



Probabilistyczny model dyskretnego rozkładu gęstości warstw w łożu osadzarki

Stanisław GŁOWIAK¹⁾

¹⁾ Zakład Automatyki „BGG” S.c.; email: sgłowiak@gmail.com

<http://doi.org/10.29227/IM-2020-01-28>

Submission date: 16-01-2020 | Review date: 18-03-2020

Abstrakt

W artykule przedstawiono szczegółowy opis probabilistycznego modelu dyskretnego rozkładu gęstości warstw w łożu osadzarki opracowanego na podstawie założeń przedstawionych w pracy (Głowiak 2019). Opis ten zawiera wszystkie wzory opisujące zależności istniejące w tym modelu. Podano także te szczegóły założeń, których jasne przedstawienie korzystniej było połączyć ze szczegółami obliczeń. Wykonany model wykorzystano do obliczeń rozkładu gęstości cząstek w poszczególnych warstwach. Obliczenia te wykazują istnienie znacznych różnic w tych rozkładach w stosunku do innych znanych modeli. Także całościowy obraz procesu wzbogacania w osadzarkę przyjmowany na podstawie dotychczasowych badań eksperymentalnych i rozważań teoretycznych znacznie różni się od obrazu wynikającego z przedstawianego modelu. Różnice te okazują się ważne także dla praktyki wzbogacania węgla wskazując wyraźnie na wybór kierunku modernizacji osadzarek istotnie różny od tendencji aktualnie panujących wśród konstruktorów tych maszyn. Z przedstawionego modelu wynika także niepoprawność obecnie używanych obliczeń do przewidywania wyników wzbogacania z zastosowaniem krzywych rozdziału spowodowaną głównie dowolnością wyboru gęstości rozdziału, która w rzeczywistym procesie osadzania jest znacznie ograniczona przez gęstości tworzących się warstw. Przedstawiony model pokazuje także, że matematyczna aproksymacja krzywych rozdziału przyjmowana w tych obliczeniach nie jest poprawna.

Słowa kluczowe: wzbogacanie węgla kamiennego, osadzarka, modelowanie osadzania, krzywe rozdziału, rozpraszanie ziaren

Wstęp

Zasadniczym celem tworzenia prezentowanego modelu jest wykonanie narzędzia umożliwiającego obliczenie rozkładu gęstości warstw i mas w łożu osadzarki oraz wyznaczenie na tej podstawie możliwości podziału łoża na dwa produkty, których wychody i parametry jakościowe także będą możliwe do obliczenia. Danymi wejściowymi modelu są charakterystyki wzbogacanego materiału oraz przyjęte parametry określające jakość procesu wzbogacania. Uzasadnienie dla wielu szczegółów przyjętych w przedstawianym modelu, a pominiętych w tym opracowaniu autor przedstawił w pracy (Głowiak 2019).

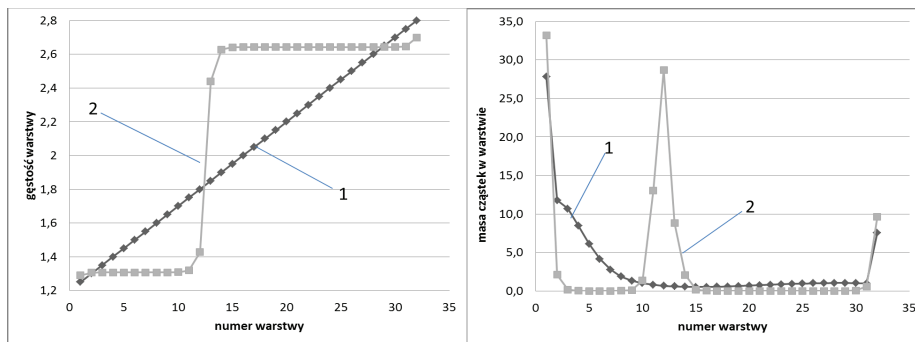
Prostym i ogólnie dostępnym narzędziem umożliwiającym wykonanie wszystkich obliczeń w przedstawianym modelu jest arkusz kalkulacyjny, zastosowany i sprawdzony przez autora niniejszej pracy. Użycie do obliczeń arkusza kalkulacyjnego pozwala wykorzystać jego dogodności do sprawdzania poprawności obliczeń i graficznej prezentacji wyników. Obliczenia według podanych w modelu zależności możliwe są do wykonania także przy zastosowaniu dowolnych innych narzędzi obliczeniowych zachowujących odpowiednią dokładność. Przyjęcie w modelu dwuwymiarowego rozkładu zmiennej losowej skłania do uporządkowania obliczeń w formie wzajemnie ze sobą powiązanych macierzy, co pozwala uzyskać względnie prosty i przejrzysty zapis realizowanych działań. Dalszy opis modelu będzie przedstawiał kolejne kroki konstruowania modelu z wyjaśnieniem istotnych szczegółów. Zanim to nastąpi konieczne jest przedstawienie zagadnienia zmiennej gęstości warstw i sposobu podziału wysokości łoża na poszczególne warstwy z określeniem granic sąsiednich warstw.

W dalszej części pod słowem model rozumiany jest prezentowany probabilistyczny dyskretny model rozkładu gęstości cząstek w łożu osadzarki, w przypadku innych modeli będzie podawane określenie charakteryzujące ten model.

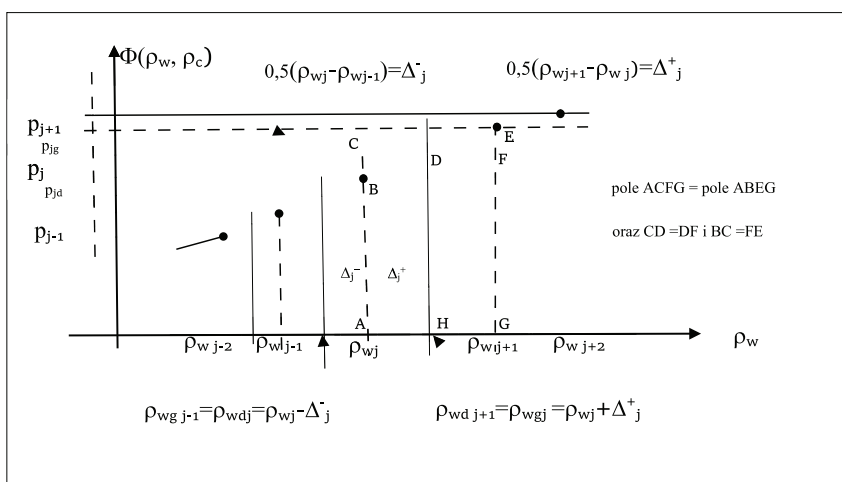
Graniczne gęstości warstw

Dla modelu dyskretnego konieczne jest przyjęcie średnich gęstości frakcji gęstościowych wzbogacanego materiału i tworzących się warstw. Średnie te powinny być średnimi dla określonego zakresu gęstości frakcji lub warstwy. W praktyce wzbogacania, szczególnie węgla, przyjęło się niecałkiem poprawnie, że jako średnią gęstość frakcji przyjmuje się arytmetyczną średnią gęstości dwu cieczy ciężkich użytych do wydzielenia tej frakcji. Dla średniej gęstości warstwy w rozpatrywanym modelu dyskretnym trzeba było przyjąć istnienie granicznych gęstości dla tych warstw analogicznych do granic średniej gęstości cząstek danej frakcji. W tym przypadku sprawa ustalenia tych granic jest znacznie bardziej skomplikowana niż dla gęstości cząstek. Jest tak dlatego, że w założeniach modelu (Głowiak 2019 s. 216–217) istnieje konieczność braku jakichkolwiek ograniczeń dla średnich gęstości tworzących się warstw. Jeżeli ponadto uwzględnić, że warstwy mogą znacznie się różnić ilością zgromadzonego w nich wzbogacanego materiału, to jasne staje się, że nie da się ustalić gęstości tych granic w podobny sposób jak dla gęstości cząstek, gdzie różnice gęstości kolejnych frakcji mogą być jednakowe. Ważność tej sprawy dla poprawnego sformułowania algorytmu obliczeń modelu przedstawia rys. 1 pokazujący różnice w rozkładach gęstości warstw i zgromadzonych w nich mas cząstek dla sztywnego liniowego rozkładu gęstości warstw (krzywa 1) oraz dla nieliniowej skali gęstości warstw (krzywa 2), wynikającej z braku ograniczeń dla ich gęstości.

W pierwszej kolejności należy zatem rozstrzygnąć kwestię czy istnieje jednoznaczna możliwość ustalania tych granicznych gęstości dla modelu dyskretnego. Z powyższych uwag wypływa jeden ważny wniosek, że te granice nie mogą być sztywne, lecz powinny być dane jakąś zależnością. Sensowną przesłanką do jej wybrania może być równość wartości średniej funkcji danej



Rys. 1. Rozkłady gęstości i mas warstw w funkcji numeru warstwy dla stałej (1) i zmiennej (2) gęstości warstw
 Fig. 1. Layer density and layer mass distributions as a function of layer number for linear (1) and nonlinear (2) scale of layer density



