

Fermionowe dywany kwantowe

Piotr T. Grochowski*

Centrum Fizyki Teoretycznej Polskiej Akademii Nauk

Streszczenie. Przestrzenna okresowość występująca w układach fizycznych wykazujących zachowania falowe znana była już na początku XIX wieku, kiedy Henry Fox Talbot odkrył zapomniany na wiele lat efekt, nazywany dziś jego imieniem, który doczekał się drugiej młodości wraz z nastaniem mechaniki kwantowej. W jej ramach interferencja fal materii przynosi powtarzalność, tym razem w w czasie, doprowadzając do tzw. kwantowych odrodzeń. Odkrycie tego zjawiska, niespotykanego w fizyce klasycznej, zapoczątkowało szereg badań, których jednym z owoców są dywany kwantowe. Są to czasoprzestrzenne struktury wyłaniające się z analizy gęstości prawdopodobieństwa cząstki kwantowej. Okazuje się, że gdy rozważyć te struktury w układzie kwantowym wielu ciał, stają się one jeszcze wyraźniejsze i zaczynają przypominać znane z nieliniowej fizyki solitony.

Słowa kluczowe: mechanika kwantowa, ultrazimne gazy atomowe, dywany kwantowe, kwantowe odrodzenia

Abstract. Spatial periodicity in physical systems that manifest wave properties has been known since the early 1800s, when Henry Fox Talbot discovered the effect now bearing his name. Forgotten for many years, it has been rejuvenated with the advent of quantum mechanics. Within the quantum paradigm, interference between matter waves gives rise to similar periodicity, however in time domain, resulting in so called quantum revivals. Exploration of this phenomenon, absent in classical physics, initiated many studies, among which quantum carpets are one of the most striking examples. They are spatiotemporal structures which appear in the analysis of probability density of a single quantum particle. Moreover, if one considers them in the many body system, they become sharper, starting to resemble solitons known from nonlinear physics.

Keywords: quantum mechanics, ultracold atomic gases, quantum carpets, quantum revivals

Efekt Talbota

Od czasu ukształtowania się konsensusu naukowego w sprawie falowej natury światła na początku XIX wieku, doświadczenia wykorzystujące dyfrakcję światła zaczęły stanowić jeden z najchętniej wybieranych kierunków badań. Wraz ze stopniowym polepszaniem się technik eksperymentalnych, w tym wykorzystaniem zaawansowanych przyrządów optycznych, obrazy dyfrakcyjne mogły być analizowane w coraz to subtelniejszy sposób. W roku 1836 Henry Fox Talbot [1], angielski prekursor nowoczesnej fotografii, opublikował wyniki doświadczeń z siatką dyfrakcyjną, które wcześniej przeprowadził podczas spotkania British Association for the Advancement of Science (Brytyjskiego Stowarzyszenia Uczonych) w Bristolu.

It was very curious to observe that though the grating was greatly out of the focus of the lens, yet the appearance of the bands was perfectly distinct and well defined. (...) which can be compared to nothing so well as to tissues woven with threads of various colours. (...) They seem to

*vary ad infinitum, and in whatever position the plate is placed, they appear always as distinct as if they were in the focus of the lens.*¹

H. F. Talbot, Philos. Mag. 9, 401 (1836)

Talbot oświetlał wiązką promieni słonecznych skonstruowaną dekadę wcześniej przez Fraunhofera siatkę dyfrakcyjną – układ równoległych i równo odległych drutów, które pozwalają na rozdzielenie padającego nań światła na wiązki, które następnie interferują ze sobą. Obserwowana przez lupę z bliskiej odległości siatka była, zgodnie z przewidywaniami, widoczna ostro. Przy zwiększaniu dystansu w taki sposób, że siatka już nie znajdowała się w ognisku soczewki, co powinno powodować rozmycie obrazu, dostrzegane struktury pozo-

1. Niezwykle interesującą zdała mi się obserwacja, że pomimo iż siatka była z dala od ogniska soczewki, struktury pozostawały wyraźne i dobrze rozróżnialne (...) mogły być porównane chyba jedynie do tkaniny uplecionej za pomocą różnokolorowych nici (...) Zdawały się rozciągać bez końca i niezależnie w którym miejscu umieszczony był ekran, pozostawały tak wyraźne, jakby były w ognisku soczewki (tłum. autor artykułu).

*ORCID: 0000-0002-9654-4824

stawały wyraźne. Ponadto, obraz był na przemian czerwony i zielony, wykazując swoistą powtarzalność na przestrzeni kilku metrów. Talbot powtórzył doświadczenie także dla światła monochromatycznego. Okazało się, że obraz siatki dyfrakcyjnej wraz ze zwiększaniem odległości pozostawał rozmyty, tak jak powinien. Stawał się jednak bardzo wyraźny w miejscach będących wielokrotnościami pewnego dystansu, zwanego dziś odległością Talbota.

Efekt Talbota, czyli powtarzające się w przestrzeni ostre odwzorowania siatki dyfrakcyjnej, został zapomniany na następne 50 lat, aż do czasów lorda Rayleigha i jego pracy z 1881 roku [2]. Pokazał on ściśle, w jaki sposób odległość Talbota zależy od dystansu pomiędzy szczelinami i długości padającej fali. Zaproponował także wykorzystanie efektu Talbota do konstruowania kopii siatek dyfrakcyjnych, jednakże przez następne stulecie zjawisko to było uważane jedynie za optyczną ciekawostkę.

