MINUT 2023 (5), s. 85–99
ISSN 2719-3063

Barbara BIŁY

Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Wartość najmniejsza i największa funkcji

Streszczenie. W pracy rozpatruje się zagadnienie znajdowania wartości największej i najmniejszej dla funkcji rzeczywistych jednej i wielu zmiennych rzeczywistych w zadanych obszarach. Dziedzinami funkcji w prezentowanych przykładach są głównie obszary domknięte, ale także obszary otwarte.

Słowa kluczowe: ekstremum lokalne, ekstremum globalne, hesjan.

1. Wartość najmniejsza i największa funkcji

Ekstremum lokalne — maksimum lub minimum — jest związane z punktami wewnętrznymi pewnego zbioru D, w którym zadana funkcja jest rozpatrywana. Oznacza to wartość największą lub najmniejszą spośród wartości funkcji dla pewnego sąsiedztwa punktu, w którym ekstremum jest osiągane. Natomiast maksimum lub minimum globalne to wartość największa lub najmniejsza spośród wszystkich wartości funkcji dla argumentów z pewnego obszaru D.

U podstaw znajdowania ekstremum globalnego tkwi twierdzenie Weierstrassa. W wersji ogólnej, dla funkcji wielu zmiennych mamy (zob. np. [7], s. 27):

Twierdzenie 1 (Weierstrassa o osiąganiu kresów). *Jeżeli funkcja $u = f(x_1, x_1, \ldots, x_n)$ jest ciągła w domkniętym i ograniczonym obszarze $D \subset \mathbb{R}^n$, to osiąga w tym obszarze wartość najmniejszą i największą, tzn. istnieją takie punkty $P_1, P_2 \in D$, że $f(P_1) \leqslant f(P)$ i $f(P_2) \geqslant f(P)$ dla każdego punktu $P \in D$.*

Szukamy ekstremum globalnego w punktach wewnątrz obszaru D, gdzie może być ekstremum lokalne, ale też na brzegu obszaru.

Autor korespondencyjny: B. Biły (barbara.bily@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 20.03.2023.

2. Ekstrema globalne funkcji jednej zmiennej

2.1. Przypadek funkcji jednej zmiennej w przedziale domkniętym

Zakładamy, że funkcja $y = f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$. Zastosujemy następujący algorytm:

1. Szukamy w przedziale (a, b) punktów krytycznych funkcji, a więc tych punktów $x \in (a, b)$, w których $f'(x) = 0$ lub w których pochodna $f'(x)$ nie istnieje. Wyznaczamy wartość funkcji f dla każdego punktu krytycznego x_i, bez sprawdzania, czy jest tam maksimum lub minimum lokalne.

2. Wyznaczamy wartości funkcji f na końcach przedziału $\langle a, b\rangle$, czyli $f(a)$ i $f(b)$.

3. Spośród wyznaczonych wartości $f(x_i)$, $f(a)$, $f(b)$ wybieramy liczbę najmniejszą i największą, które stanowią wartość najmniejszą i największą funkcji f w $\langle a, b\rangle$.

Przykład 1. Wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x) = x^3 - x$ w przedziale $\langle -1, 1\rangle$.

Rozwiązanie
Zaczynamy od obliczenia pochodnej: $f'(x) = 3x^2 - 1$.
Pochodna istnieje w każdym punkcie przedziału $\langle -1, 1\rangle$, więc punktami krytycznymi funkcji f są tylko punkty stacjonarne (o ile istnieją). Szukamy punktów stacjonarnych:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \left(x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \vee \quad x = \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Obliczamy wartości funkcji w punktach stacjonarnych:

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}, \qquad f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9},$$

oraz na końcach przedziału:

$$f(-1) = 0, \qquad f(1) = 0.$$

Zatem wartość najmniejsza funkcji f w przedziale $\langle -1, 1\rangle$ wynosi $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ i jest osiągana w punkcie $\frac{\sqrt{3}}{3}$, a wartość największa to $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ i jest osiągana w punkcie $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Przykład 2. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ w przedziale $\langle 1, e\rangle$. Należy wyznaczyć jej ekstrema globalne.

Rozwiązanie
Obliczamy pochodną funkcji:

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x = x(2\ln x + 1)\,.$$

Następnie:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(2\ln x + 1) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \left(x = 0 \quad \vee \quad \ln x = -\tfrac{1}{2}\right) \\ & \Leftrightarrow \quad \left(x = 0 \quad \vee \quad x = e^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{\sqrt{e}}\right). \end{aligned}$$

Ale
$$x = 0 \notin \langle 1, e\rangle \quad \wedge \quad x = \frac{1}{\sqrt{e}} \notin \langle 1, e\rangle\,.$$
Zatem punkty stacjonarne nie należą do zadanego przedziału.

Obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału:
$$f(1) = 0\,,\ f(e) = e^2 \cdot \ln e = e^2\,.$$
Czyli:

- wartość najmniejsza wynosi 0, jest osiągana w punkcie $x = 1$,
- wartość największa wynosi e^2, jest osiągana w punkcie $x = e$.

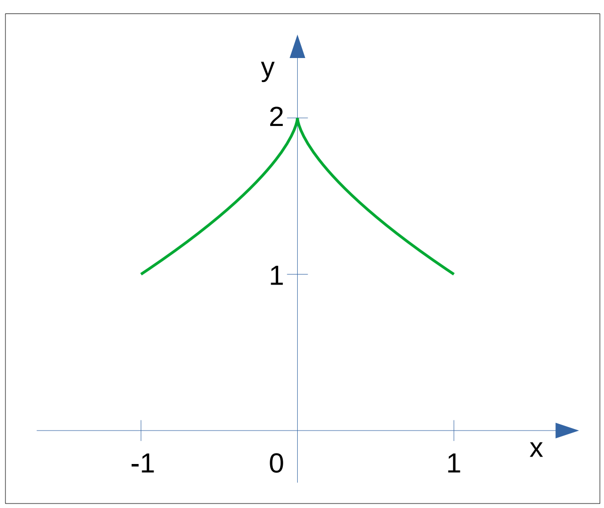
Przykład 3. Dana jest funkcja $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2}$ w przedziale $\langle -1, 1\rangle$. Szukamy ekstremum globalnego.

Rozwiązanie

Liczymy pochodną funkcji:
$$f'(x) = -(x^{\frac{2}{3}})' = -\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,.$$
Pochodna nie istnieje w punkcie $x = 0$, który należy do przedziału $\langle -1, 1\rangle$. Punktów, w których $f'(x) = 0$, nie ma.

Liczymy wartości funkcji w punktach $x = 0$, $x = -1$ i $x = 1$:
$$f(0) = 2,\ f(-1) = 2 - \sqrt[3]{(-1)^2} = 1,\ f(1) = 2 - \sqrt[3]{(1)^2} = 1.$$
Czyli:

- wartość najmniejsza to 1, jest osiągana w punktach brzegowych,
- wartość największa wynosi 2, jest osiągana w punkcie $x = 0$.



Rysunek 1. Wykres funkcji $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2}$ w przedziale $\langle -1, 1\rangle$

2.2. Przypadek funkcji jednej zmiennej w przedziale otwartym

Jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest określona w przedziale otwartym (a, b), gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, to zamiast wartości $f(a)$ i $f(b)$ obliczamy granice jednostronne:

$$\lim_{x\to a^+} f(x), \qquad \lim_{x\to b^-} f(x)$$

i porównujemy je z wartościami funkcji w punktach krytycznych x_i wewnątrz przedziału.

Zauważmy, że twierdzenie Weierstrassa mówi o funkcji ciągłej w zbiorze domkniętym i ograniczonym. Przedział (a, b) nie jest zbiorem domkniętym, więc może się zdarzyć, że funkcja ciągła określona w takim przedziale nie posiada ekstremów globalnych.

Przykład 4. Znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ w przedziale $(-1, 2)$.

Rozwiązanie

Liczymy pochodną funkcji:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x.$$

Szukamy punktów stacjonarnych:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x = 0 \vee x = 1)\ .$$

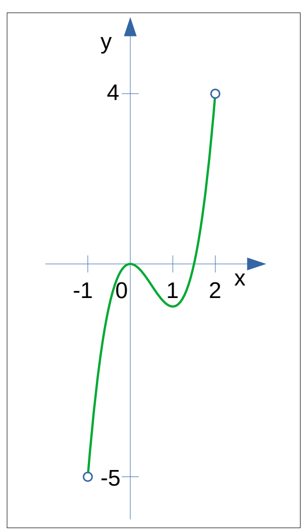
Wartości funkcji w tych punktach to:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = -1,$$

natomiast granice:

$$\lim_{x\to -1^+} (2x^3 - 3x^2) = -5, \qquad \lim_{x\to 2^-} (2x^3 - 3x^2) = 4\,.$$

Zatem funkcja nie osiąga wartości najmniejszej i największej w przedziale $(-1, 2)$.



Rysunek 2. Wykres funkcji $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ w przedziale $(-1, 2)$

Analogicznie postępujemy w przypadku przedziału nieskończonego. Należy tu zwrócić uwagę na przedział $(-\infty, +\infty)$, który jest zbiorem jednocześnie otwartym i domkniętym. Jest on także zbiorem nieograniczonym, więc do funkcji ciągłych i określonych w $\mathbb{R}$ nie można zastosować twierdzenia Weierstrassa.