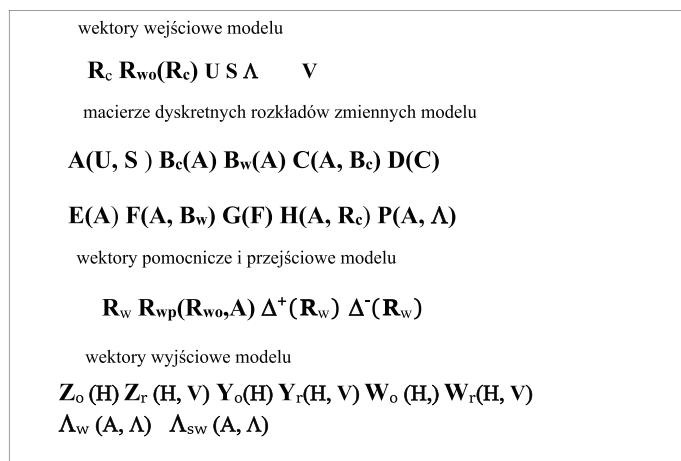
Rys. 2. Sposób obliczania dyskretnej wartości prawdopodobieństwa z użyciem określonej dolnej i górnej granicy gęstości warstwy
 Fig. 2. The method of calculating the discrete probability value using the specified lower and upper limits of the layer density

w postaci histogramu i jej przybliżenia krzywą łamaną w obszarze zmiany wartości tej funkcji w literaturze (Bobrowski 1980) nazywaną wykresem licznosci. Taką zależnością definiującą granicę dwu sąsiednich warstw i spełniającej to założenie jest średnia arytmetyczna średnich gęstości tych warstw dla wszystkich warstw oprócz warstw skrajnych. Dla warstwy najbliższej dolną granicą gęstości tej warstwy jest graniczna gęstość najbliższych cząstek istniejących we wzbogacanym materiale, a granicą górną średnia jak dla warstw środkowych. Dla warstwy najcięższej górną granicą gęstości tej warstwy jest graniczna gęstością najcięższych cząstek wzbogacanego materiału, a granicą dolną średnia jak dla warstw środkowych. Graniczne gęstości kolejnych warstw powinny być także istotną częścią iteracyjnego algorytmu obliczania średniej gęstości warstwy oraz powinny spełniać warunek równości maksymalnej gęstości warstwy poprzedniej i minimalnej gęstości warstwy następnej. Takie przyjęcie granic warstwy powoduje, że wartość średnia gęstości warstwy nie jest usytuowana symetrycznie względem wartości skrajnych gęstości warstwy. Sposób wyznaczania granic dla funkcji danej w postaci histogramu i dla dowolnego nieregularnego rozmieszczenia wartości tej funkcji na osi odciętych jest wyjaśniony na rys. 2 podającym sposób obliczania dyskretnej wartości prawdopodobieństwa trafienia cząstki danej gęstości do warstwy o znanej jej gęstości średniej. Na tym rysunku podane są także zależności zachodzące między wartością średnią warstwy i skrajnymi gęstościami tej warstwy. Uzasadnienie dla stosowania obliczania prawdopodobieństwa

z różnic odpowiednich dystrybuant zostało podane w założeniach modelu (Głowiak 2019 s. 219).

Z powyższego wynika, że każda warstwa jest scharakteryzowana trzema liczbami: średnią gęstością warstwy ρ_w , dolną granicą zakresu gęstości warstwy ρ_{wd} i górną granicą zakresu gęstości warstwy ρ_{wg} . W sytuacji, gdy warstwy gromadzą różne ilości cząstek o różnych gęstościach ich skrajne gęstości mogą być położone symetrycznie względem wartości średniej każdej warstwy tylko w bardzo szczególnym przypadku, którego prawdopodobieństwo wystąpienia jest znikome. Jest to fizyczne uzasadnienie asymetrii położenia średniej gęstości warstwy względem wartości skrajnych.

Najważniejszym krokiem w tworzeniu modelu jest prawidłowe obliczenie prawdopodobieństwa trafienia cząstki o wybranej gęstości do każdej z możliwych do powstania warstw z uwzględnieniem wszystkich ograniczeń możliwości rozpraszania cząstek poszczególnych gęstości. Znając masy i gęstości cząstek różnych frakcji gęstościowych można obliczyć objętości zajmowane przez te cząstki, co z kolei umożliwia obliczenie średnich gęstości poszczególnych warstw. W ten sposób można obliczyć także profil gęstości warstw w pionowym przekroju łoża osadzarki dla przypadku nieruchomych warstw, co ma miejsce w osadzarkie wsadowej (bezzprzepływowej). Ta sytuacja jest istotna dla eksperymentalnego potwierdzenia prawidłowości prezentowanego modelu. Jeżeli z kolei znany jest profil prędkości warstw o znanych ich średnich gęstościach to można z niego obliczyć położenie warstw o znanej gęstości w przepły-



Rys. 3. Schemat zależności macierzy i wektorów modelu
 Fig. 3. Diagram of dependencies of matrices and vectors of model

wowej maszynie przemysłowej. Włączenie do modelu zależności zawartości popiołu w poszczególnych cząstkach od ich gęstości pozwala obliczyć technologiczne skutki wzbogacania oraz wynikające z nich zależności ekonomiczne związane z relacjami jakości i ceny produktów wzbogacania. Poniżej przedstawione są szczegóły dla tak przyjętej idei realizacji obliczeń.

Opisy macierzy i wektorów tworzących model

W przedstawianym dyskretnym modelu rozkładu cząstek o różnych gęstościach w warstwach łóża osadzarki zmiennymi losowymi są średnia gęstość cząstek wzbogacanego materiału i średnia gęstość tworzących się warstw w łóżu osadzarki. Zmienne tego modelu uporządkowano w sposób stosowany w rachunku macierzowym. Wierszom macierzy przyporządkowane są średnie gęstości frakcji gęstościowych wzbogacanego materiału, a kolumnom macierzy średnie gęstości warstw jakie powstają w łóżu osadzarki. Macierzowa postać uporządkowania modelu nie implikuje istnienia wszystkich działań na tych macierzach stosowanych w rachunku macierzowym. Wszystkie macierze modelu muszą być macierzami kwadratowymi, ponieważ tylko taka macierz przedstawia stan wzbogacania idealnego, który według założeń powinien być możliwy do obliczenia przez ten model. Istniejące zależności między elementami poszczególnych macierzy będą podawane równolegle z wyjaśnieniem znaczenia elementów poszczególnych macierzy.

Ogólny zapis obowiązujący dla poniższych opisów oznaczanych dużą literą macierzy jest oznaczenie elementów tych macierzy małymi literami z podaniem indeksów oznaczających położenie tych elementów w macierzy; przykładowo $A=[a_{ij}]$.

Rys. 3 podaje oznaczenia macierzy i wektorów użytych w modelu oraz symboliczny zapis wiążących je zależności, a poniżej podany jest opis tych macierzy i wektorów.

Wszystkie dalsze rozważania dotyczą jednostki masy równej 100% masy wszystkich cząstek wzbogacanego materiału.

Przedstawiany poniżej opis poszczególnych macierzy jest podany z zachowaniem następującej kolejności: znaczenie w teorii rachunku prawdopodobieństwa, interpretacji na gruncie teorii wzbogacania w osadzarkę (jeżeli istnieje), wzór pozwalający obliczyć wartości liczbowe elementów tych macierzy. Dla niektórych opisów podano także ich interpretacje dla ciągłych rozkładów zmiennej losowej.

Wektory wejściowe modelu

W tej pracy pojęcie wektor oznacza macierz jednowierszową lub jednokolumnową.

Najważniejsze wektory wejściowe charakteryzują „wzbogacany” w tym modelu materiał surowy. Wektorem wejściowym modelu niezwiązanym z właściwościami nadawy jest wektor rozprożeń charakteryzujący sprawność wzbogacania. Dalej zostanie wyjaśnione jak ze skalarnej wielkości charakteryzującej średnie rozproszenia cząstek w procesie wzbogacania powstaje wektor pozwalający modelować przypadki różnych rozprożeń dla różniących się gęstością frakcji wzbogacanego materiału.

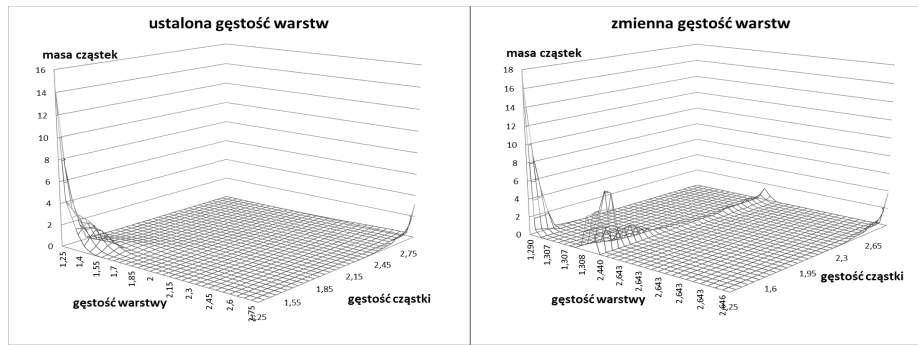
Pierwszym z wektorów wejściowych charakteryzujących wzbogacany materiał jest wektor kolumnowy gęstości frakcji gęstościowych wzbogacanego materiału R_c , którego element ρ_{ci} oznacza średnią gęstość i-tej frakcji. Wektor ten przypisuje numerowi frakcji gęstościowej i gęstość tej frakcji wynoszącą ρ_{ci} .

Drugim jest wektor kolumnowy udziałów frakcji gęstościowych (charakterystyka częstości dla gęstości frakcji) nadawy U. Element u_i tego wektora jest względną zawartością frakcji o numerze i w jednostce masy wzbogacanego materiału wyrażoną w procentach.

Trzeci wektor wejściowy charakteryzujący nadawę to wektor kolumnowy Λ zawartości popiołu we frakcjach gęstościowych nadawy, którego element λ_{ci} oznacza wyrażoną w procentach zawartość popiołu w i-tej frakcji gęstościowej nadawy o gęstości ρ_{ci} .

Wektor kolumnowy zmiany rozproszenia frakcji gęstościowych nadawy S obliczany jest z przyjętego średniego rozproszenia w procesie wzbogacania E_s i przyjętej funkcyjnej zależności tego rozproszenia od gęstości frakcji gęstościowej ρ_{ci} wzbogacanego materiału. Element tego wektora $s_i = f(E_s, \rho_{ci})$ gdzie $f(\)$ oznacza ciągłą funkcję średniego rozpraszania E_s i gęstości cząstki ρ_{ci} obliczonej dla średniej gęstości frakcji ρ_{ci} . Dla obliczeń wykonanych z użyciem tego modelu praktyczne znaczenie ma tylko liniowa zależność $s_i = E_s + m\rho_{ci}$, gdyż dokładność możliwych badań empirycznych nie pozwala na identyfikację bardziej złożonych zależności rozproszenia od gęstości cząstki. Możliwe jest także wybranie indywidualnego rozproszenia dla każdej frakcji gęstościowej nadawy.

