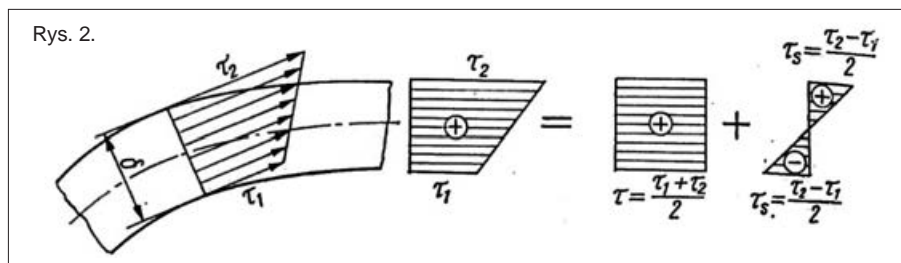
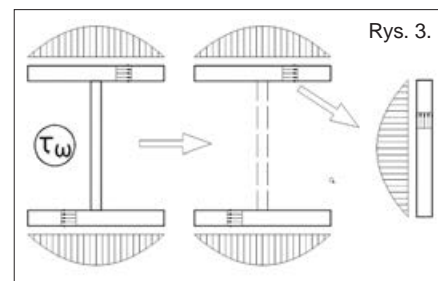
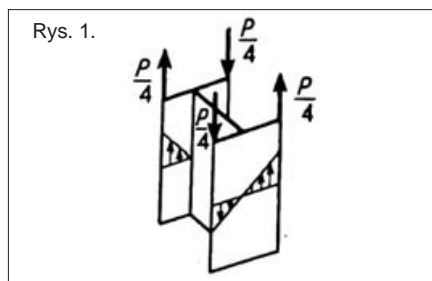
Teoria prętów cienkościennych

Z pojęciem zwicchrzenia belek o przekrojach cienkościennych otwartych nierozdzielnie wiąże się teoria profili cienkościennych (teoria Własowa). Na jej gruncie łatwo daje się wytłumaczyć zjawisko niestateczności płaskiej postaci zginania. W celu uproszczenia zagadnienia poniższe rozważania oparto na przykładzie belki o przekroju dwuteowym bisymetrycznym. Teoria Własowa wychodzi poza klasyczną teorię skręcania prętów zaproponowaną przez de Saint-Venanta. Okazuje się bowiem, że o ile dla prętów litych bądź cienkościennych o przekrojach zamkniętych zasada de Saint-Venanta jest spełniona, tak zastosowanie jej w przypadku prętów cienkościennych o przekroju otwartym

byłoby sporym nadużyciem i w obliczeniach inżynierskich jest niemiernodajne, co poglądowo przedstawia szkic na rys. 1. [2].

Wobec tego teoria Własowa zrywa także z zasadą zachowania płaskich przekrojów, gdyż umożliwia ona pacznie się przekrojów przy jednoczesnym zachowaniu zasady sztywnego konturu (tzn. przekroje mają swobodę odkształceń w kierunku podłużnym belki, jednak nie ulegają deformacji w swoich płaszczyznach [1]). Te i inne założenia teorii prętów cienkościennych oraz analiza silnie poparta narzędziami matematycznymi prowadzą do wniosku, że w przypadku występowania całkowitego momentu skręcającego w belkach o przekrojach cienkościennych otwartych wyraźnie można wyróżnić w nim dwie składowe – tę odpowiedzialną za skręcanie czyste M_v (skręcanie de Saint-Venanta, nieskrępowane) oraz tę, która odpowiada za skręcanie giętne M_w (skręcanie nieswobodne) (rys. 2. [1]).

Moment giętno-skrętny M_w powoduje powstanie naprężeń stycznych τ_w o stałej wartości na grubości półek, które wraz z szerokością półki zmieniają się w sposób paraboliczny, przy czym naprężenia te w środku są równe zero. Pojawia się zatem pomysł, by usunąć myślowo środkik z przekroju dwuteowego, pozostawiając półki. Otrzymamy wówczas dwa przekroje prostokątne, w których występują takie same naprężenia styczne, jednakże o innych zwrotach (rys. 3).





