Joanna Nowak

STRUKTURA OPERATORA RZUTU W KONSTRUKCJACH FOTOGRAMETRYCZNYCH

Streszczenie. Pokazano sposób wykorzystania teorii niezawodności w technikach fotogrametrycznych stosowanych w pomiarach inżynierskich. Szczegółowo przeanalizowano podstawowe konstrukcje fotogrametryczne, opierając się na spostrzeżeniu, iż rozchodzenie się zaburzenia wywołanego błędem grubym ilustruje struktura operatora rzutu. Badania wykazały, że ma ona charakter liniowy bądź zbliżony do liniowego przy czym izolinie nie są zamknięte i tworzą formacje typu siodło.

1. Wstęp

Wiele zadań fotogrametrycznych obejmuje takie zastosowania inżynierskie, w których problem bezpieczeństwa ma charakter priorytetowy (np. osuwający się obiekt historyczny, badanie reakcji mostu na obciążenie, kontrola zapory w trakcie napełniania zbiornika, itp.). Nie możemy sobie pozwolić na wyciąganie wniosków z pomiarów zawierających błędy grube, stąd wziął się pomysł oceny technik fotogrametrycznych pod względem niezawodnościowym. Głównym celem prezentowanego referatu jest pokazanie sposobu wykorzystania teorii niezawodności (w tym: wariancyjno-kowariancyjnej macierzy poprawek wyrównanych) w technikach fotogrametrycznych stosowanych w pomiarach inżynierskich.

Analiza dotyczy tych fragmentów technik fotogrametrycznych, które dają się zapisać w postaci liniowego lub zlinearyzowanego modelu uwzględniającego wpływy systematyczne. Parametry modelu obserwacyjnego, na który składają się - obok obserwowanych punktów - osnowa geodezyjna, osnowa fotogrametryczna, stanowiska kamer i parametry zdjęć, estymowane są metodą najmniejszych kwadratów.

1. Błędy grube w ujęciu deterministycznym

Do analizy wariancyjno-kowariancyjnej macierzy poprawek wyrównanych ($R = I - a\left(a^T a\right)^{-1} a^T$), wykorzystano technikę symulacji, zakładając prawdziwą wartość obserwacji l^{praw} i obarczając ją błędami prawdziwymi (e) – wówczas poprawki wyrównawcze można otrzymać ze wzoru $\hat{v} = R \cdot e$. To równanie nie posiada jednoznacznego rozwiązania względem błędów prawdziwych e, bo macierz R jest osobliwa. Stąd nie istnieje absolutnie pewna metoda wykrywania błędów grubych na podstawie wartości poprawek.

Z tego samego wzoru widać, że komponenty wektora błędów e rozprzestrzenią się przy pomocy macierzy R na wszystkie elementy wektora poprawek $\hat{v}$. Sposób tego rozłożenia zależy głównie od struktury macierzy wariancyjno-kowariancyjnej poprawek wyrównanych R i dlatego przeprowadzono analizę struktury tej macierzy dla często wykorzystywanych konstrukcji fotogrametrycznych jak: orientacje (wewnętrzna, wzajemna, bezwzględna), przestrzenne wcięcie wstecz, fotogrametryczne wcięcie w przód.

2. Struktura operatora rzutu w transformacjach

Transformacje stanowią podstawę zadań geodezyjnych i fotogrametrycznych. Badając empirycznie macierz R oraz $H=I-R$ w zadaniach z rodzaju transformacji, spotykamy się z następującymi przypadkami szczególnymi:

A. Obserwacji funkcjonalnie niezależnych $R_{ij} = 0$ dla $i \neq j$;

Obserwacje niezależne nie wpływają na inne obserwacje, w związku z tym nic nie wnoszą do dalszych analiz.

B. Grup (podukładów) wzajemnie niezależnych obserwacji $R = \begin{bmatrix} R_{A,A} & 0 \\ 0 & R_{B,B} \end{bmatrix}$;

Bez straty ogólności, będziemy grupy obserwacji A, B analizować oddzielnie.

Można również zauważyć, że punkty wyznaczane podczas jakiejkolwiek transformacji dostarczają obserwacji niezależnych $R_{ii} = 0$. Wynika to z faktu że, podczas przeliczania współrzędnych z układu pierwszego do układu drugiego nie wykorzystujemy obserwacji nadliczbowych. Dlatego w dalszym ciągu pracy będą badane tylko punkty nawiązania (punkty łączne transformacji).