Element v_j wektora wierszowego V rozkładu poziomej prędkości j-tej warstwy oznacza wyrażoną w m/s wartość



Rys. 4. Rozkład masy cząstek w warstwach, gdy w obliczeniach gęstość warstw jest stała (po lewej) i gdy gęstości warstw jest zmienna (po prawej)
 Fig. 4. Distribution of mass of particles in the layers, where the layers density is constant (left) and is variable in calculations (right)

składowej poziomej prędkości ruchu cząstek j -tej warstwy o średniej gęstości warstwy ρ_{wj} . Na podstawie ciągłej zależności $V=f(\rho_w)$ obliczona jest średnia prędkość wszystkich warstw vs niezbędna dla obliczenia zmiany wysokości warstwy w funkcji średniej gęstości wszystkich cząstek warstwy. Gdy wszystkie warstwy poruszają się z taką samą prędkością to położenie każdej warstwy jest takie samo jak dla warstw nieruchomych. Dla warstwy poruszającej się z prędkością większą od prędkości średniej jej wysokość musi się zmniejszyć, co wynika z równania ciągłości przepływu przez dany przekrój (powierzchnię). Wysokość ruchomej warstwy w_j wynikająca ze zmiany jej prędkości jest obliczana na podstawie wysokości nieruchomej warstwy w_{oj} z zależności:

$$w_j = \frac{w_{oj} v_s}{v_j} \quad (1)$$

Ciągła funkcja $v(\rho_w)$ użyta w obliczeniach modelu określona jest zależnością:

$$v(\rho_w) = 0,046 + \frac{3,5949}{\rho_w^7} \quad (2)$$

Obliczona z tej zależności średnia prędkość warstwy v_s wynosi 0,125 m/s.

Wzór ten został przyjęty z aproksymacji danych eksperymentalnych zawartych w pracach (Samylin... 1976) i (Kowol 2010).

Element ρ_{woj} wektora początkowych gęstości warstw R_{wo} pozwalający iteracyjnie obliczyć gęstości poszczególnych warstw ρ_{wj} jest obliczany z zależności $R_{wo} = R_c^T$, gdzie R_c^T jest transponowanym wektorem R_c , stąd $\rho_{woj} = \rho_{ci}$ dla każdego $j = i$.

Wektory pomocnicze modelu

W każdym kroku obliczeń gęstości tworzących się warstw musi istnieć wektor R_{wjp} przejściowego rozkładu gęstości warstw ρ_{wj} , który po zakończeniu obliczeń iteracyjnych staje się wektorem końcowego rozkładu gęstości warstw R_w . Wartością wektora R_{wjp} dla pierwszego kroku obliczeń jest wektor początkowych gęstości warstw R_{wo} .

Także w każdym kroku obliczeń zmieniają się średnie gęstości warstw, zatem muszą się także zmieniać graniczne gęstości tych warstw. Dla wykonania obliczenia tych zmian wprowadza się wektor przyrostów Δ - ustalających dolną granicę zakresu gęstości j -tej warstwy. Element Δ_j pomocniczego wektora wierszowego Δ - określa spadek gęstości j -tej warstwy przy przejściu od średniej gęstości tej warstwy do

minimalnej granicznej gęstości tej warstwy. Minimalna gęstość j -tej warstwy jest jednocześnie maksymalną gęstością poprzedniej warstwy $j-1$. Wartość tego elementu obliczana jest z zależności:

$$\Delta_j = (\rho_j - \rho_{j-1}) / 2 \quad (3)$$

Analogiczny do wektora Δ - wektor przyrostów $\Delta+$ ustala górną granicę zakresu gęstości j -tej warstwy. Element $\Delta+j$ pomocniczego wektora wierszowego $\Delta+$ określa przyrost gęstości j -tej warstwy przy przejściu od średniej gęstości tej warstwy do maksymalnej granicznej gęstości tej warstwy. Maksymalna gęstość j -tej warstwy jest jednocześnie minimalną gęstością następnego warstwy $j+1$. Wartość tego elementu obliczana jest z zależności:

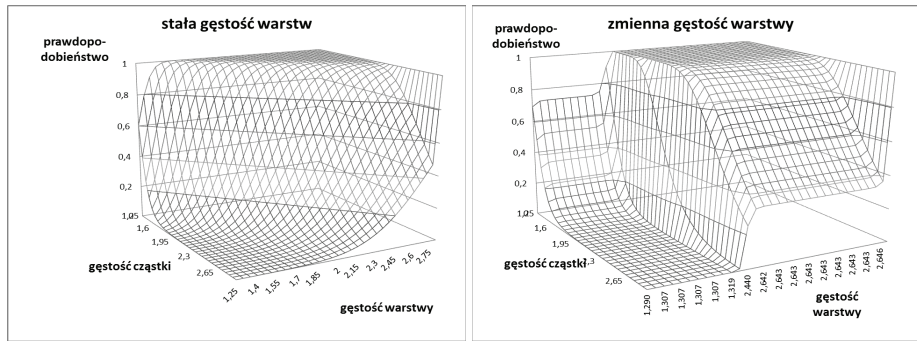
$$\Delta_j = (\rho_{j+1} - \rho_j) / 2 \quad (4)$$

Dwuwymiarowy rozkład mas cząstek o gęstości ρ_{ci} w warstwach o gęstości ρ_{wj}

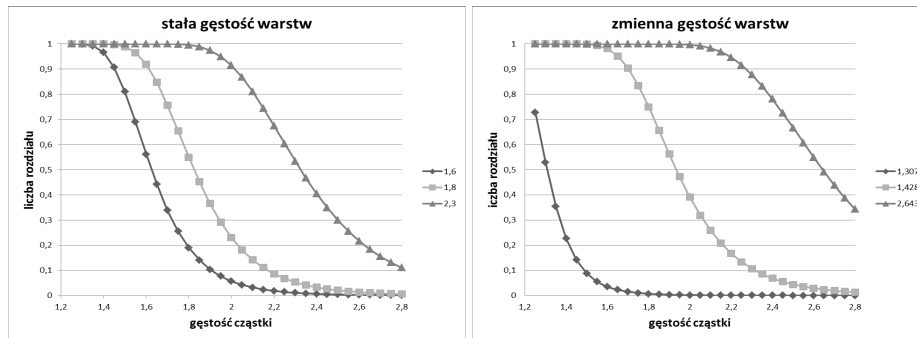
Dla najważniejszych macierzy rozkładu dyskretnego na zakończenie ich opisu załączono wyjaśnienie jakie znaczenie mają funkcje ciągłe odpowiadające dyskretnym wartościom elementów tej macierzy. Wyjaśnienia te mogą być pomocne dla losowej interpretacji pojęć z teorii wzbogacania opisywanych funkcjami ciągłymi.

Element podstawowej macierzy A modelu oznaczony jako a_{ij} przedstawia wyrażone w procentach prawdopodobieństwo trafienia cząstki o gęstości ρ_{ci} i -tej frakcji cząstek do j -tej warstwy, której gęstość wynosi ρ_{wj} . W interpretacji fizycznej wynikającej z prawa wielkich liczb i centralnych twierdzeń granicznych rachunku prawdopodobieństwa dla bardzo dużej liczby cząstek jest to procentowy udział masy cząstek i -tej frakcji gęstościowej nadawy zgromadzonych w j -tej warstwie, której średnia gęstość wynosi ρ_{wj} , w masie całego wzbogacanego materiału. Inaczej jest to wyrażona w procentach względna zawartość masy cząstek i -tej klasy gęstościowej nadawy w j -tej warstwie odniesiona do jednostkowej masy wszystkich cząstek nadawy.

Procentowy wymiar prawdopodobieństwa w tej macierzy jest skutkiem zachowania wymiaru wektora wejściowego U określającego skład gęstościowy wzbogacanego materiału w procentach tradycyjnie stosowanego w przeróbce kopalni. Jednocześnie ten wymiar jest dogodny do analizy wyników obliczeń i podniesienia ich dokładności.



Rys. 5. Powierzchnia utworzona przez wszystkie możliwe dystrybuanty warunkowych rozkładów mas w warstwach (warunek $\rho_c = \text{const}$), gdy obliczane w modelu warstwy mogą zmieniać swoją gęstość (po prawej) i gdy gęstość warstw jest stała (po lewej)
 Fig. 5. The surface formed by all the possible cumulative distribution of conditional distributions the mass layers (condition $\rho_c = \text{const}$) where density of layers is variable (right) and density of layers is constant (left) in model calculations



Rys. 6. Wybrane krzywe rozdziału dla produktu lekkiego, gdy gęstości warstw jest stała (po lewej) i te same krzywe, gdy gęstość warstw jest zmienna (po prawej)
 Fig. 6. Selected partition curves of the light product, when the density of the layers is constant (left) and variable (right) in model calculations

Gęstość prawdopodobieństwa rozkładu dwuwymiarowego ciągłego określa prawdopodobieństwo znalezienia cząstki o gęstości z zakresu $\rho_c, \rho_c + d\rho_c$ w warstwie o gęstości z zakresu $\rho_w, \rho_w + d\rho_w$. Podane prawdopodobieństwo dla zbioru bardzo dużej liczby cząstek jest względną zawartością masy cząstek przyjętej gęstości w warstwie o danej gęstości. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu dyskretnego określa średnie prawdopodobieństwo trafienia cząstek o średniej gęstości ρ_{ci} przyporządkowanej numerowi i do warstwy o średniej gęstości ρ_{wj} oznaczonej numerem j z uwzględnieniem ograniczeń w skrajnych warstwach. Zgodnie z założeniami powinna uwzględniać w swej postaci trzy różne funkcje opisujące rozproszenie cząstek w dwu warstwach skrajnych i wszystkich pozostałych warstwach. Także zgodnie z przyjętymi założeniami funkcja ta będzie obliczana jako różnica wartości dystrybuanty dla maksymalnej i minimalnej gęstości danej warstwy sposobem podanym na rys.2.