Co więc sprawiło, że naukowcy przypomnieli sobie o tym efekcie? Wykorzystuje on bardzo spójną interferencję fal, która przez wiele lat stanowiła standardowo badane zjawisko w ramach optyki i innych teorii opisywanych równaniem falowym. Jednakże początek XX wieku był świadkiem narodzin nowej, przełomowej teorii opartej na tymże równaniu, która odnosi się do falowej natury nie tylko światła, ale też samej materii. Analizując matematyczną strukturę efektu Talbota, nie jest zaskoczeniem, że istnieje jego kwantowomechaniczny odpowiednik.

Kwantowe odrodzenia – *quantum revivals*

W fizyce klasycznej cząstki opisywane są za pomocą punktów, które poruszają się po dobrze zdefiniowanych trajektoriach. Stoi to w znacznym kontraście do opisu znanego z mechaniki kwantowej, w której cząstka jest reprezentowana przez zlokalizowaną przestrzennie, ale jednak rozmytą funkcję falową. Kwadrat modułu tej funkcji, obliczony w danym punkcie przestrzeni, interpretowany jest następnie jako prawdopodobieństwo tego, czy pomiar w tym właśnie punkcie wykaże obecność cząstki. Już u samych początków mechaniki kwantowej, naukowcy zastanawiali się, czy ewolucja tak zlokalizowanych rozkładów prawdopodobieństwa (czyli paczek falowych) może odbywać się w sposób klasyczny, tj. po klasycznej trajektorii. Mieli nadzieję, że tak właśnie będzie, co pozwoliłoby na znalezienie pomostu pomiędzy fizyką klasyczną a kwantową. W jednej z wczesnych prac Schrödinger pisał [3]

Es läßt sich mit Bestimmtheit voraussehen, daß man auf ganz ähnliche Weise auch die Wellengruppen konstruieren kann, welche auf hochquantigen Keplerellipsen

*umlaufen und das undulationsmechanische Bild des Wasserstoffelektrons stud.*²

E. Schrödinger, Naturwissenschaften 14, 664 (1926)

Miał nadzieję, że opisywane przez jego równanie pakiety falowe będą zachowywały swój kształt podczas poruszania się po skwantowanych, wysokich orbitach, na podobieństwo klasycznych elektronów obiegających jądro atomowe po keplerowskich trajektoriach. Jednak wyniki teoretyczne szybko pokazały, że naturalnym zjawiskiem dla tego typu problemu kwantowego jest rozmywanie się paczki falowej, czyli poszerzanie w trakcie ewolucji w czasie. Faktycznie, zlokalizowana funkcja falowa, umieszczona na orbicie odpowiadającej klasycznemu elektronowi, rozmywa się na całą trajektorię, wypełniając ją w sposób prawie jednorodny, zgodnie z twierdzeniem Liouville'a. Kwantowe obiekty, które poruszają się po klasycznych orbitach, wytworzono i zrealizowano doświadczalnie dopiero wiele lat później, wraz z wytworzeniem tzw. atomów Rydberga.

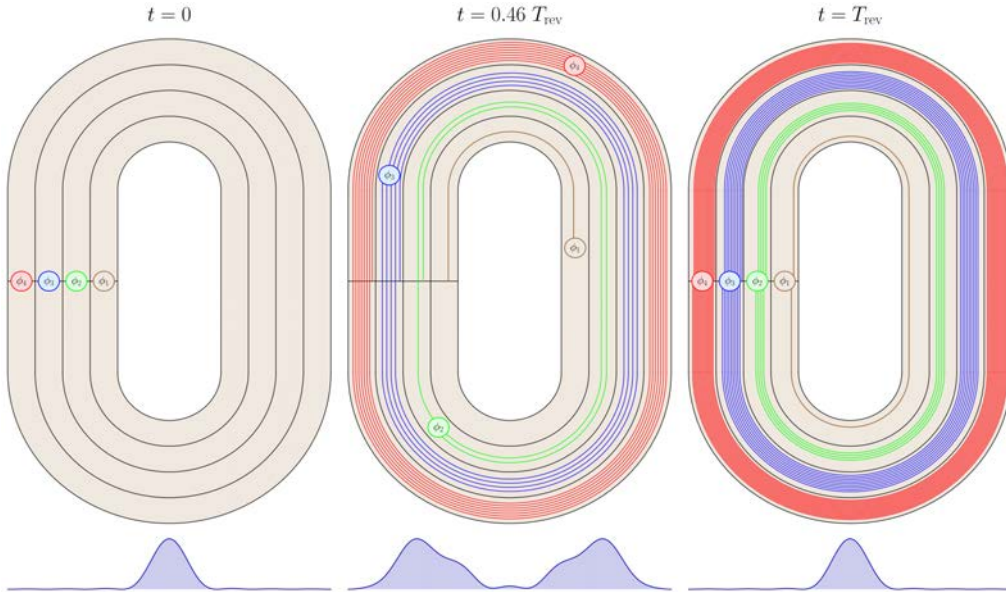
Okazuje się jednak, że wyżej opisany problem ewolucji paczki falowej posiada swoistego rodzaju zwrot akcji – jeśliby czekać wystarczająco długo, z jednorodnego rozkładu prawdopodobieństwa zacznie wyłaniać się bardzo szeroki kształt, który po pewnym czasie „ściśnie się”, odtwarzając prawie idealnie stan początkowy. Taki powrót do sytuacji startowej nazywamy kwantowym odrodzeniem (lub kwantowym ożywieniem – ang. *quantum revival*), a czas po którym to następuje – czasem odrodzenia T_{rev} [4]. Nasuwa się od razu skojarzenie z efektem Talbota, jednakże zamiast powtarzających się w przestrzeni obrazów siatki dyfrakcyjnej dostajemy powtarzające się w czasie obrazy stanu początkowego.