2.1. Płaska transformacja afiniczna (2-D)

Ze wzorów na transformację afiniczną w płaszczyźnie XY: $X = p1 + p2 * x + p3 * y$

$Y = p4 + p5 * x + p6 * y$

można wywnioskować, że da się ją zamienić na dwa oddzielne zadania o niewiadomych $[p1, p2, p3]$ dla obserwacji X oraz $[p4, p5, p6]$ dla obserwacji Y. Występują więc tam niezależne grupy obserwacji dla współrzędnej x i y. Obie grupy mają identyczną strukturę: $R = \begin{bmatrix} R_{A,A} & 0 \\ 0 & R_{A,A} \end{bmatrix}$, co można zapisać jako: $\mathrm{cov}(\hat{x}_i, \hat{x}_j) = \mathrm{cov}(\hat{y}_i, \hat{y}_j)$ i $\mathrm{cov}(\hat{x}_i, \hat{y}_j) = 0$.

Przykład 1

Weźmy sześć równomiernie rozmieszczonych punktów na stereogramie *(jak na szkicu obok).*

1 2

3 4

5 6

Rozwiązując zadanie otrzymujemy macierz kowariancyjną niewiadomych oraz macierz wariancyjno-kowariancyjną poprawek *R*. Zbadamy elementy macierzy *R* reprezentującej operator rzutu. W tym celu wykorzystamy macierz $H = I - R$.

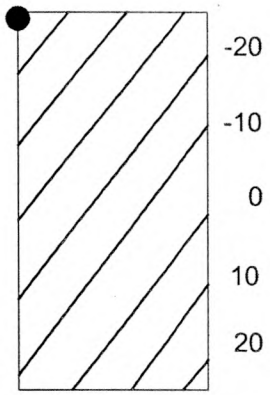
ozn. obs.	1v	3v	5v	7v	9v	11v
1v	-58	-25	-33	-0	-8	25
3v	-25	-58	-0	-33	25	-8
5v	-33	-0	-33	-0	-33	-0
7v	-0	-33	-0	-33	-0	-33
9v	-8	25	-33	-0	-58	-25
11v	25	-8	-0	-33	-25	-58

Macierz $R - I$.

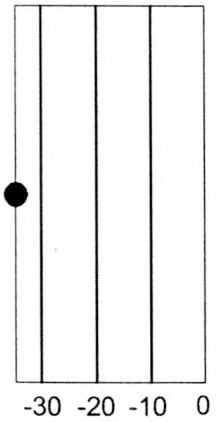
Uwaga! Dla uproszczenia zapisu, elementy tej macierzy są przemnożone przez 100.

Każdy wiersz macierzy *H* określa oddziaływanie x_i na współrzędne *x* wszystkich innych punktów. Kartując $H_{ij} = \mathrm{cov}(\hat{x}_i, \hat{x}_j)$ po kolei w punktach $j = 1,2,\Lambda\ ,n$ otrzymamy wartości analizowanej cechy. Prowadząc izolinie stwierdzamy, że są one liniami prostymi i przedstawiają płaszczyznę. (por. rys.2.1).

2-D transformacja afiniczna na 6 punktach



Rys. 2.1A. dla obserwacji nr 11 (x_1)



Rys. 2.1B. dla obserwacji nr 7 (x_3)

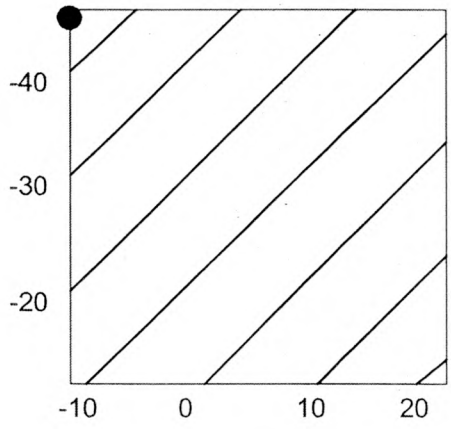
Rys. 2.1. Prezentacja graficzna wartości elementów macierzy R-I w postaci izolinii

Przykład 2

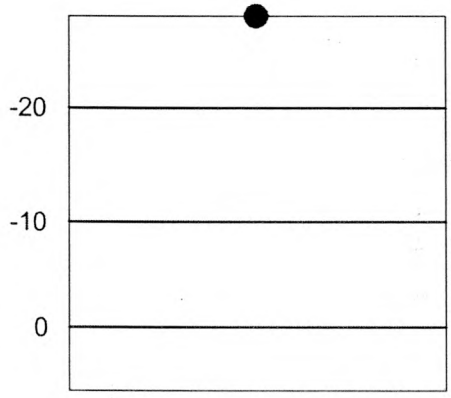
Weźmy dziewięć równomiernie rozmieszczonych punktów na stereogramie *(jak na szkicu obok).*

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, zbadamy elementy macierzy *R* reprezentującej operator rzutu.