Zapis $\Phi(a,b,c)$ oznacza funkcję dystrybuanty rozkładu zmiennej losowej a , której wartość oczekiwana wynosi b i odchylenie standardowe tej zmiennej wynosi c .

Dyskretne wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa określające średnie prawdopodobieństwo trafienia i -tej cząstki do j -tej warstwy wyrażone przez wartości dystrybuanty dla skrajnych gęstości warstwy są następujące:

$$a_{i1} = u_i[\Phi(\rho_{wd} + \Delta_1^+, \rho_{ci}, 1,4826s_i) - \Phi(\rho_d - \Delta_1^-, \rho_{ci}, 1,4826s_i)] \quad (5)$$

dla $\rho_{w1} = \rho_{wd}, j=1, i=1 \dots n$ (warstwa najbliższa)

$$a_{in} = u_i[\Phi(\rho_{wg} + \Delta_n^+, \rho_{cn}, 1,4826s_i) - \Phi(\rho_g - \Delta_n^-, \rho_{cn}, 1,4826s_i)] \quad (6)$$

dla $\rho_{wn} = \rho_{wg}, j=n, i=1 \dots n$ (warstwa najcieńsza)

$$a_{ij} = u_i[\Phi(\rho_{wj} + \Delta_j^+, \rho_{ci}, 1,4826s_i) - \Phi(\rho_{wj} - \Delta_j^-, \rho_{ci}, 1,4826s_i)] \quad (7)$$

dla $\rho_{wd} < \rho_{wj} < \rho_{wg}, j=2 \dots n-1, i=1 \dots n$ (pozostałe warstwy)

Dla rozkładu normalnego

$$\Phi(\rho_{wj} + \Delta_j^+, \rho_{ci}, 1,4826s_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}1,4826s_i} \int_{-\infty}^{\rho_{wj} + \Delta_j^+} \exp\left[-\frac{(x - \rho_{ci})^2}{2(1,4826s_i)^2}\right] dx \quad (8)$$

$$\sigma_i = \frac{s_i}{0,6745} = 1,4825s_i \quad (9)$$

Dla rozkładu jednostajnego (prostokątnego):

$$u_i\Phi(\rho_{wj} + \Delta_1^+, \rho_{ci}, \frac{2}{\sqrt{3}}s_i) - u_i\Phi(\rho_{wj} - \Delta_1^-, \rho_{ci}, \frac{2}{\sqrt{3}}s_i) = u_i \frac{\rho_{wd} - \rho_{ci} + 2s_i}{4s_i} \quad (10)$$

dla $\rho_{w1} = \rho_{wd}, j=1, i=1 \dots n$ (warstwa najbliższa)

$$u_i\Phi(\rho_{wg} + \Delta_n^+, \rho_{cn}, \frac{2}{\sqrt{3}}s_i) - u_i\Phi(\rho_{wg} - \Delta_n^-, \rho_{cn}, \frac{2}{\sqrt{3}}s_i) = u_i \frac{\rho_{cn} - \rho_{wg} + 2s_i}{4s_i} \quad (11)$$

dla $\rho_{wn} = \rho_{wg}, j=n, i=1 \dots n$ (warstwa najcieńsza)

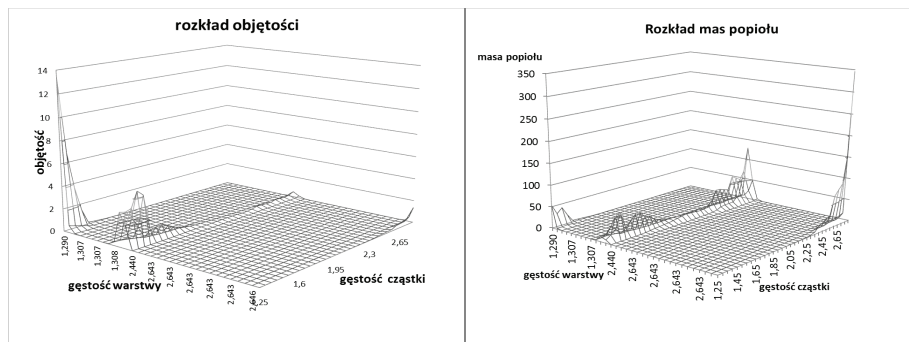
$$u_i\Phi(\rho_{wj} + \Delta_j^+, \rho_{ci}, \frac{2}{\sqrt{3}}s_i) - u_i\Phi(\rho_{wj} - \Delta_j^-, \rho_{ci}, \frac{2}{\sqrt{3}}s_i) = u_i \frac{\Delta_j^+ + \Delta_j^-}{4s_i} \quad (12)$$

dla $\rho_{wd} < \rho_{wj} < \rho_{wg}, j=2 \dots n-1, i=1 \dots n$ (pozostałe warstwy)

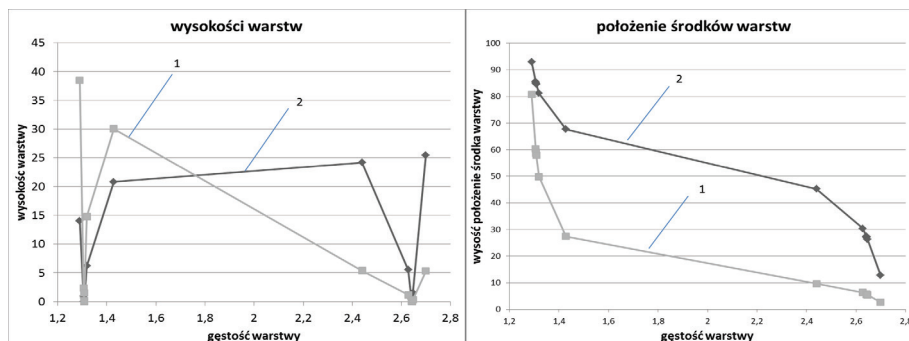
$$\sigma_i = \frac{2}{\sqrt{3}}s_i = 1,1547s_i \quad (13)$$

Powyższe wzory wynikają wprost z definicji dystrybuanty rozkładu zmiennej losowej i rys. 2.

Ograniczenie na elementy macierzy a_{ij} wynikające z bilansu mas poszczególnych frakcji jest następujące:



Rys. 7. Rozkład objętości cząstek (po lewej) i mas popiołu (po prawej) w warstwach
Fig. 7. Particle volume distribution (on the left) and the ash mass distribution (on the right) in layers



Rys. 8. Rozkład wysokości warstw (po lewej) i położenie ich środków (po prawej) w pionowym przekroju łoża dla warstw nieruchomych (1) i ruchomych (2)
Fig. 8. Layer height distribution (left) and location of the centers of the layers (right) in the vertical cross-section of the jig bed for motionless (1) and movable (2) layers

$$\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} = u_i = b_i \text{ dla każdego } i \text{ z zakresu } 1..n \quad (14)$$

Rys. 4 (prawy) pokazuje pseudoprzestrzenny wykres rozkładu mas cząstek w łożu osadzarki dla typowego składu wzbogacanego węgla surowego, średnim rozproszeniu 0,16 i linowym wzroście rozproszenia w funkcji gęstości cząstek przy braku ograniczenia zmian gęstości warstw. Rys. 4 (lewy) pokazuje ten sam rozkład, gdy nie dopuszcza się zmiany gęstości warstw, co odpowiada wykonaniu tylko pierwszego kroku obliczeń.

Rozkłady brzegowe dwuwymiarowej zmiennej losowej

Dla dwuwymiarowej zmiennej losowej istnieją dwa rozkłady brzegowe (Goldberger 1960). Mają one prostą interpretację fizyczną dla rozpatrywanego zagadnienia rozkładu cząstek w warstwach łoża osadzarki.

Rozkład brzegowy zawartości cząstek o stałej gęstości oznaczony jest jako wektor B_c .

Element b_i wektora kolumnowego B_c jest sumą elementów a_{ij} w poszczególnych wierszach. Z bilansu masy wynika, że powinien być równy elementowi u_i gęstościowej charakterystyki (krzywej) częstości tego materiału danej wektorem U . Ewentualne rozbieżności między wejściową charakterystyką, a tym rozkładem brzegowym powinny być ściśle kontrolowane w obliczeniach, gdyż występujące różnice mogą być dowodem niezachowania bilansu mas cząstek poszczególnych klas gęstościowych nadawy.

Gęstość brzegowa cząstek rozkładu ciągłego podaje prawdopodobieństwo znalezienia cząstki o gęstości z zakresu ρ_c , $\rho_c + d\rho_c$ w całości wzbogacanego materiału. To prawdopodobieństwo nie ma odpowiednika w teorii wzbogacania grawita-

cyjnego. Teoretycznym pojęciem bardzo podobnym jest charakterystyka (krzywa) częstości nadawy. Odnosi się ona jednak nie do gęstości frakcji, lecz do zawartości popiołu w tej frakcji gęstościowej. Dystrybuanta rozkładu brzegowego określa prawdopodobieństwo znalezienia cząstki o gęstości mniejszej od ρ_c w całości wzbogacanego materiału. To prawdopodobieństwo jest innym określeniem charakterystyki gęstościowej materiału surowego nazywaną także krzywą gęstości (Budryk 1949) (Stępiński 1964), zwykle pomijaną w zestawieniu charakterystyk nadawy. W tej pozycji literatury zamiast gęstości używa się równoważnego pojęcie ciężaru właściwego.

$$b_i = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} \text{ dla } i = 1..n \quad (15)$$

Rozkład brzegowy gęstości warstw

Element b_j wektora wierszowego B_w jest sumą elementów a_{ij} w poszczególnych kolumnach macierzy A . Jest to element rozkładu brzegowego określającego względną zawartości cząstek wzbogacanego materiału w poszczególnych warstwach odniesioną do masy wszystkich cząstek nadawy. Inaczej jest to udział masy cząstek zgromadzonych w jednej warstwie w całości nadawy. Ten wektor jest więc charakterystyka warstwową łoża osadzarki. Wielkość ta nie jest stosowana w teorii wzbogacania grawitacyjnego.