Przykład ewolucji początkowo zlokalizowanej paczki falowej wokół jądra atomowego stanowi jeden z wielu modeli, w których występuje kwantowe odrodzenie. Nie trzeba jednak rozważać skomplikowanych sytuacji, aby zrozumieć sedno takiego zachowania – już elementarny przykład cząstki kwantowej w nieskończonej studni potencjału wykazuje ten efekt. Rozważmy więc stan początkowy cząstki w pudle o szerokości $L = 1$ będący superpozycją czterech stanów własnych studni:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^4 a_n \phi_n(x).$$

Używamy jednostek, w których masa cząstki $m=1$, a także stała Diraca $\hbar = 1$. Indeks n , przebiegający od 1 do 4, numeruje cztery najniższe symetryczne stany

2. Można z całą pewnością przewidzieć, że możliwym jest skonstruowanie pakietów falowych, które krążą po wysoko skwantowanych orbitach keplerowskich i są wyrażone przez rozwiązania elektronowe w atomie wodoru; (tłum. autor artykułu).



Rys. 1. Ewolucja pełnego stanu kwantowego będącego superpozycją stanów własnych pudła jest zadana przez zmianę w czasie relatywnych wag pomiędzy składnikami tej superpozycji. Jednym z popularnych przedstawięń ich ewolucji jest porównanie do wyścigu biegaczy – każde pełne okrążenie to powrót do początkowej wartości wagi dla danego składnika. Każdy ze składników, czyli stanów własnych, jest reprezentowany przez biegacza poruszającego się z różną prędkością – ϕ_1 jest najwolniejszy, pokonując jeden stadion szesnaście razy wolniej niż ϕ_4 . W chwili początkowej wszyscy zawodnicy są na mecie, a odpowiadni stan kwantowy jest zlokalizowany, co widać na pierwszej od lewej części rysunku. W dowolnej chwili czasu, przedstawionej w środkowej części, biegacze nie są już ustawieni w linii, a odpowiednia funkcja falowa przyjmuje skomplikowany kształt. Okazuje się, że po pewnym czasie, tzw. czasie odrodzenia, kiedy wszyscy zawodnicy znów znajdują się w pozycjach startowych, kształt początkowy funkcji falowej zostaje odtworzony sygnalizując kwantowe odrodzenie

własne. Współczynniki a_n , czyli wagi, z którymi każdy stan własny wchodzi do superpozycji, zostały tak dobrane, aby stan układu był zlokalizowany (rys. 1) w chwili początkowej. Ewolucja w czasie takiej paczki falowej jest dana przez dopisanie do każdego elementu sumy czynnika eksponencjalnego, zależnego od energii stanu własnego ϕ_n :

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^4 a_n \phi_n(x) e^{-i2n^2\pi^2 t}.$$

Na pierwszy rzut oka widać, że względne wagi kolejnych stanów własnych zmieniają się w czasie, co powoduje, że kwadrat modułu funkcji falowej, $|\psi(x, t)|^2$, ewoluuje w nieoczywisty sposób. Aby zilustrować tę zmianę, posłużymy się przykładem biegaczy poruszających się po bieżni z różnymi prędkościami (rys. 1), danymi przez wykładniki funkcji eksponencjalnych mnożących początkowe wagi. Jedno pełne okrążenie odpowiadać będzie zmianie wykładnika o wartość 2π , co dla danego stanu własnego oznacza powrót do początkowej wagi, jako że $e^{i2\pi}=1$. I tak, pierwszy stan własny ϕ_1 jest najwolniejszy – podczas jego jednego okrążenia, drugi stan ϕ_2 , który jest czterokrotnie szybszy, cztery razy obiegnie stadion, stan ϕ_3 – dziewięć razy, a ϕ_4 – szesnaście.

W danej chwili stan całego układu może być opisany przez położenia biegaczy na bieżni. W chwili początkowej wszyscy znajdują się na linii startu, a gdy czas zaczyna płynąć a biegacze zaczynają obiegać stadion, to przestają być ustawieni w tej samej linii. Ich „roz-

rzucenie” po stadionie obrazuje właśnie kwantomechaniczne rozplątanie się początkowo zlokalizowanej paczki falowej. Kolejne stany własne wchodzi do superpozycji z praktycznie losowymi wagami, co wyraża się stanem paczki falowej zupełnie odmiennym od startowego. Łatwo zauważyć skąd się bierze kwantowe odrodzenie – w naszym przykładzie jest to równoczesny powrót wszystkich zawodników na metę, czyli odtworzenie początkowego układu wag w superpozycji.