Przykład 5. Znaleźć ekstrema globalne funkcji $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ w przedziale $(-\infty, +\infty)$.

Rozwiązanie

Pochodna:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

istnieje dla każdego $x \in (-\infty, +\infty)$. Szukamy punktów stacjonarnych:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0\,.$$

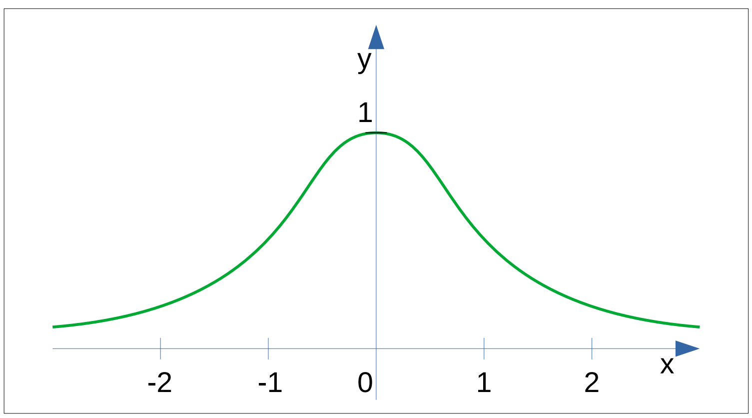
Liczymy wartość funkcji w punkcie 0 oraz granice na końcach dziedziny:

$$f(0) = 1\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \tfrac{1}{1+x^2} = 0\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{1}{1+x^2} = 0\,.$$

Funkcja osiąga maksimum globalne równe 1 w punkcie $x = 0$, nie osiąga wartości najmniejszej.



Rysunek 3. Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Przykład 6. Rozważmy funkcję $f(x) = \dfrac{3}{2-x}$ w przedziale $(0, 2)$. Sprawdźmy, czy ma ona ekstrema globalne.

Rozwiązanie

Liczymy pochodną: $f'(x) = \dfrac{3}{(2-x)^2}$. Z postaci pochodnej widać, że nie istnieje takie x, dla którego $f'(x) = 0$. Ponadto $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (0, 2)$, więc funkcja f jest rosnąca w tym przedziale.

Liczymy granice na końcach przedziału:

$$\lim_{x\to 2^-} \tfrac{3}{2-x} = +\infty\,,$$

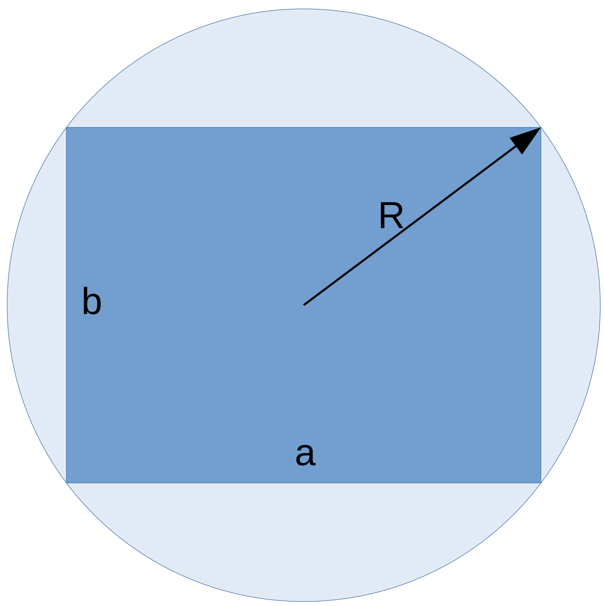
$$\lim_{x\to 0^+} \tfrac{3}{2-x} = \tfrac{3}{2}\,.$$

Zatem funkcja nie osiąga wartości najmniejszej ani największej w $(0,2)$.

Przykład 7. Który z prostokątów wpisanych w okrąg o ustalonym promieniu $R > 0$ ma największe pole?

Rozwiązanie

Pole prostokąta wpisanego w okrąg o promieniu R to $P = a \cdot b$, gdzie $a, b > 0$ i $a + b > 2R$.