Gęstość brzegowa ciągłego rozkładu warstw podaje prawdopodobieństwo znalezienia cząstek tworzących warstwę o gęstości z zakresu ρ_w , $\rho_w + d\rho_w$ w całości rozwarstwionego materiału. Dystrybuanta tego rozkładu określa prawdopodobieństwo znalezienia wszystkich cząstek tworzących warstwę o gęstości mniejszej od wybranej gęstości ρ_w w całości rozwarstwionego materiału.

$$b_j = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} \text{ dla } j=1 \dots n \quad (16)$$

Jednowymiarowe warunkowe rozkłady mas cząstek o gęstości ρ_{ci} w warstwach o gęstości ρ_{wj} dla stałej gęstości cząstki

Przedstawiona macierz A pozwala na utworzenie z niej macierzy C składającej się z n wektorów wierszowych, z których każdy jest jednowymiarowym rozkładem prawdopodobieństwa trafienia do wybranej warstwy cząstek tylko o jednej gęstości. Są to rozkłady warunkowe, wynikające z ogólnej definicji możliwych rozkładów warunkowych rozkładu dwuwymiarowej zmiennej losowej (Goldberger 1960). Warunkiem dla tych rozkładów jest uprzednie wybranie gęstość cząstki równej gęstości ρ_{ci} i-tej frakcji gęstościowej materiału surowego. Elementy każdego wiersza są punktami funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu, podającej prawdopodobieństwo trafienia do j-tej warstwy o gęstości ρ_{wj} tylko cząstek i-tej frakcji gęstościowej nadawy o gęstości ρ_{ci} . W interpretacji fizycznej jest to względna zawartość cząstek i-tej klasy gęstościowej nadawy w j-tej warstwie odniesiona do masy wszystkich cząstek i-tej klasy gęstościowej w nadawie. Wektory kolumnowe tej macierzy nie mają prostej interpretacji związanej z pojęciami używanymi w teorii wzbogacania grawitacyjnego.

$$c_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^n a_{ij}} = \frac{a_{ij}}{b_j} \text{ dla } i=1 \dots n \quad (17)$$

Macierz dystrybuant rozkładów warunkowych

Elementy d_{ij} macierzy D powstają ze zsumowania elementów c_{ij} od pierwszego do j-tego każdego wiersza macierzy C. W ten sposób wiersze d_i są utworzone z elementów dystrybuant jednowymiarowych rozkładów warunkowych zawartości cząstek i-tej frakcji gęstościowej nadawy w j-tej warstwie. W interpretacji fizycznej jest to względna zawartość sumy cząstek i-tej klasy gęstościowej nadawy w warstwach od 1 do j-tej odniesiona do masy wszystkich cząstek tej klasy gęstościowej zawartych w warstwach od 1 do n-tej, czyli we wszystkich warstwach. Elementy d_{ij} j-tego wektora kolumnowego tej macierzy są więc punktami rzędnej krzywej rozdziału dla produktu lekkiego, jeżeli podział rozwarstwionego materiału na dwa produkty zostanie tak dokonany, że graniczną warstwą podziału zaliczaną w całości do produktu lekkiego jest j-ta warstwa. Macierz ta może być nazwana macierzą liczb rozdziału dla produktu lekkiego.

Cechą charakterystyczną elementów macierzy D (także i macierzy C) jest ich względnie mała zależność od charakterystyki gęstościowej nadawy (wektor U), z której to cechy wynika, że właśnie ta macierz najlepiej pokazuje zależność rozkładu cząstek w łożu osadzarki tylko od ich rozpraszania w procesie osadzania.

$$d_{ij} = \sum_{j=1}^j c_{ij} \text{ dla } i=1 \dots n \quad (18)$$

Rys. 5 (prawy) przedstawia wykres powierzchni jaką tworzą dystrybuanty wszystkich możliwych rozkładów warunkowych trafienia cząstek o gęstości i-tej frakcji do j-tej warstwy (równocześnie są to wykresy wszystkich możliwych krzywych rozdziału dla produktu lekkiego) dla braku ograniczeń gęstości warstw. Rys. 5 (lewy) przedstawia ten sam wykres przy z góry ustalonej i niezmienniej gęstości warstw.

Rys. 6 przedstawia wybrane krzywe rozdziału dla produktu lekkiego i dla warunków wzbogacania podanych dla rys. 5 odpowiednio przy istnieniu możliwości zmiany gęstości warstw i przy braku tej możliwości.

Macierz dystrybuanty dwuwymiarowej

Rozkład dwuwymiarowy dany macierzą A ma także dystrybuantę dwuwymiarową przedstawioną macierzą E, której element e_{ij} podaje prawdopodobieństwo trafienia cząstek frakcji od pierwszej do i-tej do warstw od pierwszej do j-tej. W interpretacji fizycznej jest to względna zawartość cząstek od 1 do i-tej frakcji gęstościowej nadawy w warstwach od 1 do j-tej odniesiona do masy wszystkich cząstek nadawy. Elementy tej macierzy pozwalają w prosty sposób obliczyć wychody produktów wzbogacania i w powiązaniu z macierzą P_{ij} także ich jakość wyrażoną zawartością popiołu. Dla rozkładu ciągłego dystrybuanty tego rozkładu podaje prawdopodobieństwo znalezienia cząstki o gęstości mniejszej od ρ_c w warstwach o gęstości mniejszej od ρ_w lub inaczej wszystkich cząstek lżejszych od przyjętej gęstości ρ_c we wszystkich warstwach o gęstości niższej niż przyjęta gęstość warstwy ρ_w odniesionych do masy wszystkich cząstek wzbogacanego materiału.

$$e_{ij} = \sum_{i=1}^i \sum_{j=1}^j a_{ij} \quad (19)$$

Macierz F jak i wszystkie następnie wyjaśniane macierze nie mają odpowiedników w teorii wzbogacania grawitacyjnego.

Jednowymiarowe warunkowe rozkłady mas cząstek o gęstości ρ_{ci} w warstwach o gęstości ρ_{wj} dla stałej gęstości warstwy

Przedstawiona już macierz A pozwala także na utworzenie macierzy F składającej się z n jednowymiarowych wektorów kolumnowych, z których każdy jest jednowymiarowym rozkładem prawdopodobieństwa trafienia cząstek o różnej gęstości do wybranej warstwy. Są to także rozkłady warunkowe, wynikające z drugiej możliwości utworzenia rozkładów warunkowych na podstawie ogólnej definicji możliwych rozkładów warunkowych rozkładu dwuwymiarowej zmiennej losowej (Goldberger 1960).

Element f_{ij} macierzy F, podaje prawdopodobieństwo trafienia i-tej cząstki do j-tej warstwy pod warunkiem, że uprzednio wybrana została j-ta warstwa. W interpretacji fizycznej jest to względna zawartość masy cząstek i-tej klasy gęstościowej nadawy w j-tej warstwie odniesiona do masy cząstek nadawy tworzących j-tą warstwę. W tym przypadku prostej interpretacji związanej z pojęciami możliwymi do utworzenia na potrzeby analizy łoża osadzarki nie mają wektory wierszowe tej macierzy.

$$f_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^n a_{ij}} = \frac{a_{ij}}{b_j} \quad (20)$$

Elementy g_{ij} macierzy G, podają prawdopodobieństwo znalezienia w j-tej warstwie cząstek frakcji gęstościowych nadawy od pierwszej do i-tej frakcji. Kolumny macierzy G_j są utworzone z rzędnych dystrybuant jednowymiarowych rozkładów warunkowych zawartości cząstek od pierwszej do i-tej frakcji gęstościowej nadawy w j-tej warstwie. W interpretacji fizycznej jest to względna zawartość sumy cząstek od 1 do i-tej frakcji gęstościowej nadawy w j-tej warstwie odniesiona do masy wszystkich cząstek tworzących tę warstwę. Można uważać, że każdy

wektor kolumnowy tej macierzy jest charakterystyką względnej zawartości frakcji określonej numerem i o gęstości ρ_{ci} oraz wszystkich od niej lżejszych w każdej warstwie odniesionej do masy wszystkich cząstek tej warstwy. Macierz G nie ma praktycznego zastosowania w obliczeniach prowadzonych w modelu. Podano jednak jej wyjaśnienie, ponieważ wynika ona z teorii prawdopodobieństwa, a ponadto jej elementy posiadają interpretację fizyczną mającą znaczenie dla zrozumienia modelu utworzonego bez oparcia w szczegółach zjawisk procesu osadzania. Taką interpretacją może być skład frakcyjny nadawy i produktów wzbogacania do niedawna szeroko stosowany w ocenie procesu przeróbki węgla w osadzarkach.

Dla wszystkich powyższych macierzy wielkością przyjętą do oceny prawdopodobieństwa jest odpowiednia część jednostkowej masy cząstek.

$$g_{ij} = \sum_{i=1}^i f_{ij} \quad (21)$$

Rozkłady objętości frakcji gęstościowych i warstw

Element h_{ij} macierzy H określa objętość zajmowaną w łożu przez cząstkę i -tej frakcji gęstościowej nadawy znajdującą się w j -tej warstwie. Jest to macierz pomocnicza służąca do obliczenia gęstości poszczególnych warstw jak i zajmowanych przez nie objętości oraz ich położenia w pionowym przekroju łoża. Jeżeli elementy h_{ij} tej macierzy podzielić przez sumę wszystkich wartości tych elementów to tak powstała macierz utworzy dwuwymiarowy rozkład objętości cząstek o gęstości ρ_i w warstwach o gęstości ρ_j , dla której można utworzyć analogiczne rozkłady warunkowe jak dla macierzy A , co umożliwi szczegółową analizę rozkładów objętościowych. Ponieważ w przeróbce węgla taka analiza jest stosowana bardzo rzadko (Woolcott 2015), więc tylko sygnalizuje się istnienie takiej możliwości bez jej dalszego rozwinięcia.