2-D transformacja afiniczna na 9 punktach



Rys. 2.2A. dla obserwacji nr 1 (x_1)



Rys. 2.2B. dla obserwacji nr 3 (x_2)

Rys. 2.2. Prezentacja graficzna wartości elementów macierzy R-I w postaci izolinii

Sprawdzimy czy liniowe oddziaływania zachodzą w transformacji afinicznej dla dowolnego rozkładu punktów łącznych. Elementy macierzy *H* można obliczyć ze wzoru

$$H_{ij} = A_i C_{xx} A_j^T = G_i A_j^T, \qquad (3.2.2)$$

gdzie wektor $G_i = A_i C_{xx}$ (3.2.3)

charakteryzuje źródło oddziaływania w *i-tym* punkcie i pozwala na sformułowanie wniosku: jeśli współczynniki układu równań poprawek zależą liniowo od położenia punktów przeliczanych to operator rzutu opisujący ich wzajemne oddziaływania jest ściśle liniową funkcją tego położenia.

2.2. Płaska transformacja przez podobieństwo (transformacja Helmerta)

Wzory transformacyjne zawierają 4 parametry:

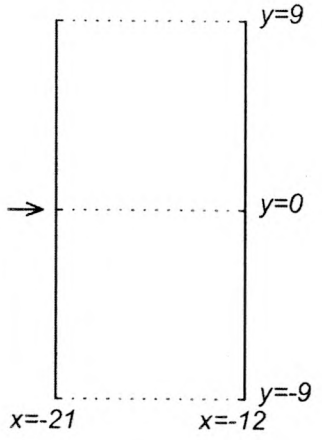
$$X = p1 + p3*x - p4*y$$
$$Y = p2 + p4*x + p3*y$$

Przykład 3

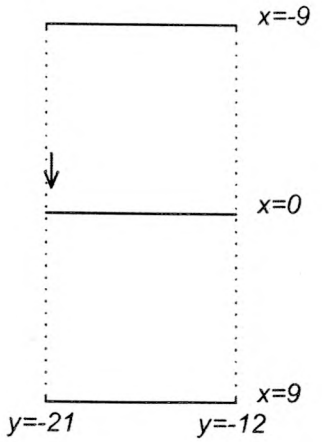
Wykorzystamy rozkład punktów z przykładu 1 (6 równomiernie rozłożonych punktów) otrzymując **mapy przestrzennego rozkładu H_{ij} dla *x-ów* i *y-ów:***

- Kartując $\mathrm{cov}(\hat{x}_i, \hat{x}_j)$ po kolei w punktach $j = 1,2,\Lambda\ ,n$ otrzymamy wartości analizowanej cechy. Prowadząc izolinie (oznaczone na rysunku linią ciągłą) stwierdzamy, że są one liniami prostymi i przedstawiają płaszczyznę. Kierunek gradientu określa wektor z punktu P_i do środka ciężkości. Najsilniejsze oddziaływania wykazują punkty położone w pobliżu izolinii przechodzącej przez punkt P_i. Otrzymana mapa przedstawia obraz podobny do uzyskanego dla transformacji afinicznej.
- Kartując $\mathrm{cov}(\hat{x}_i, \hat{y}_j)$ po kolei w punktach $j = 1,2,\Lambda\ ,n$ otrzymamy wartości analizowanej cechy. Prowadząc izolinie (oznaczone na rysunku linią przerywaną) stwierdzamy, że są one liniami prostymi i przedstawiają płaszczyznę. Kierunek izolinii określa wektor z punktu P_i do środka ciężkości. Najsłabsze oddziaływania wykazują punkty położone w pobliżu warstwicy o cesze 0 przechodzącej przez punkt P_i. Otrzymana mapa posiada izolinie prostopadłe do pierwszej.
- Kartując $\mathrm{cov}(\hat{y}_i, \hat{x}_j)$ po kolei w punktach $j = 1,2,\Lambda\ ,n$ otrzymamy mapę identyczną z drugą, ale wysokości izolinii (warstwic) mają znaki przeciwne.
- Kartując $\mathrm{cov}(\hat{y}_i, \hat{y}_j)$ po kolei w punktach $j = 1,2,\Lambda\ ,n$ otrzymamy mapę identyczną z pierwszą.

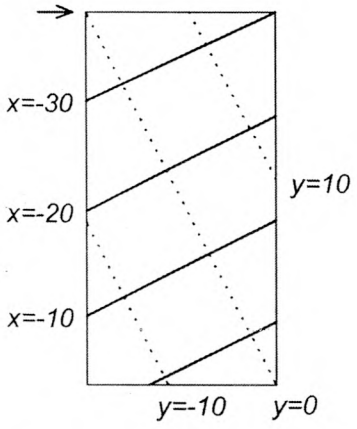
2-D transformacja przez podobieństwo na 6 punktach