Od razu widać też, jak ważna jest współmierność prędkości poszczególnych biegaczy – gdyby tak nie było, tj. gdyby były one równe na przykład $1, \sqrt{10}, \pi^2, 10\sqrt{2}$ zamiast $1, 4, 9, 16$, to pełnego kwantowego odrodzenia byśmy nie zaobserwowali – biegacze nigdy nie spotkaliby się z powrotem na linii mety. Przykład kwantowego pudła jest bardzo specyficzny – wartości energii kolejnych stanów własnych są dane przez kwadraty kolejnych liczb naturalnych, więc współmierność jest zapewniona. Innym elementarnym przykładem pełnego kwantowego odrodzenia, jest kwantowy oscylator harmoniczny, w którym energie kolejnych stanów własnych są proporcjonalne do liczb całkowitych.

W przyrodzie rzadko zdarzają się tak wyidealizowane układy, a widmo energetyczne potrafi być bardzo skomplikowane. Warto jednak zauważyć, że nawet jeśli kolejne energie stanów własnych nie są idealnie współmierne, to kwantowe odrodzenie może zajść, chociaż w sposób niedoskonały. Nic więc dziwnego, że przez lata zjawisko to pozostawało niezauważone w bardziej skom-

plikowanych układach. Dopiero w latach 70. XX w. Joe Eberly razem ze współpracownikami pokazali, że kwantowe odrodzenie pojawia się w powszechnie używanym w fizyce atomowej modelu Jaynesa-Cummingsa³ [5].

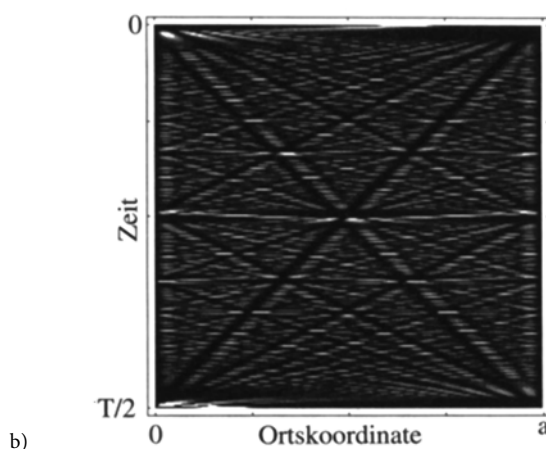
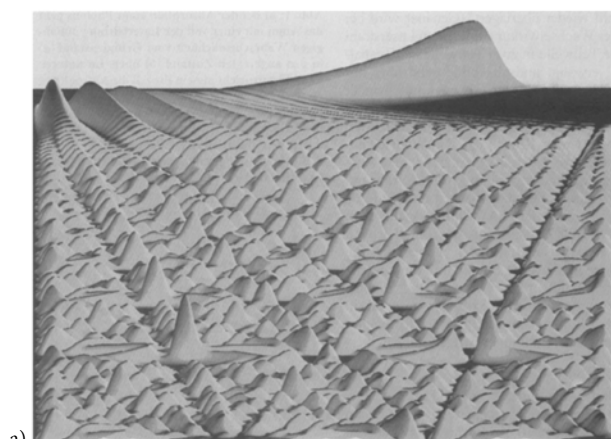
Ich praca spowodowała gwałtowny wzrost zainteresowania tematem periodycznego zachowania układów kwantowych w czasie, pośrednio przywracając efekt Talbota do łask. Znalaziono wiele cech wspólnych tych dwóch zjawisk, wynikających z podobnej struktury matematycznej, którą badał już Carl Friedrich Gauss na początku XIX w., a dziś ją nazywamy sumami Gaussa. Szybki przyrost liczby prac na temat kwantowych odrodzeń zaowocował nie tylko znacznym przyrostem wiedzy na ich temat, ale też wyodrębnieniem się kilku gałęzi-córek, np. kwantowe echa [6], kwantowe bliźny [7] czy kwantowe bity [8].

Okazało się także, że wraz z odrodzeniami, czy to w przestrzeni, jak w przypadku efektu Talbota, czy to w czasie, jak w przypadku kwantowym, pojawia się struktura fraktalna w funkcji autokorelacji⁴. W szczególności wyraźnie jest ona widoczna w stosunkowo atrakcyjnym wizualnie obiekcie, jakim są dywany kwantowe, którym się teraz bliżej przyjrzymy.

Dywany kwantowe

W 1995 roku Wolfgang Kinzel zaprezentował w niemieckojęzycznym czasopiśmie *Physikalische Blätter* krótki artykuł, w którym rozważał opisaną wyżej sytuację pojedynczej kwantowej cząstki w pudle, która początkowo jest opisana dobrze zlokalizowaną paczką falową [9]. Jednakże zamiast zwrócić uwagę na kwantowe odrodzenia, wyrysował on trójwymiarowy wykres, w którym na jednej osi znajduje się położenie w pudle, na drugiej czas, a wysokość oznacza wartość gęstości prawdopodobieństwa. Widok, który otrzymał przedstawia rys. 2.