Elementy h_{ij} macierzy H są obliczane z zależności:

$$h_{ij} = \frac{a_{ij}}{\rho_i} \quad (22)$$

Rozkłady mas popiołu w warstwach łoża osadzarki

Element p_{ij} macierzy P określa masę popiołu zawartą w cząstkach i -tej frakcji gęstościowej znajdującej się w j -tej warstwie. Jest to macierz pomocnicza służąca do obliczenia zawartości popiołu w produktach wzbogacania, gdy dokonany jest podział rozwarstwowanego materiału na wysokości j -tej warstwy, wykonany tak, że cała j -ta warstwa zostanie zaliczona do produktu lekkiego (górnego). Obliczenia zawartości popiołu w poszczególnych klasach gęstościowych produktów wzbogacania wykonywane są także na podstawie tej macierzy. Jeżeli elementy p_{ij} tej macierzy podzielić przez sumę wszystkich wartości tych elementów to tak powstała macierz utworzy dwuwymiarowy rozkład zawartości popiołu w cząstkach o gęstości ρ_i i w warstwach o gęstości ρ_j , dla której można utworzyć analogiczne rozkłady warunkowe jak dla macierzy A , co pozwala na szczegółową analizę rozkładów popiołu. Tego rodzaju analiza także nie jest stosowana w przeróbce węgla.

Rys. 7 podaje obliczony rozkład objętości cząstek w poszczególnych warstwach i rozkład masy popiołu w tych warstwach. Oba rysunki podają stan tych rozkładów, gdy poszczególne warstwy mogą zmieniać swoje gęstości.

Z wstępnej analizy tego zagadnienia okazuje się, że rozkłady warunkowe mas dla stałej gęstości cząstki, rozkłady warunkowe objętości i rozkłady warunkowe zawartości popiołu są jednakowe, co powoduje, że także wszystkie krzywe rozdziału dla tych wielkości muszą być jednakowe. Sytuacja ta wynika z utworzenia elementów tych macierzy przez pomnożenie elementów macierzy A przez stały dla każdego wiersza czynnik. Powoduje to, że rozkłady warunkowe dla stałej gęstości cząstki dla rozkładu mas (macierz A), rozkładu objętości (macierz H), rozkładu popiołu (macierz P) są identyczne. Dlatego krzywe rozdziału wynikające z tych rozkładów muszą być jednakowe. Uwaga ta została podana, ponieważ przedstawione dwuwymiarowe rozkłady tych zmiennych skłaniają raczej do przyjęcia istnienia różnych krzywych rozdziału dla tych zmiennych.

Elementy p_{ij} macierzy P są obliczane z zależności:

$$p_{ij} = a_{ij} \lambda_i \quad (23)$$

Wektory wyjściowe modelu

Podane niżej wektory przyjęto jako wyjściowe ponieważ zawierają wyniki obliczeń, których uzyskanie było zasadniczym celem konstruowania tego modelu. Dla innych zastosowań można przyjąć wektory wyjściowe dowolny zestaw wektorów istniejących w modelu.

Na tym etapie prezentacji wielkości wyjściowych modelu pominięte zostaną wielkości skalarne charakteryzujące wyniki wzbogacania takie jak wychody i zawartość popiołu w produktach wzbogacania, straty frakcji węglowych w odpadach, zanieczyszczenie koncentratu frakcjami odpadowymi oraz inne tego rodzaju wskaźniki używane w przeróbce węgla.

Element w_{oj} wektora wierszowego W_o określa średnią względną wysokość nieruchomej warstwy czyli warstwy jaka powstanie w osadzarce wsadowej (tj. w osadzarce bez ciągłego poziomego przepływu wzbogacanego materiału) o numerze j wyrażoną w procentach całej wysokości wszystkich warstw.

$$w_{oj} = \frac{100 \sum_{i=1}^n h_{ij}}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n h_{ij}} \quad \text{dla } j = 1 \dots n \quad (24)$$

Element w_{rj} wektora wierszowego W_r określa średnią względną wysokość ruchomej warstwy o numerze j wyrażoną w procentach całej wysokości wszystkich ruchomych warstw.

$$w_{rj} = w_{oj} \frac{100 v_s}{v_{oj} \sum_{j=1}^{j=n} w_{oj}} \quad \text{dla } j = 1 \dots n \quad (25)$$

Element y_{oj} wektora wierszowego Y_o określa skumulowaną względną wysokość nieruchomej j -tej warstwy liczoną od sita w górę wyrażoną w procentach całej wysokości wszystkich warstw.

$$y_{oj} = \sum_j^{j=n} w_{oj} \quad \text{dla } j = 1 \dots n \quad (26)$$

Rys. 8 pokazuje obliczone wysokości poszczególnych warstw i położenie ich środków w przekroju wysokości łoża osadzarki, gdy w obliczeniach warstwy mogą zmieniać gęstości. Krzywa oznaczona 1 odnosi się do warstw nieruchomych, a krzywa 2 do warstw poruszających się poziomo z różnymi prędkościami według zależności danej wzorem (2).

Element y_{ij} wektora wierszowego Y_r określa skumulowaną względną wysokość ruchomej j -tej warstwy liczoną od sita w górę wyrażoną w procentach całej wysokości wszystkich warstw.

$$y_{ij} = \sum_j^{j=n} w_{ij} \quad \text{dla } j = 1 \dots n \quad (27)$$

Element z_{oj} wektora wierszowego Z_o określa położenie środka nieruchomej j -tej warstwy

$$z_{oj} = \frac{w_{oj}}{2} + \sum_{j+1}^{j=n} w_{oj} \quad \text{dla } j = 1 \dots n \quad (28)$$

Element z_{rj} wektora wierszowego Z_r określa położenie środka ruchomej j -tej warstwy

$$z_{rj} = \frac{w_{rj}}{2} + \sum_{j+1}^{j=n} w_{rj} \quad \text{dla } j = 1 \dots n \quad (29)$$

Element λ_{wj} wektora rozkładu zawartości popiołu Λ_w podaje wartość średniej zawartości popiołu w materiale zgromadzonym w j -tej warstwie

$$\lambda_{wj} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_{ij}}{\sum_{i=1}^n a_{ij}} \quad \text{dla } j = 1 \dots n \quad (30)$$

Element λ_{swj} wektora rozkładu średniej zawartości popiołu w lekkich warstwach Λ_{sw} podaje średnią zawartość popiołu w warstwach od pierwszej do j -tej w każdym etapie obliczeń. Ta wartość ułatwia wybór właściwej gęstości podziału rozwarstwowanego materiału dla uzyskania pożądanej zawartości popiołu w koncentracie węglowym lub w półprodukcie.

$$\lambda_{swj} = \frac{\sum_{j=1}^j \lambda_{jw}}{\sum_{j=1}^j \sum_{i=1}^n a_{ij}} = \frac{\sum_{j=1}^j \sum_{i=1}^n \lambda_{ij}}{\sum_{j=1}^j \sum_{i=1}^n a_{ij}} \quad \text{dla } j = 1 \dots n \quad (31)$$

Wielkościami wyjściowymi modelu są także wektory kolumnowe macierzy D , które w zestawieniu z elementami wektora wejściowego R_c podają współrzędne punktów wszystkich możliwych krzywych rozdziału dla dyskretnego podziału łoża na warstwy oraz już wcześniej opisany wektor rozkładu brzegowej warstwy B_w opisujący rozkład mas w warstwach.

Opis iteracyjnych obliczeń w modelu

Jeżeli w modelu wykonanym według przedstawionych zależności przyjąć jako stan początkowy rozkładu średnich gęstości cząstek zgromadzonych w poszczególnych warstwach czyli stan rozkładu gęstości warstw identyczny jak rozkład frakcji gęstościowych wzbogacanego materiału ($R_{wo} = R_c^T$) to okazuje się, że ten stan jest równy stanowi obliczonemu przez model tylko wtedy, gdy przyjmujemy zerowe rozproszenie cząstek ($S = 0$). Jest to stan przedstawiający wynik idealnego wzbogacania. Jednocześnie jest to końcowy stan rozkładu gęstości warstw dla innych znanych modeli. W każdym innym przypadku obliczona średnia gęstość cząstek w poszczególnych warstwach będzie różna od przyjętego stanu początkowego. Jeżeli przyjąć ten obliczony stan jako nowy stan początkowy i ponownie wykonać obliczenie to okazuje się że istniejące różnice gęstości warstw zmniejszają się. Postępując wielokrotnie w ten sposób można dojść do stanu różnic poszczególnych gęstości bliskich zeru lub zwiększania się tych różnic. Możliwa jest też sytuacja, gdy gęstość jednej z warstw gromadzących znikomo małą ilość ma-

teriału w wyniku odejmowania bardzo małych liczb przyjmie ujemną wartość. Pojawienie się w obliczeniach jednej z trzech przedstawionych możliwości jest przyjęte jako zakończenie iteracyjnych obliczeń. Matematycznym kryterium zakończenia obliczeń jest przyjęcie przez wyrażenie K_{zi} wartości bliskiej zeru lub jego wzrostu w 3 kolejnych krokach, o ile wcześniej nie pojawi się warstwa o ujemnej gęstości.

$$K_{zi} = \sum_{j=1}^{j=n} m_{jk} (\rho_{jk} - \rho_{j(k-1)})^2 \quad (32)$$

gdzie ρ_{jk} oznacza gęstość j -tej warstwy w k -tym kroku obliczeń iteracyjnych, a m_{jk} jest masą cząstek j -tej warstwy w k -tym kroku.

Przyjmuje się, że dopiero kolejny wzrost K_{zi} w trzecim kroku jest istotny, ponieważ w tym modelu zdarzają się sytuacje, że następują dwa niewielkie wzrosty wartości tego wyrażenia, w kolejnych krokach, po których następuje znaczący spadek jego wartości. Współczynnik wagi m_{jk} równy masie materiału zgromadzonej w j -tej warstwie w k -tym kroku został przyjęty, aby zminimalizować wpływ na wynik obliczeń warstw gromadzących znikome ilości materiału i jednocześnie stanowiących ilościowo zdecydowaną większość powstałych warstw.