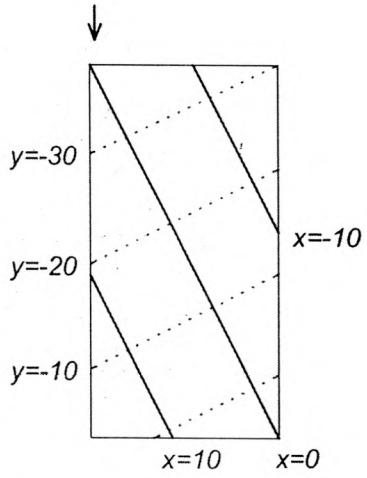
Rys. 2.3A. dla obserwacji nr 7 (x_3)



Rys. 2.3B. dla obserwacji nr 8 (y_3)



Rys. 2.3C. dla obserwacji nr 11 (x_1)



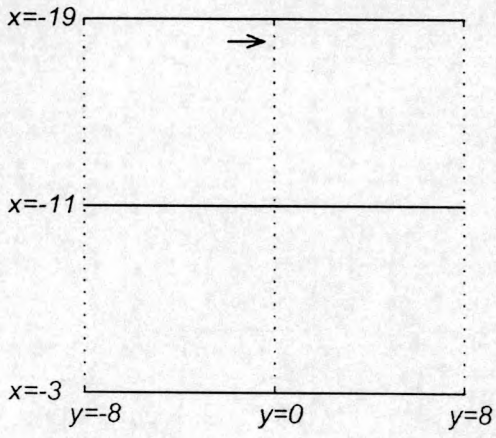
Rys. 2.3D. dla obserwacji nr 12 (y_1)

Rys. 2.3. Prezentacja graficzna wartości elementów macierzy R-I w postaci izolinii

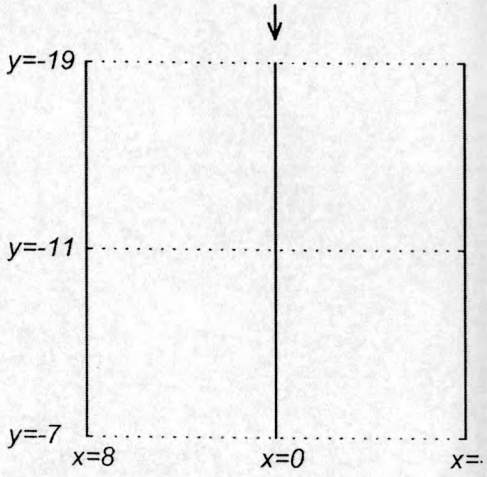
Przykład 4

Wykorzystamy rozkład punktów z przykładu 2 (9 równomiernie rozłożonych) obliczając elementy operatora rzutu. Mapy przestrzennego rozkładu H_{ij} dla *x-ów* i *y-ów:*

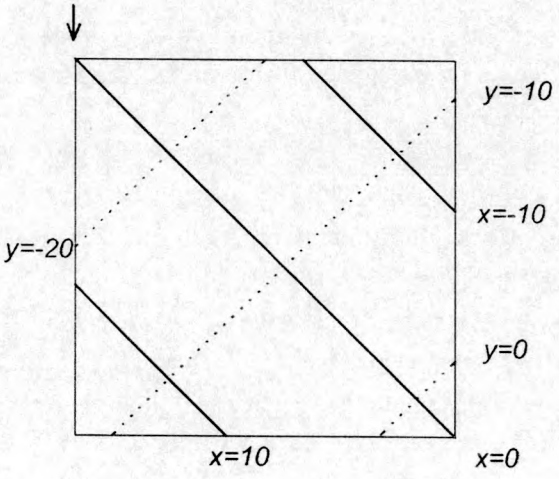
- (rys. 2.4A,B) Kartując $\mathrm{cov}(\hat{x}_i, \hat{x}_j)$ po kolei dla i=2 oraz $j = 1,2,\Lambda\ ,n$ otrzymamy wartości analizowanej cechy. Prowadząc izolinie (oznaczone na rysunku linią ciągłą) stwierdzamy, że są one liniami prostymi i przedstawiają płaszczyznę. Podobne efekty uzyskujemy kartując $\mathrm{cov}(\hat{x}_i, \hat{y}_j)$ dla i=2 i prowadząc izolinie (oznaczone na rysunku linią kropkowaną).
- (rys. 2.4C,D) Kartując $\mathrm{cov}(\hat{y}_i, \hat{y}_j)$ odpowiednio dla i=1 oraz $j = 1,2,\Lambda\ ,n$ otrzymamy wartości analizowanej cechy. Izolinie (oznaczone linią ciągłą) są liniami prostymi i przedstawiają płaszczyznę, podobnie - kartując $\mathrm{cov}(\hat{y}_i, \hat{x}_j)$ i prowadząc izolinie (oznaczone na rysunku linią kropkowaną).