Fot. Jan Gielenczek

Szkic przedstawiający jedną z póltek i naprężenia w niej występujące, jak ten przedstawiony na rys. 3., z pewnością przywodzi na myśl naprężenia styczne, których wartość wyznacza się z dobrze znanego wzoru Żurawskiego. Warunkiem występowania tych naprężeń jest występowanie naprężeń normalnych (zgodnie z elementarną teorią zginania), co prowadzi do bardzo ogólnego wniosku, że wskutek skręcania cienkościennego przekroju otwartego powstają w nim, obok naprężeń stycznych, także naprężenia normalne. To z kolei wskazuje na fakt, że do sześciu uogólnionych sił wewnętrznych w ustroju prętowym dojdzie siódma siła, odpowiadająca za powstanie tych naprężeń w półkach oraz deplanację przekroju. Jak pokazuje teoria Własowa – są to słuszne domniemania. Siłę tę nazywa się bimomentem (oznaczanym jako B) i należy ją rozumieć jako parę momentów gnących o tych samych wartościach, przyłożonych w płaszczyznach póltek, jednakże o przeciwnych zwrotach. Ponadto wartość funkcji bimomentu można określić, jeśli znamy przebieg wartości momentów giętno-skrętnych, ponieważ jest ona jego całką $B' = M_{\omega}$ (innymi słowy – moment ten jest dla bimomentu tym samym, czym siła tnąca jest dla momentu zginającego w elementarnej teorii zginania). Na tej podstawie można by doszukiwać się pewnej analogii pomiędzy formalną stroną teorii gięcia skrętnego a elementarną teorią zginania belek. Jednakże, na co wskazują równania różniczkowe z teorii Własowa, analogia staje się zupełna tylko wtedy, jeśli założymy, że sztywność pręta przy skręcaniu czystym dąży do zera, tzn. $GI_T \rightarrow 0$. Należy jednak pamiętać, że profile cienkościennie otwarte cechują się małą sztywnością skrętną, zatem w przypadku takich elementów całkowity moment skręcający w belce będzie przede wszystkim wywoływał zginanie póltek, a wpływ skręcania czystego będzie znikomy.

Jak zatem teoria Własowa ma się do zjawiska zwichrzenia? Sama idea wyznaczenia wartości momentu krytycznego przy zwichrzeniu sprężystym jest intuicyjna i analogiczna do tej, która prowadzi do otrzymania formuły na siłę krytyczną przy wyboczeniu giętym pręta osio-

wo ściskanego (tzw. siła Eulerowska [1]) – poszukiwana jest taka wartość momentu gnącego, przy której wystarczy nieskończenie małe przemieszczenie poprzecznej części ściskanej przekroju (nieskończenie mały kąt obrotu), by powstający moment skręcający, a więc też moment giętno-skrętny i bimoment, zainicjował cały proces zwichrzenia się belki. Zakładamy, że belka o przekroju bisymetrycznym dwuteowym jest zginana w płaszczyźnie środka i że w górnej części przekroju pojawiają się naprężenia ściskające. Ponadto przyjmujemy, że belka jest idealnie prosta i nie występują na niej żadne imperfekcje geometryczne, technologiczne i materiałowe. Uzyskanie rozwiązania tego problemu może odbyć się na drodze analitycznej z wykorzystaniem teorii Własowa. Momentem krytycznym jest rozwiązanie stosownych równań różniczkowych, w zależności od sposobu podparcia i przyłożenia obciążenia. W praktyce używane są wzory pozwalające obliczyć wartość tego momentu dla typowych belek. Problemem mogą okazać się schematy obliczeniowe o skomplikowanych warunkach brzegowych. W takich przypadkach rzeczą konieczną może się okazać potrzeba rozwiązania dość skomplikowanego równania różniczkowego, co w praktyce inżynierskiej mogłoby być nieefektywne i czasochłonne. Alternatywą jest użycie programów MES. Większość z nich w modelu prętowym nie uwzględnia deplanacji, wobec tego należałoby półki „odseparować”. Mając na względzie powyższe rozważania, autorzy artykułu przedstawiają prostą metodę obliczania M_{cr} .

Metoda analityczna

Punktem bifurkacji stateczności elementu przy zginaniu jest moment krytyczny. Jest to wartość momentu zginającego, w którym element znajdzie się w równowadze obojętnej.