Gęstość podziału i związek tego pojęcia z gęstością rozdziału

Dla dalszych rozważań przyjmuje się, że rozdzielenie rozwarstwowanego materiału na dwa produkty nie wpływa na uprzednio dokonane rozwarstwienie, a niedoskonałość tej części procesu osadzania objawia się tylko zmianą gęstości podziału na te produkty zmieniającą minimalnie nachylenia krzywej rozdziału i w znacznie większym stopniu gęstość rozdziału. W tym miejscu konieczne jest wyjaśnienie pojęcia gęstości podziału i jego związku z gęstością rozdziału. Gęstość rozdziału jest gęstością frakcji gęstościowej wzbogacanego materiału, która po połowie podzieli się między produkt lekki i ciężki, jest więc wielkością związaną z gęstością cząstek. Gęstość podziału jest zdefiniowana jako maksymalna gęstość zakresu gęstości tej warstwy, która w całości przez urządzenie rozdzielające rozwarstwiony materiał zostanie skierowana do produktu lekkiego i jednocześnie nie trafi do niego żadna część następnej warstwy, a taka operacja jest teoretycznie możliwa. Tak określona gęstość podziału jest pojęciem istniejącym tylko dla dyskretnego podziału materiału na warstwy i zmienia swój sens dla ciągłego rozkładu gęstości warstw. Dla rozkładu ciągłego istnieją tylko nieskończenie cienkie warstwy określone tylko jedną gęstością, co powoduje, że gęstość podziału jest tożsama z gęstością rozdziału. Każda warstwa materiału wzbogacanego nieidealnie gromadzi pewną ilość materiału o średniej gęstości charakteryzującej tę warstwę. Gdy masa cząstek zgromadzonych w tej warstwie jest mała błąd urządzenia rozdzielającego nie ma istotnego znaczenia dla dokonanego podziału, lecz istnieje wtedy poważny problem z detekcją położenia tej warstwy, ponieważ sąsiednie warstwy mogą mieć prawie taką samą gęstość. Dla warstw gromadzących względnie duże ilości wzbogacanego materiału różnice gęstości sąsiednich warstw są wystarczająco duże, aby w miarę precyzyjnie ustalić położenie granicy tych warstw. Jednak w tym przypadku urządzenie rozdzielające zawsze mające charakter regulatora nie jest w stanie precyzyjnie w całości skierować tej warstwy do produktu lekkiego. Wynika to z konieczności istnienia dynamicznej równowagi strumienia materiału tworzącego daną warstwę w łożu osadzarki i strumienia-

nia materiału tej warstwy opuszczającego przedział osadzarki, determinowanego głównie aktualnym otwarciem wypustu produktu ciężkiego. Ta dynamiczna równowaga jest utrzymywana przez regulator w stanie nieustalonym tylko w przybliżeniu, a jakość tego przybliżenia jest ściśle związana z dobrocią układu regulacji. Wskaźnik ten określający działanie układu regulacji jest ściśle zdefiniowany dla konkretnych zakłóceń oddziaływujących na układ. W praktyce wzbogacania mamy jednak do czynienia z bardzo wysokim poziomem zakłóceń o charakterze zbliżonym do szumu białego (Zapała 1988), co powoduje, że osiągalna technicznie dobroć układu regulacji jest dalece niewystarczająca do skierowania całej warstwy do produktu lekkiego. Mamy zatem sytuację, w której stosunkowo wysoka warstwa gromadząca znaczną masę cząstek jest dzielona przypadkowo na dwie części, co objawia się fluktuacją gęstości rozdziału przy formalnie niezmiennym gęstości podziału dla rozkładu dyskretnego. Jednak rzeczywista gęstość podziału w tym przypadku jest zmienna, lecz nie można jej dokładnie obliczyć z powodu znajomości tylko zakresu gęstości przypisywanych tej dyskretnej warstwie. W tym miejscu pojawia się rozbieżność z przedstawieniem tego zagadnienia w literaturze (Zapała 1988), gdzie gęstości podziału i rozdziału nie są rozróżniane oraz przyjmuje się istnienie możliwości dokładnego podziału rozwarstwowanego materiału lub nie zauważa się tego zagadnienia wśród przyczyn istnienia fluktuacji gęstości rozdziału (Cierpisz 2012). Problem ten ujawnia kolejne zagadnienie do rozwiązania polegające na określeniu zmiennych procesu wzbogacania w osadzarce odpowiadających za możliwość takiego sterowania gęstością podziału, aby otrzymać pożądaną gęstość rozdziału w sytuacji, gdy istnieje wyraźna interakcja między rozproszeniem cząstek i możliwością podziału łoża osadzarki na dwa produkty. Oddzielnym problemem jest jak tę gęstość można wyznaczyć empirycznie w praktyce wzbogacania.

Porównanie w innych modelach

Ideowo najbliższym już istniejącym modelem jest model Zapały (Zapała 1988, 1994) oparty na rozwiązaniu równania Ricattiego wynikającego z opisu dynamiki ruchu pojedynczej cząstki, gdy zostanie przyjęty opór dla ruchu cząstki jako zależny od kwadratu prędkości ruchu tej cząstki względem warstw łoża. Jego związek z przedstawianym modelem jest szczególnie widoczny, gdy poprzestać na obliczeniu rozkładu cząstek w warstwach łoża dla liniowej skali gęstości cząstek we wszystkich warstwach i symetrycznym położeniu średniej gęstości warstwy względem skrajnych gęstości. Odpowiada to działaniu nie pozwalającym na tworzenie się gęstościowo znacznie zróżnicowanych warstw przez pominięcie wszystkich dalszych kroków iteracji oprócz kroku pierwszego. Model Zapały jest modelem ciągłym znacznie węższym obliczeniowo, gdyż poprzestaje on na obliczeniu krzywych rozdziału i rozproszenia poszczególnych cząstek w warstwach oraz model ten nie dopuszcza zmian gęstości warstw. Jest to skutek przyjęcia założenia o stałej gęstości cieczy ciężkiej modelującej gęstość warstwy. Tymczasem jeżeli do tej warstwy trafi choć jedna cząstka o gęstości różnej od gęstości cieczy modelującej gęstość tej warstwy to gęstość tej cieczy musi ulec zmianie, a ta zmiana jest już w założeniach pominięta.

Innym znanym modelem rozkładu gęstości cząstek w warstwach łoża osadzarki jest model Kinga (Cierpisz 2012), którego eksperymentalne sprawdzenie zawarte jest w pracy

(Woolacott., 2015). Podobny wcześniejszy historycznie model nazywany modelem "osadzanie-powrotne mieszanie" (sedimentation/back-mixing) opisany jest w pracy (Jonkers..1998). Obydwa te modele obliczają objętościową koncentrację cząstek w warstwach łoża i dlatego są porównywalne z przedstawianym modelem, w którym ta wielkość jest możliwa do obliczenia. W obu tych modelach jest zastosowane w ich teoretycznym opisie zjawisko nie dające zauważalnych zmian w procesie osadzania, to jest zjawisko dyfuzji cząstek wzbogacanego materiału mającego wyjaśniać stan nieidealnego rozwarstwienia materiału w łożu osadzarki. Autor niniejszej pracy wykonał prosty eksperyment potwierdzający, że zjawisko dyfuzji nie ma istotnego wpływu na formowanie się łoża osadzarki. W laboratoryjnym przyrządzie zwanym aparatem Henriego (Stępiński 1964), którego ścianki są szklane umieszczono kolejno od dołu trzy warstwy materiału to jest marmuru, cegły i czystego węgla o gęstościach odpowiednio 2,7, 2,1 i 1,3 (wymiar ziaren 5–8 mm) i poddano procesowi osadzania. Gdyby zjawisko dyfuzji istniało na granicach poszczególnych warstw powinny pojawić się po pewnym czasie względnie niskie warstwy pomieszanych cząstek to jest węgla i cegły oraz cegły i marmuru, tak jak to ma miejsce w procesie rozwarstwiania wymieszanego materiału. Tymczasem w całym zakresie rozluźniania materiału spotykanym w procesie osadzania nie zaobserwowano pojawienia się tych warstw. Zjawisko to wystąpiło dopiero, gdy prędkość wody przepływającej przez rozwarstwiony idealnie materiał w fazie ruchu wody w górę stała się tak duża, że spowodowała całkowicie burzliwy ruch wszystkich cząstek łoża, W praktyce taka sytuacja spotykana jest tylko w warunkach nieprawidłowego działania osadzarki np. silnej pulsacji wody i braku w łożu odpowiednio wysokiej warstwy materiału w wyniku chwilowego podawania do maszyny zbyt małej ilości nadawy lub zbyt wysokiego ciśnienia powietrza oraz przy występowaniu obu tych przyczyn równocześnie. Można zauważyć, że dla obu porównywanych modeli prowadzi się obliczenia i ich eksperymentalne potwierdzenie tylko przy małej ilości rozdzielonych warstw (4-6) i bardzo wysokiej sprawności wzbogacania. Oszacowane z danych eksperymentu rozproszenie E_p wynoszące około 0,025 jest co najmniej trzy razy mniejsze od osiąganego przez najlepiej pracujące osadzarki. To nie pozwala na eksperymentalne zauważenie zjawisk wynikających z przedstawianego w tej pracy modelu, co prowadzi do przekonania, że oba porównywane modele mają eksperymentalne potwierdzenie w całym zakresie rozprożeń istniejących w procesie osadzania.

Przedstawiany model nie może być bezpośrednio porównany z modelami klasy DEM ze względu na całkowicie różne zmienne istniejące w tych modelach. Zmienne te mające fizyczny charakter nie mają bezpośredniego przełożenia na zmienne używane w prezentowanym modelu z powodów przedstawionych w założeniach modelu (Głowiak 2019). Z tych samych powodów nie można prezentowanego modelu porównać z modelami opracowanymi w byłym ZSRR, Japonii, Chinach i na Ukrainie (Samylin 1976, Jinnouchi 1978, Chen Ji 1994, Branspiz 1994) skoncentrowanych głównie na dynamice ruchu wody w osadzarce z uwzględnieniem wpływu na ten ruch cząstek wzbogacanego materiału.