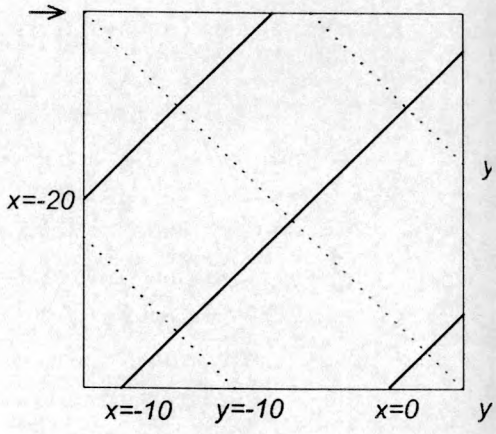
Rys. 2.4A. dla obserwacji nr 15 (x_2)



Rys. 2.4B. dla obserwacji nr 16 (y_2



Rys. 2.4C. dla obserwacji nr 17 (x_1)



Rys. 2.4D. dla obserwacji nr 18 (y_1

Rys. 2.4. Prezentacja graficzna wartości elementów macierzy R-I w postaci izolinii

Najsilniej oddziałują jednoimienne współrzędne z jednego brzegu, oraz różnoimienne współrzędne na prostopadłych stronach brzegu. Środek obszaru oddziałuje jednakowo na wszystkie punkty (mapa wpływu punktu *5* przedstawia płaszczyznę o stałej wysokości).

Liniowa funkcja oddziaływania nie posiada maksimum globalnego. W ograniczonym obszarze maksimum znajduje się na brzegu obszaru. Jeśli brzeg obszaru pokrywa się z kierunkiem izolinii funkcji oddziaływania to maksimum jest niejednoznaczne i zachodzi we wszystkich punktach styczności. Taka sytuacja mocno utrudnia śledzenie efektów błędów grubych.

3. Mapy przestrzennego rozkładu operatora rzutu w konstrukcjach typowo fotogrametrycznych

Fotogrametryczna orientacja wewnętrzna oraz bezwzględna to transformacje odpowiednio 2-D oraz 3-D . Ich własności zostały zbadane i przedstawione w poprzednim podrozdziale. Kolejne zadania fotogrametryczne można traktować jako transformacje między przestrzeniami o niejednakowej liczbie wymiarów $R^n \rightarrow R^m$ Np. wcięcie w przód to transformacja z przestrzeni czterowymiarowej (po dwie współrzędne tłowe na każdym zdjęciu) do przestrzeni trójwymiarowej (współrzędne terenowe), czyli: $R^4 \rightarrow R^3$.

3.1. Fotogrametryczne i przestrzenne wcięcie w przód

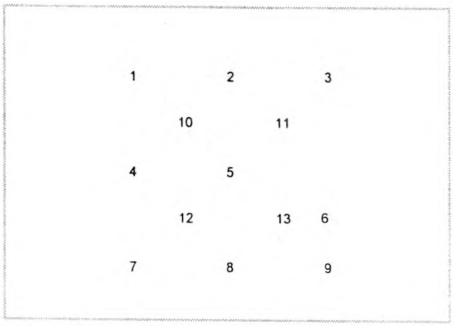
Dla obserwacji $[x', y', x'', y']^T$ macierz wariancyjno-kowariancyjna poprawek wyrównanych ma postać: $R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

Łatwo stąd wywnioskować, że obserwacje x', x'' są niezależne a obserwacje y', y'' współdziałają w sposób typowy dla średniej arytmetycznej. Można to interpretować jako rozwiązanie typu 2+1-D :

- w płaszczyźnie Oxz lewej kamery realizujemy wcięcie kątowe w przód;
- wysokość y obliczamy jako średnią z przewyższeń wzdłuż obu celowych.

3.2. Orientacja wzajemna

Przykład 5
Przeprowadzimy orientację wzajemną na 13 równomiernie rozmieszczonych punktach na stereogramie *(jak na szkicu obok).*

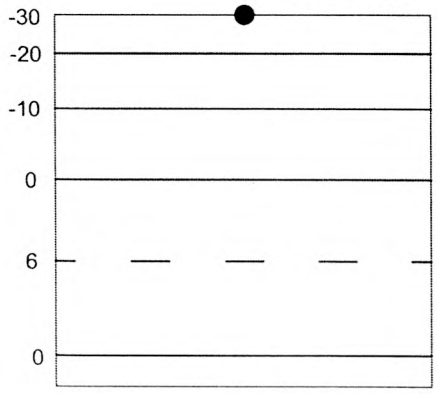


Podobnie jak w pozostałych przykładach, zbadamy elementy macierzy R reprezentującej operator rzutu.