Nie nazwał on jednak tego efektu kwantowym dywanem, a kwantowymi górami, co zresztą odzwierciedlił w prezentacji jego wyniku. Zgodnie ze swoim nazewnictwem, proste linie praktycznie zerowej wartości gęstości prawdopodobieństwa nazwał dolinami (albo później kanałami), a odpowiednie linie maksimum – graniami czy grzbietami. Wielka majestatyczna góra, która majaczy w oddali na horyzoncie, to nic innego jak właśnie kwantowe odrodzenie – paczka falowa, która zaczyna się kurczyć, aby odtworzyć w czasie odrodzenia swoją początkową formę. Nazwę dywanu kwantowego zapro-



Rys. 2 [9]

ponował z kolei Wolfgang Schleich [10], zainspirowany dwuwymiarową prezentacją tego wyniku, którą możemy zobaczyć na rys. 2b.

Przy takim przedstawieniu, doliny i grzbiety widoczne są jeszcze wyraźniej i w większej liczbie – łatwo rozróżnialne stają się linie o coraz to większym nachyleniu, reprezentujące albo maksima, albo minima gęstości prawdopodobieństwa. Analiza tych struktur została przeprowadzona na wiele sposobów, w tym za pomocą funkcji Wignera czy jawnym rozkładzie gęstości prawdopodobieństwa na składowe o konkretnej wartości prędkości [11]. Okazuje się, że prędkości dolin i grzbietów nie mają nic wspólnego z prędkością, którą charakteryzowałaby się klasyczna trajektoria paczki falowej. Narastają one tylko w wyniku samointerferencji paczki falowej, która w pewnym momencie zaczyna odbijać się od ścianek pudła. Grzbiety oznaczają miejsca konstruktywnej, a kanały – destruktywnej interferencji. Dostrzegane prędkości tych struktur są więc związane nie tyle z kwantowomechanicznym rozplywaniem się początkowej paczki falowej, a raczej z samą geometrią nieskończonej studni.

Czy kwantowe dywany są jednak tylko fizyczną ciekawostką? Okazuje się, że ich matematyczna struktura, wykorzystująca sumy Gaussa, wykazuje głębokie po-

3. Wieść niesie, że kwantowe odrodzenia były otrzymywane już we wcześniejszych pracach, jednak uznane zostały za błędy numeryczne i nigdy nieopublikowane.

4. Funkcja autokorelacji to kwadrat modułu iloczynu skalarne funkcji falowej w chwili t i w chwili t_0 .

wiązania z teorią liczb, odkrywając wewnętrzną fraktalną strukturę zarówno w efekcie Talbota, jak i w dywanach kwantowych. Ponadto pokazano, że układ linii, po których bieżą doliny i grzbiety dywanu kwantowego może być wykorzystany w pewnych problemach stawianych przez teorię informacji kwantowej, a także do rozkładu dużych liczb całkowitych na czynniki pierwsze [12].

Przestrzenne odrodzenia w efekcie Talbota, i ich czasowe kwantowe odpowiedniki zostały wielokrotnie zrealizowane w różnego rodzaju doświadczeniach. Od dyfrakcyjnych eksperymentów bazujących na wcześniejszych, XIX-wiecznych próbach, przez układy zawierające atomy, molekuly czy ultrazimne⁵ gazy, a kończąc na stanach Rydberga i jądrowych paczkach falowych, samoodtworzające się w czasie i przestrzeni struktury zostały bardzo dokładnie zbadane i opisane. Punktem wyjścia do tytułowych *fermionowych dywanów kwantowych* są jednak układy, które zawierają znaczną liczbę cząstek kwantowych.

Oczywiście takie układy istnieją w przyrodzie, zostały zresztą bardzo dokładnie zbadane i z sukcesem wykorzystane, co potwierdza np. powszechność tranzystorów. Jednakże dopiero w 1995 roku, wraz z pierwszym wytworzeniem tzw. kondensatu Bosego–Einsteina, została stworzona platforma doświadczalna, która pozwala na bardzo dokładną kontrolę układów zawierających wiele oddziałujących ze sobą cząstek kwantowych [13]. Mowa tutaj o ultrazimnych gazach atomowych, w których uwięzione za pomocą silnej wiązki światła ekstremalnie rozrzedzone pary jakiegoś lekkiego atomu, np. litu, mogą być bardzo dokładnie przygotowane w pożądanej geometrii, a ich własności następnie bardzo precyzyjnie mierzone. W szczególności możliwym stało się wytworzenie nieskończonej studni potencjału, która przez dziesięciolecia była jedynie elementarnym przykładem dla pierwszorocznych studentów fizyki.

Wyróżniającą cechą takich układów jest także możliwość swobodnego sterowania siłą oddziaływania pomiędzy atomami. Odbywa się to za pomocą odpowiednio dobranego pola magnetycznego, a nosi nazwę rezonansu Feshbacha [14]. W szczególności wytworzyć można kwantowy gaz, który nie oddziałuje – co w pierwszej chwili może wydawać się trywialnie łatwe, ale po chwili namysłu stwierdzić można, że to nie jest takie oczywiste – w końcu wszystkie atomy oddziałują z atomami w swoim otoczeniu, np. siłami van der Waalsa i zniwelowanie wpływu tych sił jest doświadczalnie nie-

oczywiste. Podążając tym tropem, zachęćeni możliwością jego doświadczalnego zbadania, rozważmy nieoddziałujący gaz fermionów w pudle.