Rysunek 4. Prostokąt wpisany w koło

Z twierdzenia Pitagorasa mamy $a^2 + b^2 = (2R)^2 = 4R^2$, stąd $b = \sqrt{4R^2 - a^2}$. Wyrażamy pole prostokąta jako funkcję długości jego boku a:

$$P = ab = a \cdot \sqrt{4R^2 - a^2} = P(a),\ \text{gdzie } a \in (0, 2R).$$

Pochodna tej funkcji:

$$P'(a) = \sqrt{4R^2 - a^2} + a \cdot \frac{-2a}{2\sqrt{4R^2 - a^2}} = \frac{4R^2 - a^2 - a^2}{\sqrt{4R^2 - a^2}} = \frac{4R^2 - 2a^2}{\sqrt{4R^2 - a^2}}\,.$$

Znajdujemy taką wartość a, dla której pochodna się zeruje:

$$P'(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4R^2 - 2a^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 2R^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{2} \cdot R \text{ (bo } a > 0)\,.$$

Możemy sprawdzić, czy w punkcie $a = \sqrt{2} \cdot R$ jest ekstremum lokalne. Badając znak $P'(a)$, mamy:

$$P'(a) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4R^2 - 2a^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < a < \sqrt{2} \cdot R$$

oraz

$$P'(a) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4R^2 - 2a^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > \sqrt{2} \cdot R\,.$$

Z warunku wystarczającego na ekstremum lokalne funkcji jednej zmiennej (zob. np. [2], s. 134) wynika, że w punkcie $a = \sqrt{2} \cdot R$ jest ekstremum lokalne i jest to maksimum.

W istocie rozpatrujemy jednak zadanie na odnalezienie wartości największej funkcji $P = P(a)$ w przedziale $(0, 2R)$. Liczymy granice na końcach dziedziny:

$$\lim_{a \to 0^+} P(a) = 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{a \to 2R^-} P(a) = 0.$$

Funkcja $P = P(a)$ jest ciągła, zatem maksimum globalne osiągane jest w punkcie $a = \sqrt{2} \cdot R$.

Liczymy

$$b = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = \sqrt{2R^2} = \sqrt{2} \cdot R.$$

Otrzymaliśmy $a = b$, czyli szukany prostokąt to kwadrat o boku $R\sqrt{2}$ i polu $P = 2R^2$.

3. Przypadek funkcji dwóch zmiennych

3.1. Przypadek obszaru domkniętego

Zakładamy, że funkcja $z = f(x, y)$ jest ciągła w obszarze domkniętym i ograniczonym D, czyli osiąga w tym obszarze wartość najmniejszą i największą. Dla ich wyznaczenia postępujemy analogicznie jak dla funkcji jednej zmiennej (zob. np. [5]).

1. Szukamy wewnątrz obszaru D punktów krytycznych funkcji f, a więc tych punktów (x_0, y_0), w których jednocześnie zerują się obie pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} = 0$, lub w których obie pochodne cząstkowe nie istnieją, lub jedna nie istnieje a druga się zeruje w punkcie (x_0, y_0). W punktach tych funkcja może, ale nie musi, mieć maksimum lub minimum lokalne (jednak tego na ogół nie sprawdzamy).

2. Obliczamy wartości funkcji f w każdym z tych punktów krytycznych.

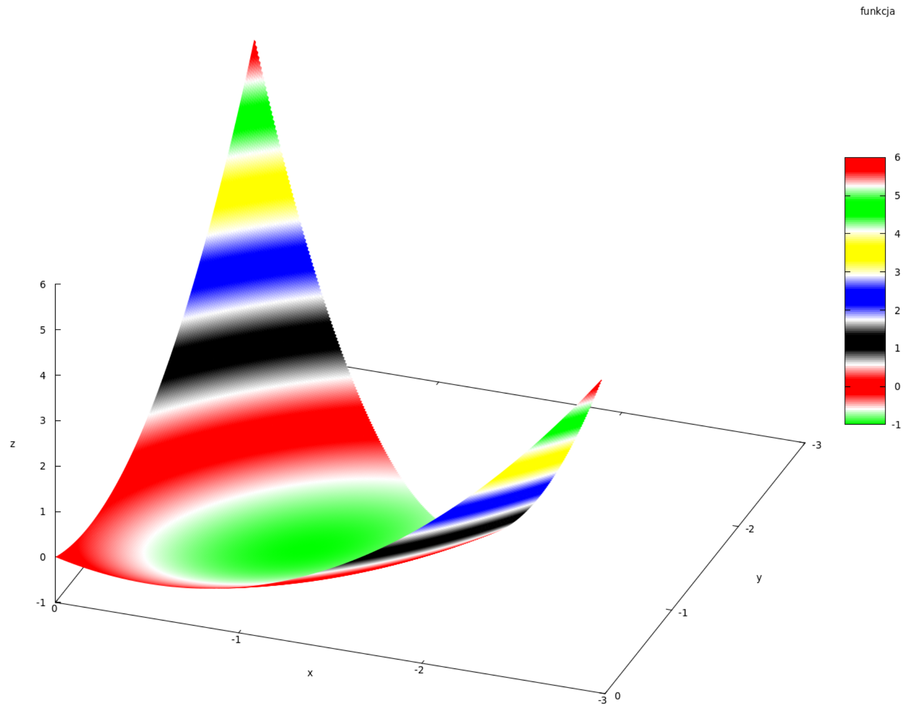
3. Wyznaczamy najmniejszą i największą wartość funkcji f na brzegu obszaru D.