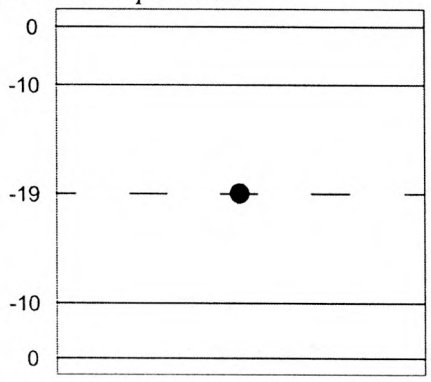
Mapy przestrzennego rozkładu $H_{//}$ dla paralaksy p (por. rys. 3.1).

- (rys. 3.1A) Kartując $\mathrm{cov}(\hat{p}_i, \hat{p}_j)$ po kolei dla i=2 (oznaczony czarną kropką) oraz $j = 1,2,\Lambda\ ,n$ otrzymamy wartości analizowanej cechy. Prowadząc izolinie (oznaczone na rysunku linią ciągłą) stwierdzamy, że są one liniami prostymi ale przedstawiają leżący walec (dodatkowo warstwica przerywana oznacza linię grzbietową). Najsilniejsze oddziaływania wykazują punkty leżące na poziomych krawędziach zdjęcia.
- (rys. 3.1B) Kartując $\mathrm{cov}(\hat{p}_i, \hat{p}_j)$ po kolei dla i=5 (oznaczony czarną kropką) oraz $j = 1,2,\Lambda\ ,n$ i prowadząc izolinie (oznaczone na rysunku linią ciągłą) stwierdzamy, że są one liniami prostymi i przedstawiają leżący walec Najsilniejsze oddziaływania wykazują punkty leżące na linii ciekowej (warstwica przerywana).
- (rys. 3.1C, D, E) Kartując $\mathrm{cov}(\hat{p}_i, \hat{p}_j)$ odpowiednio dla i=1, 4, 13 (ozn. czarną kropką) oraz $j = 1,2,\Lambda\ ,n$ otrzymamy wartości analizowanej cechy. Prowadząc izolinie stwierdzamy, że są one liniami krzywymi przedstawiającymi powierzchnię siodłową. Najsilniejsze oddziaływania wykazują punkty leżące w pobliżu źródła zaburzenia.

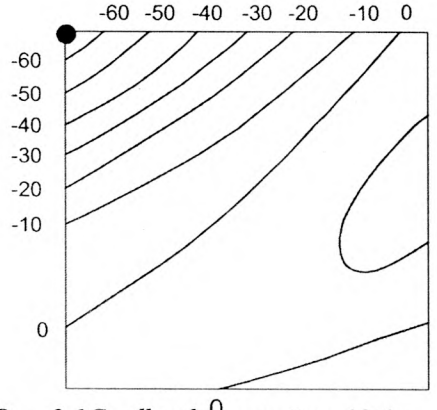
Orientacja wzajemna na 13 punktach



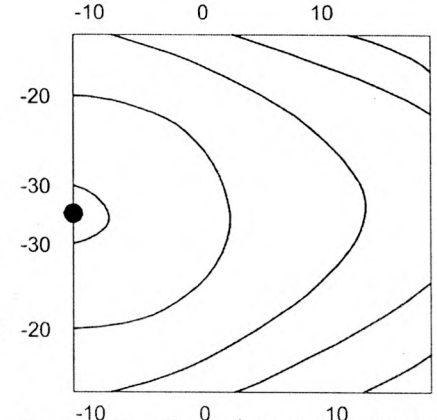
Rys. 3.1A. dla obserwacji nr 12 (py_2)



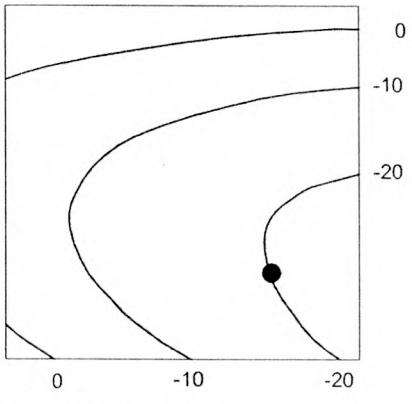
Rys. 3.1B. dla obserwacji nr 9 (py_5)



Rys. 3.1C. dla obserwacji nr 13 (py_1)



Rys. 3.1D. dla obserwacji nr 10 (py_4)



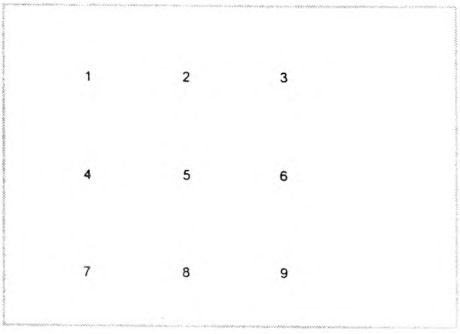
Rys. 3.1E. dla obserwacji nr 1 (py_{13})

Rys. 3.1. Prezentacja graficzna wartości elementów macierzy R-I w postaci izolinii

3.3. Fotogrametryczne wcięcie wstecz, przestrzenne wcięcie wstecz

Przykład 6

Przeprowadzimy fotogrametryczne wcięcie wstecz na 9 równomiernie rozmieszczonych punktach na stereogramie *(jak na szkicu obok).*



Każda para wierszy macierzy $(R-I)$ określa oddziaływanie x_i, y_i na współrzędne x, y wszystkich innych punktów.