Fermionowe dywany kwantowe

Zacznijmy najpierw od wyjaśnienia, czym różnią się fermiony i bozony w przypadku ultrazimnego gazu umieszczonego w pudle. Gdy mamy do czynienia z pojedynczą cząstką w stanie podstawowym, mówimy, że jest ona w stanie własnym pudła o najniższej energii. Jeśli umieścimy w pudle więcej atomów, to naturalnym wydaje się, że stan podstawowy będzie zrealizowany przez obsadzenie tego najniższego stanu przez wszystkie cząstki. Jest to prawda – tak zachowują się nieoddziałujące bozony. Wszystkie gromadzą się w tym samym, najniższym stanie własnym pudła. Taki wielociałowy stan nazywamy kondensatem Bosego–Einsteina.

Fermiony zachowują się inaczej ze względu na zakaz Pauliego, który mówi, że jeśli jeden fermion obsadza już jakiś stan własny pudła, to inny nie może go już zająć. Trzymając się tej zasady, skonstruowanie stanu podstawowego też jest dość naturalne. Każdy kolejny atom zaczyna obsadzać kolejny stan własny pudła, zgodnie z rosnącą wartością energii. Widać od razu, że stan podstawowy fermionów jest diametralnie inny od bozonowego, w szczególności charakteryzuje się znacznie większą energią całkowitą.

Zastanówmy się teraz, czy istnieje jakiś odpowiednik gęstości prawdopodobieństwa dla układu wielu atomów. Oczywiście możemy rozważać pełen rozkład prawdopodobieństwa, w którym zmienne losowe odpowiadają każdej cząstce, ale już na pierwszy rzut oka wydaje się to bardzo skomplikowane. Chcielibyśmy badać wielkość, która posiada podobne właściwości pomiarowe, tzn. taką, która mówi nam, z jakim prawdopodobieństwem będzie kliknął detektor cząstek ustawiony w danym punkcie przestrzeni, informując nas, ile średnio atomów znajduje się w danym miejscu. Okazuje się, że taki obiekt da się zdefiniować i na dodatek jest do niego łatwy dostęp w warunkach doświadczalnych. Nazywany jest jednocząstkową gęstością i dla nieoddziałującego gazu bozonów przyjmuje postać:

$$n_B(x, t) = N|\phi_B(x, t)|^2,$$

gdzie N to liczba bozonów w pudle, a $\phi_B(x, t)$ to funkcja falowa, nazywana orbitalem, którą jednocześnie obsadzają wszystkie atomy. Podstawiając za $\phi_B(x, t)$ superpozycję stanów własnych, o których była mowa w dwóch poprzednich sekcjach, także otrzymamy dywan kwantowy, tym razem wielociałowy, który jednak nie będzie różnił się od przypadku jednej cząstki – będzie jedynie przemnożony przez liczbę atomów w układzie.

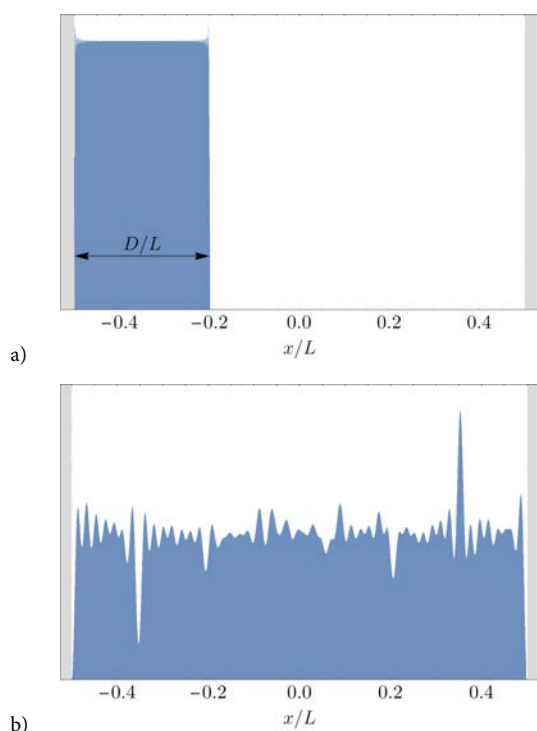
5. Ultrazimne gazy to są gazy tak mocno schłodzone, że przejawiają cechy kwantowe.

Z kolei w przypadku fermionowym, jednocząstkowa gęstość dla nieoddziałującego gazu przyjmuje postać

$$n_F(x, t) = \sum_{k=1}^N |\phi_k(x, t)|^2,$$

gdzie N to liczba fermionów w pudle, a $\phi_k(x, t)$ to ortogonalne względem siebie orbitale, które są zajmowane przez kolejne fermiony. Widać od razu, że fermionowy dywan kwantowy będzie się różnił od bozonowego – każdy składnik tej sumy jest inny i każdy odpowiada innemu jednocząstkowemu dywanowi kwantowemu.