4. Spośród wyznaczonych wartości funkcji w punktach wewnątrz i na brzegu obszaru wybieramy liczbę najmniejszą i największą, która stanowi odpowiednio wartość najmniejszą i największą funkcji f w obszarze D.

Przykład 8. Wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

w obszarze $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leqslant 0, y \leqslant 0, x + y \geqslant -3\}$ (zob. [6], s. 393).



Rysunek 5. Wykres funkcji $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$

Rozwiązanie

Zadany obszar jest trójkątem domkniętym. Obliczamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 1\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x + 1\,.$$

Następnie znajdujemy punkty stacjonarne leżące wewnątrz obszaru D, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0. \end{cases}$$

Z powyższego układu dostajemy jedyny punkt stacjonarny $P_0(-1,-1)$, który leży w zadanym obszarze. Nie sprawdzamy, czy jest tam ekstremum lokalne, ale liczymy wartość funkcji w tym punkcie: $f(P_0) = f(-1,-1) = -1$.

Następnie badamy funkcję na brzegu obszaru. Dla $x = 0$ mamy

$$f(0,y) = y^2 + y = h(y) \text{ i } y \in \langle -3, 0\rangle.$$

Zadanie sprowadza się do znalezienia wartości najmniejszej i największej funkcji h, która jest funkcją jednej zmiennej y. Szukamy punktu stacjonarnego:

$$h'(y) = 2y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}.$$

Liczymy $f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ i porównujemy z wartościami na brzegu odcinka: $f(0, -3) = 6$ i $f(0, 0) = 0$.

Analogicznie postępujemy w przypadku $y = 0$, $x \in \langle -3, 0\rangle$. Otrzymujemy funkcję g jednej zmiennej x:

$$f(x, 0) = x^2 + x = g(x).$$

Szukamy jej punktów stacjonarnych:

$$g'(x) = 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

i liczymy $f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}\,, \quad f(-3, 0) = 6\,.$

Ostatni bok trójkąta opisany jest równaniem $x+y = -3$, stąd $y = -3-x$. Podstawiając to wyrażenie za y do wzoru na $f(x, y)$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x, -3-x) = \\ &= x^2 + (-3-x)^2 - x(-3-x) + x - 3 - x = \\ &= 3x^2 + 9x + 6 = t(x). \end{aligned}$$

Dalej:

$$t'(x) = 6x + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{3}{2}\,.$$

Stąd

$$y = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}\,.$$

Liczymy $f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$. Punkty brzegowe już zostały przeanalizowane.

Spośród wszystkich policzonych wartości wybieramy wartość największą i najmniejszą i mamy odpowiedź: wartość najmniejsza funkcji f w obszarze D wynosi -1 i jest osiągana w punkcie $(-1, 1)$, a wartość największa wynosi 6 i jest osiągana w punktach $(0, -3)$ oraz $(-3, 0)$.

3.2. Przypadek obszaru otwartego

Funkcja ciągła w obszarze otwartym D nie musi przyjmować w tym obszarze ani wartości najmniejszej, ani największej.

Przykład 9. Wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2$ w obszarze $D = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x^2 + y^2 < 1\ \}$.

Rozwiązanie

Dla każdego punktu $(x, y) \in D$ zachodzi nierówność:

$$0 < f(x, y) < 1$$

Obliczamy granice:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0,$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = 1,$$

dla każdego punktu (x_0, y_0) leżącego na brzegu, czyli $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

Wartości tych granic oznaczają, że wartości funkcji w obszarze D mogą być dowolnie bliskie 0, jak i bliskie 1. Ale ekstremum globalnego funkcja ta w obszarze D nie osiąga.

Przykład 10. Wyznaczyć ekstremum globalne funkcji $f(x,y) = 3x \cdot e^y - x^3 - e^{3y}$ w obszarze $D = \mathbb{R}^2$ (zob. [4]).