Poprowadzimy izolinie dla kilku wybranych punktów (por. rys. 3.2.).

Izolinie oddziaływania x_i na współrzędne x wszystkich punktów narysujemy linią ciągłą, natomiast izolinie oddziaływania x_i na współrzędne y – przerywaną. Podobnie izolinie oddziaływania y_i na współrzędne y wszystkich punktów oznaczymy linią ciągłą, natomiast izolinie oddziaływania y_i na współrzędne x – przerywaną.

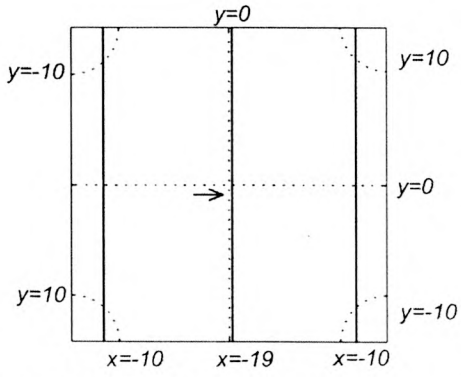
W zadaniach fotogrametrycznych quasi-transformacyjnych (orientacja wzajemna, wcięcie wstecz) występuje oddziaływanie opisane funkcjami stopnia drugiego. Powierzchnie odpowiadające tym funkcjom są otwarte – hiperboloidy w okolicy siodła, powierzchnie walcowe o poziomych tworzących i przekrojach parabolicznych. Takie funkcje nie posiadają minimum globalnego, podobnie jak płaszczyzny występujące w klasycznych transformacjach. W ograniczonym obszarze maksimum znajduje się na brzegu obszaru. Jeśli brzeg obszaru pokrywa się z kierunkiem warstwic funkcji oddziaływania to maksimum jest niejednoznaczne i zachodzi we wszystkich punktach styczności, co może mocno utrudnić obserwację efektów błędów grubych.

Podsumowanie

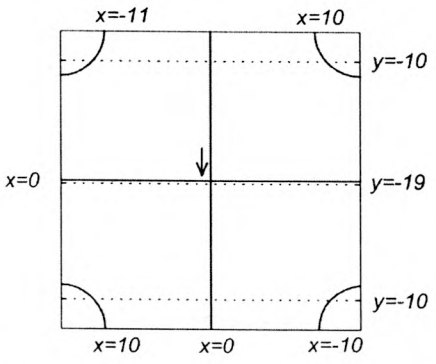
Przeprowadzono analizę szeroko wykorzystywanych konstrukcji fotogrametrycznych i geodezyjnych jak: orientacje (wewnętrzna, wzajemna, bezwzględna), przestrzenne wcięcie wstecz, fotogrametryczne wcięcie w przód. Szczegółowe badania mechanizmu rozprzestrzeniania (dystrybucji) zaburzeń na inne poprawki pozwoliły na dokonanie szeregu podsumowań:

- w konstrukcjach opisanych równaniami poprawek o współczynnikach zależnych liniowo od położenia obserwacji w przestrzeni przestrzenny rozkład oddziaływań H (gdzie $H = I - R$) jest liniowy; oddziaływania poza źródłem mogą być równe, a nawet większe od reakcji w źródle; utrudnia to odgadywanie przyczyn zaburzeń na podstawie poprawek wyrównanych (skutków); przykładami takich konstrukcji są transformacje: afiniczna, izometryczna oraz przez podobieństwo;

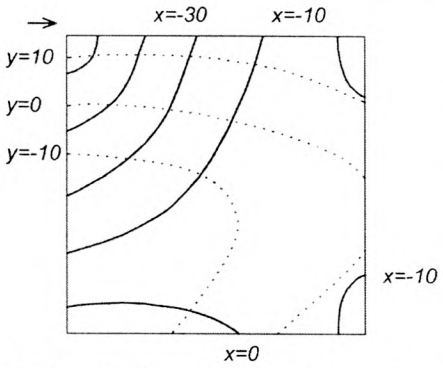
Wcięcie wstecz na 9 punktach



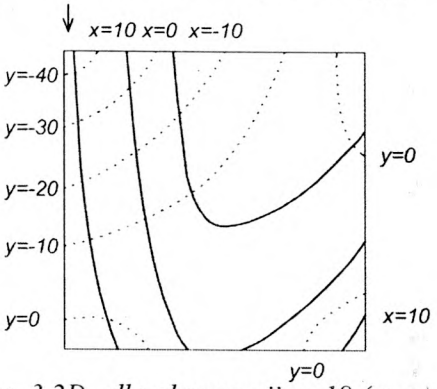
Rys. 3.2A. dla obserwacji nr 9 (px_5)