Jego rola w projektowaniu stalowych konstrukcji prętowych została sprowadzona do wyznaczenia smukłości, a dalej – współczynnika zwichrzenia w różnych odmianach metody Perry-Robertsona (np. EN 1993).

W literaturze technicznej występuje wiele wzorów pozwalających wyznaczyć moment krytyczny. Najpopularniejsza wersja, w rozbudowanej formie, została przedstawiona w artykule jako równanie (1). Należy zaznaczyć, że wzór obowiązuje tylko dla przekrojów o symetrii względem słabej osi oraz co najmniej podparcia widelkowego na każdej podporze.

$$M_{cr} = C_1 \cdot \frac{\pi^2 \cdot EI_z}{(k_z \cdot L)^2} \left(\sqrt{\frac{k_z \cdot I_{\omega} + \frac{(k_z \cdot L)^2 \cdot GI_t}{\pi^2 \cdot EI_z} + (C_2 \cdot z_g)^2}{k_{\omega} \cdot I_z}} - (C_2 \cdot z_g - C_3 \cdot z_j) \right) \quad (1)$$

E – moduł Young’a;

G – moduł Kirchhoffa;

I_z – moment bezwładności względem słabej osi przekroju;

I_t – moment bezwładności czystego skręcania;

I_{ω} – wycinkowy moment bezwładności;

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad I_t = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n (t_i^3 \cdot l_i) \quad I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA \quad (2)$$

L – długość elementu pomiędzy stężeniami bocznymi – jeżeli brak stężeń bocznych, to rozstaw między podporami belki;

k_z – współczynnik długości wybożenia giętnego względem osi z . Jego wartość można przyjmować: 1.0 – dla dwóch przegubowych, 0.5 – dla dwóch końców utwierdzonych, 0.7 – dla jednego końca przegubowego i jednego utwierdzonego;

k_{ω} – współczynnik długości wybożeniowej uwzględniający możliwość spaczenia przekrojów końcowych. Jego wartości przyjmuje się analogicznie dla k_z . Przykładem $k_{\omega}=0.5$ jest belka sztywno-sztywna przyspawana doczołowo do słupów na każdym końcu. Jeżeli nie ma wyraźnych przesłanek, by przyjąć inaczej, to $k_{\omega}=1.0$;

z_g – dystans pomiędzy punktem przyłożenia obciążenia a środkiem ścinania, np. dla obciążenia przyłożonego do górnej półki dwuteownika bisymetrycznego $z_g=0.5 \cdot h$. Znak dodatni oznacza, że obciążenie ma zwrot w kierunku środka ścinania;

z_j – dystans miarodajny dla uwzględnienia asymetrii względem osi y - y . Znak dodatni oznacza, że obciążenie jest skierowane w kierunku środka ścinania. Jeżeli przekrój jest bisymetryczny, to

$$z_j = z_s - \frac{0.5 \int_A (y^2 + z^2) z dA}{I_y} \quad (3)$$

W celu ułatwienia obliczeń można skorzystać ze wzorów do całkowania numerycznego, np. wzoru Simpsona, albo programów komputerowych.

z_s – dystans pomiędzy środkiem ścinania oraz środkiem ciężkości. Dla przekrojów bisymetrycznych przyjmuje się wartość 0;

C_1 – współczynnik odpowiedzialny za kształt wykresu momentu zginającego pomiędzy stężeniami bocznymi. Jeżeli obciążeniem zewnętrznym jest para momentów zginających na końcach elementu, to wtedy współczynnik przyjmuje wartość 1.0;

C_2 – współczynnik odpowiedzialny za miejsce przyłożenia obciążenia. Jeżeli obciążenie zostało przyłożone w środku ścinania, to współczynnik zredukuje się poprzez $z_g=0$;

C_3 – współczynnik korygujący ze względu na asymetrię przekroju względem silnej osi y-y. Jeżeli przekrój jest podwójnie symetryczny, to współczynnik zostanie zredukowany poprzez $z_y=0$.

Współczynniki C_1 , C_2 oraz C_3 zależą od rozkładu momentu zginającego, wpływu obciążenia oraz warunków brzegowych.