Rozwiązanie
Liczymy pochodne cząstkowe rzędu pierwszego:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3e^y - 3x^2\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3xe^y - 3e^{3y}\,.$$

Szukamy punktów stacjonarnych, będących rozwiązaniami układu równań:

$$\begin{cases} 3e^y - 3x^2 = 0 \\ 3xe^y - 3e^{3y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y = x^2 \\ xe^y = e^{3y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y = x^2 \\ x \cdot x^2 = (x^2)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y = x^2 \\ x^3(1-x^3) = 0 \end{cases}.$$

Dwa pierwiastki ostatniego z równań to $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$. Pierwszy z nich zostaje odrzucony, gdyż nie odpowiada mu żadna wartość y ($e^y \neq 0$ dla każdego $y \in \mathbb{R}$). Drugiej wartości $x_2 = 1$ odpowiada wartość $y = 0$, gdyż spełnia ona warunek $e^y = x^2$.

Zatem jedynym punktem stacjonarnym jest $P_0(1,0)$. Liczymy pochodne cząstkowe rzędu 2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 3xe^y - 9e^{3y}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3e^y\,.$$

Dla zbadania ekstremum lokalnego tworzymy macierz Hessego (zob. [1], s. 6):

$$\mathbf{H}_f(x,y) = \begin{bmatrix} -6x & 3e^y \\ 3e^y & 3xe^y - 9e^{3y} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H}_f(1,0) = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Minory tej macierzy wynoszą:

$$M_1 = -6 < 0, \quad M_2 = 27 \;>\; 0\,.$$

Zatem macierz $H_f(1,0)$ jest ujemnie określona, więc w $P_0(1,0)$ jest maksimum lokalne. Wartość ekstremum to $f_{\max} = f(1,0) = 3$.

Niestety, w punkcie P_0 funkcja nie przyjmuje wartości największej w całej dziedzinie $\mathbb{R}^2$. Przykładowo, licząc granice funkcji np. przy ustalonym $y = 1$, mamy $f(x,1) = 3xe - x^3 - e^3$, skąd otrzymujemy:

$$\lim_{x \to -\infty} (3xe - x^3 - e^3) = \lim_{x \to -\infty} (x(3e - x^2) - e^3) = +\infty.$$

Oznacza to, że funkcja przyjmuje w $\mathbb{R}^2$ dowolnie duże wartości, czyli nie osiąga w $\mathbb{R}^2$ wartości największej. Ponadto

$$\lim_{x \to +\infty} (3xe - x^3 - e^3) = -\infty\,,$$

czyli funkcja nie osiąga też w $\mathbb{R}^2$ wartości najmniejszej.

4. Funkcje trzech zmiennych

W przypadku funkcji trzech zmiennych $u = f(x, y, z)$ brzegiem obszaru jest na ogół powierzchnia lub pewna liczba powierzchni w $\mathbb{R}^3$. Na takiej powierzchni zmienne x, y, z zależą od dwóch parametrów i znalezienie największej lub najmniejszej wartości funkcji na brzegu okaże się prostszym zadaniem.

Przykład 11. Znaleźć największą wartość iloczynu:

$$u = xyzt$$

nieujemnych liczb x, y, z, t, których suma ma stałą wartość:

$$x + y + z + t = 4c \qquad (c > 0)$$

(zob. [3], s. 378).

Rozwiązanie
Z warunku równościowego wyznaczamy $t = 4c - x - y - z$ i wstawiając do wzoru na u, mamy:

$$u = xyx(4c - x - y - z),$$

czyli funkcję trzech zmiennych x, y, z w obszarze trójwymiarowym,

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0, \quad x + y + z \leqslant 4c\}.$$

Obszar ten jest czworościanem, leżącym w I oktancie układu współrzędnych, ograniczonym płaszczyznami:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 4c.$$

Liczymy pochodne cząstkowe rzędu 1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= yz(4c - x - y - z) + xyz \cdot (-1) = yz(4c - 2x - y - z) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= xz(4c - x - 2y - z) \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= xy(4c - x - y - 2z) \end{aligned}$$

i przyrównujemy je do zera:

$$\begin{cases} yz(4c - 2x - y - z) = 0 \\ xz(4c - x - 2y - z) = 0 \\ xy(4c - x - y - 2z) = 0\,. \end{cases}$$

Jedyny punkt stacjonarny, leżący wewnątrz czworościanu, to $x = y = z = c$, stąd $t = c$. Wartość funkcji w tym punkcie wynosi:

$$u = u(c, c, c) = c^4.$$

Na brzegu obszaru funkcja u przyjmuje wartość 0, zatem w znalezionym punkcie (c, c, c, c) funkcja przyjmie wartość największą, równą c^4.

Przykład 12. Znaleźć najmniejszą wartość sumy $u = x + y + z + t$ dodatnich liczb x, y, z, t, których iloczyn ma stałą wartość:

$$xyzt = c^4$$

dla ustalonego $c > 0$ (zob. [3], s. 379).