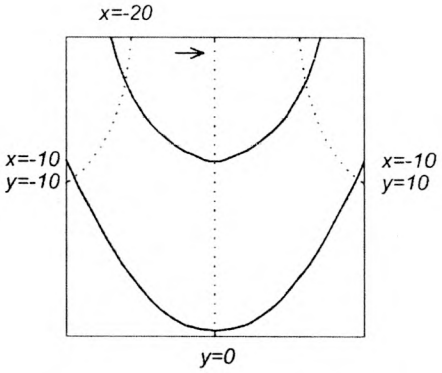
Rys. 3.2B. dla obserwacji nr 10 (py_5)



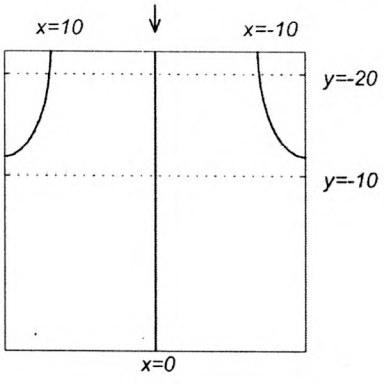
Rys. 3.2C. dla obserwacji nr 17 (px_1)



Rys. 3.2D. dla obserwacji nr 18 (py_1)



Rys. 3.2E. dla obserwacji nr 15 (px_2)



Rys. 3.2F. dla obserwacji nr 16 (py_2)

Rys. 3.2. Prezentacja graficzna wartości elementów macierzy R-I w postaci izolinii

- w konstrukcjach stanowiących złożone transformacje (orientacja wzajemna, fotogrametryczne wcięcie wstecz) rozkład oddziaływań jest zbliżony do liniowego przy czym warstwice nie są zamknięte i tworzą formacje typu siodło.

Bibliografia

GRÜN A.: *Accuracy, reliability and statistics in close-range photogrammetry.* Inter-Congress Symposium Commission V, International Society For Photogrammetry; Stockholm, August 14-17, 1978.

GRÜN A.: *Precision and reliability aspects in close-range photogrammetry.* XIVth Congress of the International Society for Photogrammetry, Commission V; Hamburg 1980.

KRAUS K.: *Photogrammetry, Volume 2. Advanced Methods and Applications.* Dümmlerbuch / Bonn. Institute for Photogrammetry and Remote Sensing, Vienna University of Technology; 1997.

NOWAK E.: *Algorytmy numeryczne w geodezji.* Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.

NOWAK E., PRÓSZYŃSKI W.: *Interactive system for solving horizontal positioning problems in engineering surveys.* FIG XIX International Congress Helsinki Finland; 1990.

NOWAK J.: *Analiza przydatności systemu IMPULS do badania niezawodności konstrukcji fotogrametrycznych.* Raport końcowy z wydziałowego grantu dziekańskiego; Wydział Geodezji i Kartografii, Politechnika Warszawska; maj 2002.

NOWAK J.: *Badanie niezawodnościowych własności technik fotogrametrycznych w aspekcie zastosowań inżynierskich.* Rozprawa doktorska, Wydział Geodezji i Kartografii, Politechnika Warszawska, 2002.

NOWAK J.: *Badanie odpowiedzi układu na błędy grube w aspekcie teorii niezawodnościowej.* Raport końcowy z grantu dziekańskiego; Wydział Geodezji i Kartografii, Politechnika Warszawska; maj 2001.

NOWAK J.: *Własności niezawodnościowe podstawowych zadań fotogrametrycznych.* Przegląd Geodezyjny nr 11, listopad 1999.

PELZER H.: *Criteria for the reliability of geodetic networks.* Int. Symp. on Optimisation of Design and Computation of Geodetic Network, Sopron 1977.

PRÓSZYŃSKI W.: *Criteria for internal reliability of linear least squares models.* Bulletin Géodésique 68 (s.162-167), 1994.

PRÓSZYŃSKI W.: *Measuring the robustness potential of the least-squares estimation: geodetic illustration.* Journal of Geodesy 71: 652-659, 1997.

PRÓSZYŃSKI W.: *On the space of imperceptible errors in linear Gauss-Markov models with examples in engineering surveys.* Geodezja i Kartografia, nr 2/2000.

Recenzował: prof. dr hab. Adam Linsenbarth