Nasza przygoda z dywanami rozpoczęła się od prostego zadania, po którym nie spodziewaliśmy się żadnych nadzwyczajnych wyników, a rozwiązanie którego potrzebne nam było w kontekście innego eksperymentu. Konkretniej, badaliśmy w jaki sposób nieoddziałujący gaz fermionowy zamknięty początkowo w pudle o szerokości D , a następnie wypuszczony do większego pudła o szerokości $L > D$, będzie dyfundował (sytuacja początkowa przedstawiona jest na rys. 3a.). Odkryliśmy bardzo zaskakującą rzecz (rys. 3b) – w trakcie ewolucji zaczęły pojawiać się wąskie struktury, które przypominały solitony będące rozwiązaniami równań nieliniowych – posiadały stałą wysokość, kształt i poruszały się ze stałą prędkością [15].

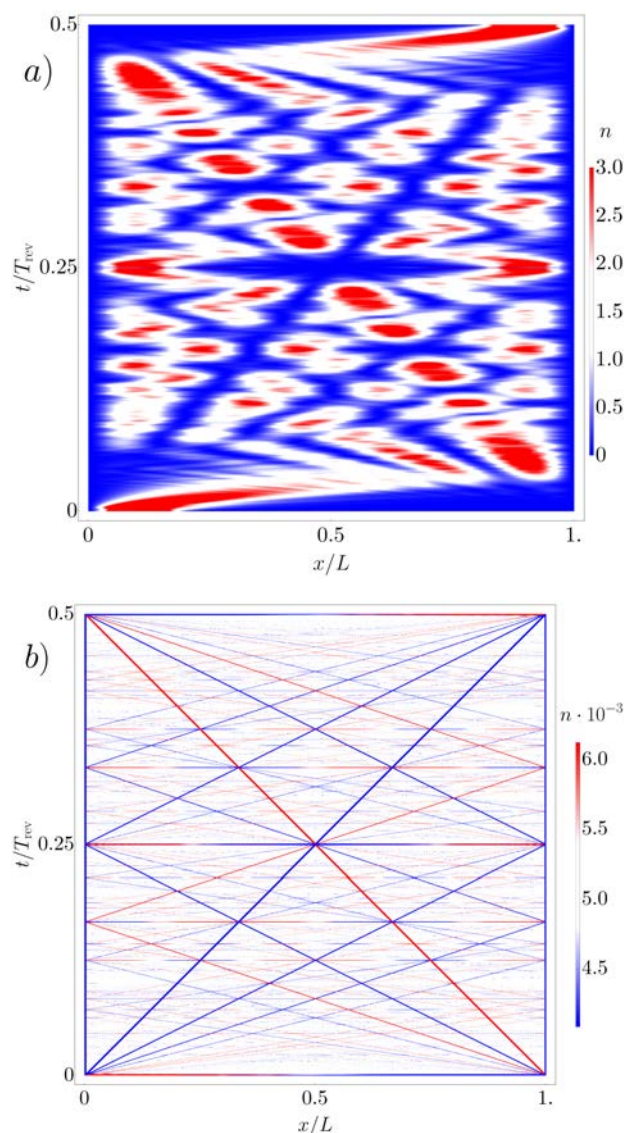


Rys. 3. a) Przedstawia jednocząstkową gęstość nieoddziałującego gazu fermionowego w chwili początkowej – atomy znajdują się w stanie podstawowym pudła o szerokości $D < L$. Następnie, gaz jest wypuszczony, aby swobodnie ewoluował w większym pudle o szerokości L . b) Przedstawia późniejszą chwilę czasu. Wąskie struktury solitonowe są wyraźnie widoczne – w lewej części pudła widzimy wyraźne minimum gęstości, a w prawej – maksimum. Te minima i maksima poruszają się ze stałą prędkością i zachowują kształt w trakcie ewolucji w czasie

Dlaczego było to tak zaskakujące? Do istnienia solitonów, czyli wzbudzeń jakiegoś pola opisującego czy to gaz, czy to światło, niezbędne są nieliniowe człony w równaniach dynamiki, które w przypadku atomowym związane są z obecnością oddziaływań. W gazie nieoddziałującym takie solitonopodobne struktury nie powinny się tworzyć.

Po przeanalizowaniu dostępnej literatury, okazało się, że to, co obserwujemy, to doliny i grzbiety znane z dywanów kwantowych, jednak znacznie uwypuklone i dużo wyraźniejsze. To uwypuklenie wynika bezpośrednio z nałożenia na siebie jednocząstkowych dywanów w taki sposób, że każda cząstka zajmuje inny stan początkowy odpowiadający kolejnym stanom własnym małego pudła. Wyłaniające się w wyniku takiego nałożenia struktury dywanowe znacznie bardziej wyróżniają doliny i granie przedstawione na rys. 4.

Analityczna analiza wyrażenia na jednocząstkową gęstość pozwoliła określić kilka ciekawych własności



Rys. 4. a) Jednocząstkowy dywan kwantowy. b) Fermionowy dywan kwantowy

tych solitonopodobnych struktur. Po pierwsze, nie znikają one w granicy coraz to większej liczby atomów – ich relatywna głębokość pozostaje niezmienna. Co ciekawe, nie jest to prawda dla innych geometrii – w przypadku bardzo dużej liczby fermionów uwięzionych początkowo w jakiegokolwiek innej pułapce, np. harmoniczej, tak wyraźne struktury nie pojawiają się, a jednocząstkowa gęstość fluktuuje w wizualnie losowy sposób w trakcie ewolucji.