Rozwiązanie

Po zastosowaniu podstawienia $t = \frac{c^4}{xyz}$, funkcja u staje się funkcją trzech zmiennych:

$$u = u(x, y, z) = x + y + z + \frac{c^4}{xyz}\,.$$

Szukamy wartości najmniejszej tej funkcji w obszarze określonym nierównościami: $x > 0, y > 0, z > 0$, zatem w obszarze otwartym i nieograniczonym. Jeżeli ta wartość jest osiągana w punkcie wewnętrznym obszaru, to musi on należeć do punktów stacjonarnych, które spełniają warunki:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \frac{c^4}{x^2yz} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 1 - \frac{c^4}{xy^2z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 1 - \frac{c^4}{xyz^2} = 0. \end{cases}$$

Z powyższego układu równań otrzymujemy $x = y = z = c$ (więc także $t = c$), czyli $u = 4c$.

Sprawdźmy, czy w punkcie $P_0(c, c, c)$ znajduje się ekstremum lokalne. Wyznaczamy pochodne cząstkowe rzędu 2:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2c^4}{x^3yz}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{c^4}{x^2y^2z},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2c^4}{xy^3z}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{c^4}{x^2yz^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2c^4}{xyz^3}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = \frac{c^4}{xy^2z^2}.$$

Macierz Hessego w punkcie P_0 ma postać:

$$\mathbf{H}_u(c, c, c) = \begin{bmatrix} \frac{2}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} & \frac{2}{c} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{2}{c} \end{bmatrix}.$$

Minory tej macierzy wynoszą:

$$M_1 = \frac{2}{c} > 0, \quad M_2 = \frac{3}{c^2} > 0, \quad M_3 = \frac{4}{c^3} > 0.$$

Macierz Hessego w punkcie P_0 jest dodatnio określona, zatem funkcja u osiąga w P_0 minimum lokalne, równe $4c$. Czy wartość w punkcie P_0 jest najmniejsza w całym zadanym obszarze? Przy zbliżaniu się do płaszczyzn $x = 0, y = 0$ lub $z = 0$ wartości funkcji rosną nieograniczenie, podobnie jak przy oddalaniu się wszystkich zmiennych do nieskończoności. Sugeruje to wystąpienie w P_0 minimum wartości funkcji.

Idea dowodu powyższego przypuszczenia polega na wskazaniu takiego obszaru domkniętego, będącego podzbiorem dziedziny funkcji, na brzegu którego wartość funkcji byłaby większa od dowolnej liczby

$K > c^4$. Takim obszarem mógłby być na przykład sześcian, którego wierzchołki miałyby współrzędne:

$$(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon),\ (\varepsilon,\varepsilon,E),\ (\varepsilon,E,\varepsilon,),\ (\varepsilon,E,E),\ (E,\varepsilon,\varepsilon),\ (E,\varepsilon,E),\ (E,E,\varepsilon,),\ (E,E,E),$$

gdzie $0 < \epsilon < c < E < +\infty$. Dowód należałoby przeprowadzić dla każdej z sześciu ścian sześcianu, lecz w tym przypadku, ze względu na symetrię zagadnienia, wystarczy ograniczyć się dla dowolnych dwóch przeciwległych ścian. Niech będą to ściany, dla których znana jest wartość $z = H$. Mamy:

$$u_H = u(x,y,H) = u_H(x,y) = x + y + H + \frac{c^4}{xyH} \qquad \text{dla } H > 0\,.$$

Niech:

$$D_H = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, 0 < y\big\}\,.$$

Badamy przebieg zmienności tak określonej funkcji u_H. Pochodne cząstkowe tej funkcji to:

$$\frac{\partial u_H}{\partial x} = 1 - \frac{c^4}{Hx^2y}\,,$$

$$\frac{\partial u_H}{\partial y} = 1 - \frac{c^4}{Hxy^2}\,.$$

Ekstremum tej funkcji znajdujemy, rozwiązując układ równań powstały z przyrównania pochodnych cząstkowych do 0. Jedynym należącym do dziedziny rozwiązaniem tego układu jest punkt:

$$P_H(x_H, y_H) = \left(\sqrt[3]{\frac{c^4}{H}},\quad \sqrt[3]{\frac{c^4}{H}}\right),$$

w którym funkcja u_H osiąga wartość:

$$u_H(x_H, y_H) = H + 3\sqrt[3]{\frac{c^4}{H}}$$

i jest to minimum.