Metoda elementów skończonych

Chcąc przeanalizować zjawisko zwichrzenia za pomocą metody elementów skończonych, należy zwrócić szczególną uwagę na rodzaj elementów, jakimi posługujemy się w modelu. W analizie komputerowej do każdego węzła ES przypisane jest odpowiednie zachowanie w przestrzeni, określane mianem stopnia swobody.

Stopień swobody węzła to liczba przemieszczeń uogólnionych (np. translacja, rotacja, deplanacja), które mogą nastąpić. Do opisu zwichrzenia elementu prętowego w ramach metody elementów skończonych potrzebujemy informacji o deplanacji przekroju – elementu prętowego o 14 stopniach swobody. Macierz sztywności takiego elementu skończonego:

$$\{q_e\}^T = \{u_1, v_1, w_1, \varphi_1, \chi_1, \psi_1, \theta_1, u_2, v_2, w_2, \varphi_2, \chi_2, \psi_2, \theta_2\}. \quad (4)$$

Obecnie na rynku jest dostępnych niewiele programów pozwalających na uwzględnienie siódmego stopnia swobody węzłów w modelu prętowym. Przykładem są programy LTBeamN oraz SOFISTiK AG. Modele prętowe utworzone za pomocą elementów z węzłami o sześciu stopniach swobody nie nadają się do tego celu z uwagi na brak występowania zmiennych uogólnionych odpowiadających za paczenie.

Propozycja autorów sprawnego obliczenia momentu krytycznego w obliczeniach numerycznych to zamodelowanie środknika elementem powłokowym, natomiast pótek – elementami prętowymi. Metoda ta wymaga jedynie wsparcia podstawowych elementów typu pręt, powłoka, oraz analizy LBA (ang. *Linear Buckling Analysis*).

W modelu prętowym z siódmym stopniem swobody deplanacja jest obliczana na etapie rozwiązywania pola przemieszczeń. W modelu powłokowym deplanacja nie występuje w postaci uogólnionej, ponieważ zawiera się ona w pozostałych sześciu stopniach swobody. W proponowanym w artykule modelu zasada obliczania deplanacji przekroju jest analogiczna do modelu złożonego w pełni z elementów powłokowych.

Przykład obliczeniowy

W celu pokazania zbieżności wyników przeprowadzono obliczenia analitycznie oraz zaproponowaną metodą numeryczną. Schematem statycznym jest belka jednoprzęsłowa ze swobodą deplanacji na końcach. Przyjęto przekrój dwuteowy, przyzmatyczny, blachownicowy. Obciążenie liniowe, przyłożone do górnej półki i o kierunku przechodzącym przez środek ścinania. Górna półka ma wymiary 300 x 20 mm, dolna – 200 x 15 mm, środknik to blacha o wymiarach 500 x 10 mm. Całkowita długość belki to 15 m. W modelu nie występują stężenia boczne.

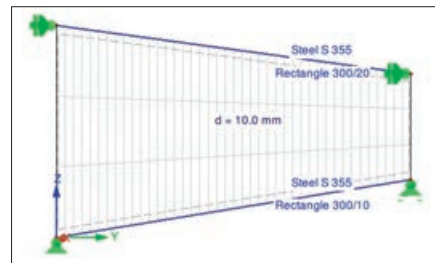
Przyjęte parametry do obliczeń: $E=210$ GPa, $G=81$ GPa, $I_y=66\,464$ cm⁴, $I_z=5\,504$ cm⁴, $I_t=119$ cm⁴, $I_\omega=2\,191\,142$ cm⁶, $L=15$ m, $k_z=1,0$, $k_\omega=1,0$, $z_g=10,42$ cm, $z_s=10,96$ cm, $z_y=6,87$ cm, $C_1=1,132$, $C_2=0,459$, $C_3=0,525$.

Moment krytyczny obliczony metodą analityczną wg równania (1) wyniósł $M_{cr}=269,8$ kNm. Należy zauważyć, że ta metoda wymagała ręcznego wyznaczania charakterystyk cienkościennych oraz obliczenia całki (3). Ponadto zastosowanie tablic do C_1 , C_2 , C_3 jest ograniczone do kilku prostych przypadków, co w rzeczywistych konstrukcjach zdarza się rzadko.