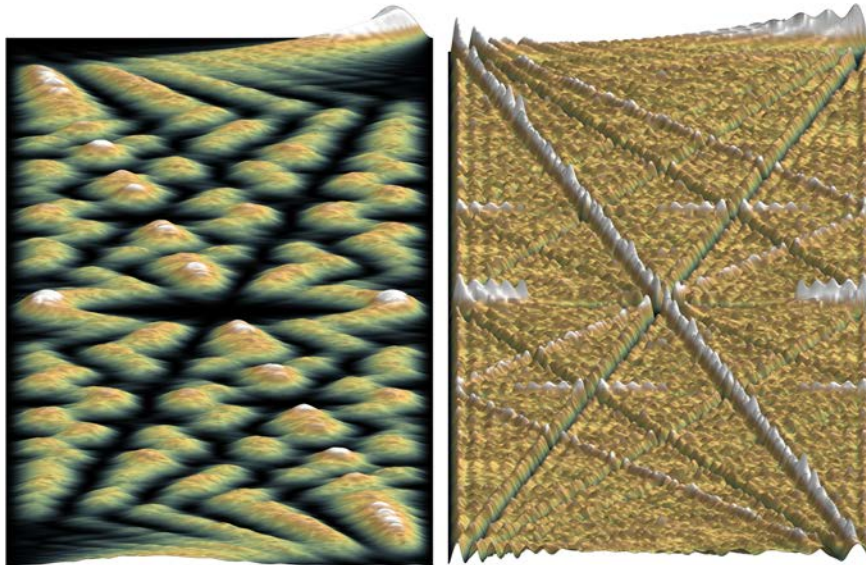
Udało się także pokazać, jakie prędkości i kształty przyjmują kolejne kanały i grzbiety. Prędkości, z którymi się poruszają, są dane przez wielokrotności pewnej podstawowej prędkości v_0 , która zależy tylko od wielkości dużego pudła i nie zmieniają się wraz z liczbą cząstek. Z kolei głębokość danej struktury d_v w trakcie ewolucji zależy zarówno od jej prędkości v , jak i szerokości pudła, w którym początkowo umieszczony był gaz:

$$d_v = \text{sinc} \left(\frac{v}{v_0} \frac{D}{L} \pi \right).$$

Kształt tych struktur jest inny niż solitonów znanych z oddziałującego gazu atomowego, standardowo przy-

bierający formę kwadratu tangensa hiperbolicznego. W przypadku fermionowego dywanu jest to funkcja *sinc*, a szerokość struktury zależy zarówno od liczby cząstek, jak i początkowego ściśnięcia gazu – im więcej atomów, tym struktura staje się węższa, podobnie jak przy zmniejszaniu szerokości startowego pudła. Kilka innych własności wartych jest podkreślenia – fermionowe dywany kwantowe nie znikają w wysokiej temperaturze, a rachunki przeprowadzone dla bliskiej doświadczeniu rzeczywistości trójwymiarowej geometrii sugerują, że one mogą być zaobserwowane w obecnych doświadczeniach.

Podsumowując, udało nam się odkryć zjawisko, które z jednej strony ma dobrze ugruntowane podstawy teoretyczne, sięgające jeszcze XIX w., z drugiej dzięki platformie doświadczalnej w postaci ultrazimnych gazów atomowych może obecnie zostać zbadane w laboratorium. Porównując jednak nasz wynik do analizowanych przez wiele lat dywanów kwantowych, jedna różnica jest szczególnie uderzająca – tak jak Wolfgang Kinzel zobaczył w swoich wykresach kwantowe góry, tak my ujrzeliśmy kwantowe Himalaje:



Rys. 5. Po lewej – kwantowe góry Kinzela, po prawej – fermionowe kwantowe Himalaje

Literatura

- [1] H. F. Talbot, *Philos. Mag.* **9**, 401 (1836).
- [2] L. Rayleigh, *Philos. Mag.* **11**, 196 (1881).
- [3] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* **14**, 664 (1926).
- [4] R. W. Robinett, *Phys. Rep.* **392**, 1 (2004).
- [5] E. T. Jaynes F. W. Cummings, *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963).
- [6] F. B. J. Buchkremer, R. Dumke, H. Levsen, G. Birkl, and W. Ertmer, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3121 (2000).
- [7] E. J. Heller, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1515 (1984).
- [8] A. T. Forrester, R. A. Gudmundsen, and P. O. Johnson, *Phys. Rev.* **99**, 1691 (1955).
- [9] W. Kinzel, *Phys. Bl.* **51**, 1190 (1995).
- [10] P. Stifter, C. Leichtie, W. P. Schleich, and J. Marklof, *Zeitschr. Naturforsch. A* **52**, 377 (1997).
- [11] I. Marzoli, F. Saif, I. Bialynicki-Birula, O. M. Friesch, A. E. Kaplan, and W. P. Schleich, *Acta Phys. Slov.* **48**, 323 (1998).
- [12] M. Berry, I. Marzoli, and W. Schleich, *Phys. World* **14**, 39 (2001).
- [13] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).
- [14] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1225 (2010).
- [15] P. T. Grochowski, T. Karpiuk, M. Brewczyk, and K. Rzażewski, *Phys. Rev. Research* **2**, 013119 (2020).