Na podstawie powyższego wzoru można wyznaczyć takie dwie skończone i dodatnie wartości ε i E, które dla dowolnie dużego K będą spełniały warunek:

$$\varepsilon + 3\sqrt[3]{\frac{c^4}{\varepsilon}} \geqslant K \quad \vee \quad E + 3\sqrt[3]{\frac{c^4}{E}} \geqslant K\,.$$

Analogiczne rozważania obowiązują również dla zmiennych x i y funkcji u. Powyższe wartości ϵ i E będą określały położenie poszukiwanego sześcianu, stanowiącego domkniętą dziedzinę dla funkcji u.

Ponieważ w sześcianie, jako w domkniętym i ograniczonym obszarze, funkcja ciągła u powinna mieć najmniejszą wartość, widać więc, że wartość ta jest osiągana w znalezionym wyżej punkcie (c,c,c) i jest ona najmniejsza również dla całego początkowego obszaru.

5. Zadania i odpowiedzi

Zadanie 1. Wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji jednej zmiennej:

a) $f(x) = 5 + 2x^2 - x^4$ w przedziale $\langle -2, 2\rangle$,

b) $f(x) = x - 2\ln x$ w przedziale $\langle 1, e\rangle$,

c) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$ w przedziale $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$,

d) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x^2)$ w $\mathbb{R}$.

Zadanie 2. Rozwiązać zadania z treścią.

a) Jaki prostokąt o obwodzie równym 1 ma największe pole?

b) Liczbę 8 przedstawić jako sumę takich dwóch składników, żeby suma ich sześcianów była najmniejsza.

c) Jaka liczba dodatnia zsumowana ze swoją odwrotnością ma najmniejszą wartość?

d) Liczbę 36 rozłożyć na takie dwa czynniki, żeby suma ich kwadratów była najmniejsza.

Zadanie 3. Wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji dwóch zmiennych:

a) $z = x^2 - y^2$ w obszarze $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant 1\}$,

b) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ w obszarze $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leqslant x \leqslant \pi/2 \ \wedge\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2\}$,

c) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ w obszarze $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leqslant x \leqslant 2 \ \wedge\ -1 \leqslant y \leqslant 2\}$,

d) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ w prostokącie, którego boki znajdują się na prostych $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$.

Odpowiedź 1.

a) maksimum globalne: $f(-1) = f(1) = 6$, minimum globalne: $f(-2) = f(2) = -3$,

b) maksimum globalne: $f(1) = 1$, minimum globalne: $f(2) = 2(1 - \ln 2)$,

c) maksimum globalne: $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{2}$, minimum globalne: $f(0) = f(\dfrac{\pi}{2}) = 1$,

d) maksimum globalne nie istnieje, minimum globalne: $f(0) = 0$.

Odpowiedź 2.

a) Kwadrat o boku $\frac{1}{4}$. **b)** $8 = 4 + 4$. **c)** 1. **d)** $36 = 6 \cdot 6$.

Odpowiedź 3.

a) maksimum globalne: $z(1, 0) = z(-1, 0) = 1$, minimum globalne: $z(0, 1) = z(0, -1) = -1$,

b) maksimum globalne: $z\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, minimum globalne: $z(0, 0) = 0$,

c) maksimum globalne: $z(2, -1) = 13$, minimum globalne: $z(1, 1) = z(0, -1) = -1$,

d) maksimum globalne: $z(1, 2) = 17$, minimum globalne: $z(1, 0) = -3$.

Podziękowania

Autorka chce podziękować recenzentom za wnikliwą analizę artykułu, cenne uwagi i wszelką pomoc przy jego redakcji.

Literatura

1. B. Biły, *Ekstremum funkcji wielu zmiennych*, MINUT 2023(5), s.1–16, https://minut.polsl.pl/articles/B-22-007.pdf (dostęp 2023-06-06).
2. G. Decewicz, W. Żakowski, *Matematyka część I*, WNT, Warszawa 1991.
3. G.M. Fichtenholtz, *Rachunek różniczkowy i całkowy, t.1*, PWN, Warszawa 1976.
4. P. Kajetanowicz, *Wartości największe i najmniejsze funkcji 2 zmiennych w obszarze*, https://prac.im.pwr.edu.pl/~kajetano/AM2/fun2var/fun2var_8.htm (dostęp 2023-06-06).
5. A. Kisielewicz, *Najmniejsza i największa wartość funkcji dwóch zmiennych* https://www.math.uni.wroc.pl/~kisiel/wyklad9.pdf (dostęp 2023-06-06).
6. J. Piszczała, M. Piszczała, B. Wojcieszyn, *Matematyka w zadaniach*, PWN, Warszawa 1981.
7. W. Żakowski, W. Kołodziej, *Matematyka część II*, WNT, Warszawa 1993.