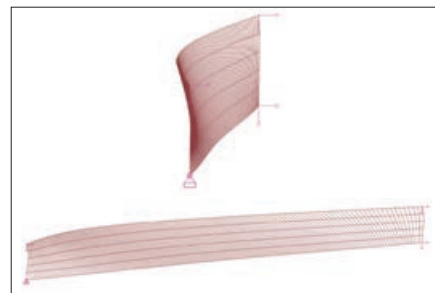
Zaproponowana w artykule metoda opiera się o liniową analizę wyboczeniową (LBA). Wynikiem analizy jest mnożnik krytyczny α_{cr} , oznaczający, ile razy należy przemnożyć obciążenia, aby uzyskać graniczną nośność ze względu na stateczność ustroju. Współczynnik krytyczny dla zwichrzenia wyniósł: $\alpha_{cr}=9,687$. Następnym krokiem jest obliczenie momentu zginającego w przekroju zgodnie z zasadami statyki liniowej. Moment krytyczny to inaczej moment zginający przemnożony przez współczynnik krytyczny $M_{cr}=\alpha_{cr}\cdot M_{Ek}=272,4$ kNm.

Wnioski

Ponieważ przedstawiona ścieżka obliczeń analitycznych może mieć zastosowanie tylko w układach o niewielkim stopniu skomplikowania, znaczną przewagę osiąga zastosowanie MES. Ponadto omówiony sposób modelowania wyróżnia się spośród alternatywnych podejść (stosowanie tylko elementów powłokowych, objętościowych) redukcją zbędnych obliczeń oraz dostępnością dla każdego programu do konstrukcji przestrzennych. Takie działanie umożliwia bardzo dokładne określenie warunków podparcia oraz przyłożenia obciążenia, co w przypadku analizy giętno-skrajnej ma istotnie duże znaczenie, gdyż położenie obciążenia może wpływać dwójako – korzystnie i niekorzystnie na wyężenie konstrukcji, generując dodatkowe ramiona sił, zwiększające lub redukujące odkształcenia wywołane zjawiskiem zwichrzenia, oraz pozwalała m.in. na wymuszenie osi obrotu podczas wyboczenia. Porównując wyniki otrzymane dzięki omówionym metodom oraz uwzględniając korzyści płynące z wykorzystania MES w obliczeniach, można stwierdzić, iż oma-



Rys. 4. Przykład modelu dla belki swobodnie podpartej zbieżnej



Rys. 5. Model panelowo-prętowy użyty w programie Autodesk Robot Structural Analysis Professional

wiane wzory analityczne są dobrą podstawą weryfikacji wyników, a także pozwalają oszczędzać wyężenie konstrukcji.

Bibliografia

- [1] Mutermilch J., Jastrzębski P., Orłowski W.: Wytrzymałość materiałów. Warszawa, Arkady, 1974.
- [2] Rutecki J.: Cienkościennie konstrukcje nośne. Warszawa, PWN, 1966.
- [3] ENV 1993-1-1:1992 Eurocode 3. Design of steel structures. General rules and rules for buildings
- [4] Ahlén M., Westlund J., Lateral Torsional Buckling of I-beams, Göteborg 2013

Abstract. THEORETICAL AND NUMERICAL APPROACH TO BUCKLING ANALYSIS.

Subject of this article concerns bending stability of beam elements. Authors attempt to explain phenomenon of buckling in civil engineering with method of calculating buckling eigenvalues using commonly known analytical formulas and as alternative using FEM software. In engineering practice it is often required to specify critical value of bending moment for beam elements. In such situations analytical formulas are commonly taken under consideration. However, as far as this approach is relatively easy for simple models (e.g. simply supported beam), it is not obvious how to obtain correct results for more sophisticated boundary conditions and untypical trajectory of bending moments, as in these cases plain formulas are usually insufficient. Coming across these requirements, authors of following article present simple method, which gives satisfying results. The text is aimed to people who have basic strength-of-materials knowledge and was written in order to organize general information concerning theoretical and numerical approach to buckling analysis.

Keywords: lateral, torsion, buckling, stability, FEA