Uwagi końcowe

Przedstawiony model pozwala także na obliczenie wszystkich wielkości skalarnych używanych w przeróbce węgla, a po-

miniętych w przedstawianiu wielkości modelu. Są to wychody produktów i ich parametry jakościowe, skład nadawy i produktów wzbogacania dla przyjętych gęstości granicznych poszczególnych frakcji gęstościowych na jakie dzieli się nadawę i produkty oraz wszystkie wskaźniki oceny procesu wzbogacania używane w przeróbce węgla.

Wielkości obliczane przez model mogą być wykorzystane do sporządzenia krzywych wzbogalności (wynik obliczeń dla $E_s = 0$) i krzywych wzbogacania (wynik obliczeń dla $E_s \neq 0$). Model pozwala na obliczenie rzeczywistych gęstości, wychodów i zawartości popiołu w poszczególnych warstwach, które mogą być uważane jako elementarne frakcje gęstościowe innego materiału surowego wzbogacanego idealnie ($E_s = 0$) o znanej ich masie i zawartości popiołu. Stwierdzenie to wynika ze spostrzeżenia, że wzbogacanie nieidealne może być uważane jako równoważne idealnemu wzbogacaniu materiału o innej charakterystyce. Można to udowodnić jak poniżej. Każda warstwa wzbogaconego nieidealnie materiału surowego ma swoją gęstość, masę i zawartość popiołu. Jeżeli wziąć frakcję gęstościową innego materiału surowego o dokładnie takiej gęstości, udziale w nadawie dającą tę samą masę o takiej samej zawartości popiołu jak w warstwie nieidealnie wzbogaconego materiału surowego i wzbogacić ją idealnie to otrzymamy taki sam wynik, jak dla wzbogacania nieidealnego. Stanie się tak dlatego, ponieważ cały ten inny materiał surowy znajdzie się w tylko w jednej warstwie, której parametry będą dokładnie takie same jak dla warstwy powstałej w wyniku wzbogacania rzeczywistego. To samo rozumowanie można powtórzyć dla każdej rzeczywistej warstwy z takim samym wynikiem, co kończy dowód. Ilość frakcji gęstościowych tego innego materiału jest zawsze równa ilości rozróżnialnych gęstościowo warstw materiału wzbogaconego w rzeczywistych (nieidealnych) warunkach.

Korzystając z faktu, że produkt lekki pierwszego przedziału typowej osadzarki jest nadawą dla przedziału drugiego można powielając obliczenia dla przedziału pierwszego utworzyć model osadzarki n-przedziałowej. Taki model utworzono dla osadzarki 2-przedziałowej, aby można było przeprowadzać obliczenia dla często spotykanego trójproduktowego wzbogacania węgla. Prezentowany model jest modelem probabilistycznym, w którego założeniach nie istnieją poszczególne zjawiska fizyczne tworzące proces osadzania. Jedynym założeniem mającym fizyczny charakter jest przyjęcie, że prawdopodobieństwo trafienia cząstki do danej warstwy jest funkcją różnicy gęstości warstwy i gęstości cząstki. Założenie to okazuje się wystarczające, aby wykazać, że wiele pojęć z rachunku prawdopodobieństwa związanych z tym modelem ma prostą fizyczną interpretację z zakresu teorii wzbogacania grawitacyjnego.

Wszystkie przedstawione na wykresach wyniki obliczeń wykonanych w modelu pochodzą z wersji modelu dla macierzy o wymiarach 32×32 elementy.

Wnioski

1. Przedstawiony model wskazuje na istnienie niezauważonych do tej pory w badaniach eksperymentalnych zjawisk w procesie osadzania oraz także nie wynikających ze znanych innych modeli tego procesu.
2. Obraz wzbogacania w osadzarce wynikający z prezentowanego modelu jest znacząco różny od spojrzenia na

ten proces wynikający z aktualnie obowiązującej teorii. Najbardziej widoczną różnicą jest bardzo mała ilość rozróżnialnych gęstościowo warstw łoża osadzarki dla przeciętnych rozprożeń osiąganych w tym procesie.

3. Wyraźnie widoczną przyczyną innego od znanych rozkładów gęstości i mas poszczególnych warstw w łożu osadzarki jest brak ograniczeń dla gęstości tworzących się warstw pominięty w innych modelach.
4. Opisany model łoża osadzarki potwierdza spostrzeżenie (Zapała 1988), że krzywa rozdziału nie jest całkową transformatą krzywej rozproszenia. Istnieje jednak związek między krzywą rozproszenia i krzywą rozdziału i jest on taki, że krzywa rozdziału jest zbiorem punktów różnych dystrybuant rozkładów warunkowych opisujących prawdopodobieństwo trafienia cząstki o gęstości ρ_c do warstwy o gęstości ρ_w pod warunkiem, uprzedniego wybrania gęstość cząstki wynoszącej ρ_c i ustalenia gęstość warstwy dzielącej rozwarstwiony materiał na dwa produkty.
5. Obserwowane w praktyce odkształcenia krzywej rozdziału od dystrybuanty rozkładu normalnego są wyjaśniane przez prezentowany model, jednak model także pokazuje, że całkowite wyjaśnienie przyczyny tego odkształcenia jest możliwe tylko przy pełnej empirycznej znajomości przynajmniej niektórych rozkładów rozpraszania cząstek o stałej gęstości w różnych warstwach.
6. Krzywe rozdziału obliczane w modelu tak znacząco różnie od krzywych stosowanych w aktualnych procedurach obliczeniowych prognozowania wyników wzbogacania sugerują konieczność poddanie tych procedur istotnym korektom.
7. Porównanie empirycznych składów gęstościowych nadawy i produktów wzbogacania oraz składów obliczonych ze stosowanych modeli krzywych rozdziału i z prezentowanego modelu rozkładu wskazuje na znacznie lepszą zbieżność obliczeń w modelu z danymi empirycznymi niż otrzymane ze znanych modeli. To porównanie ze względu na objętość zebranego materiału jak i ważność empirycznego potwierdzenia modelu będzie przedmiotem oddzielnego opracowania.
8. Dokładność prezentowanego modelu jest zależna od dokładności wyznaczenia charakterystyki gęstościowej wzbogacanego materiału, co ujawnia istotną słabość teorii grawitacyjnego wzbogacania w praktyce jej stosowania. Ta wada polega na braku tych danych dla gęstości wyższych od 2,0 spowodowaną niedostępnością tanich i bezpiecznych cieczy ciężkich o takich gęstościach.
9. Słabą stroną modelu jest konieczność znajomości rozkładu prędkości cząstek w łożu osadzarki. Zjawisko to do tej pory jest niedostatecznie zbadane, co skutkuje ograniczeniem stosowanie modelu dla warunków przemysłowych.
10. Istotną zaletą modelu jest pokazanie istnienia zależności między dokładnością stratyfikacji cząstek w łożu osadzarki i możliwością podziału warstw na dwa produkty.

Literatura – References

1. Bobrowski D. (1980) Probabilistyka w zastosowaniach technicznych WNT Warszawa str.47-50
2. Branspiz Y.A., Zagirnyak M.V. (1994) Refinement of Stochastic Model of Gravitational Coal Preparation Based on Einstein-Fokker-Planck Equation. Preprints of the 12th Coal Preparation Congress Cracow Vol.1, pp. 231-241
3. Cierpisz S. (2012) Automatyczna regulacja procesu wzbogacania węgla w osadzarkach. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej Gliwice str. 13-15, 28-33, 53-81, 89-106
4. Chen Ji (1994) Regular Group Mechanism of Stratification of Materials in Jigging Process, Preprints of the 12th ICPC, Cracow, Volume 1, pp. 253-271
5. Głowiak S. (2019) Założenia probabilistycznego modelu rozkładu gęstości ziaren w warstwach łoża osadzarki. Inżynieria Mineralna nr 1 (43) str.211-220
6. Goldberger A.S. (1972) Teoria ekonometrii PWN Warszawa str.24-29, 74-108.
7. Jinnouchi Y. Kawashima S. (1978) How to Predict and Optimize the Pulsation in the Air-Pulsated Jigs VIII International Coal Preparation Congress Donieck B5 pp.105-136
8. Jonkers A., Lyman G.J., Loveday G.K. (1998) Advances in Modelling of Stratification in Jigs XIII International Coal Preparation Congress Brisbane Vol.1, Paper G2 pp. 265-275
9. Kowol D. (2010) Wpływ zmian parametrów nadawy na efekty działania pływakowego układu sterowania odbiorem produktów osadzarki. Praca doktorska Politechnika Śląska w Gliwicach Wydział Górnictwa i Geologii str. 68-81, 88-94
10. Mishra B.K., Mehrotra S.P. (2001) A jig model based on the discrete element method and its experimental validation. Int.J. of Miner. Process., 63, pp. 177-189
11. Samylin H.A., Zołotko A.A., Poczinnok B.B. (1976) Otsadka, Moskwa Nedra str. 99-119
12. Srinivasan R., Mishra B.K., Mehrotra S.P. (1999) Simulation of Particle Stratification in Jigs Coal Preparation Vol. 20, pp. 55-70
13. Stępiński W. (1964) Wzbogacanie grawitacyjne PWN Łódź-Warszawa-Kraków str. 13, 126
14. Woolcott L.C., Bwalya M., Mabokela L. (2015) A validation study of the King stratification model Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy Volume 115 February pp.95-101
15. Zapała W. (1988) Opracowanie i cyfrowe badania symulacyjne algorytmów sterowania procesu wzbogacania węgla z wykorzystaniem pomiaru rozkładu frakcji densymetrycznych w łożu osadzarki Praca doktorska. Politechnika Śląska, Instytut Elektryfikacji i Automatyzacji Górnictwa Gliwice str. 48-68
16. Zapała W. (1994) Theoretical Model of the Curve Concerning Separation of the Jig Preprints of the 12th ICPC, Cracow, Volume 1, pp. 243-251

Probabilistic Model of Discrete Distribution of Layer Density in the Jig Bed

Presented paper is the detailed description of probabilistic model of discrete distribution of layer density in the jig bed, developed on the basis of its assumptions presented in the paper (Głowiak 2019). This elaboration contains all formulas describing the relationships existing in this model. The details of the assumptions were also given, which clear presentation was more advantageous to combine with the details of the calculations. The model was used to calculate the density distribution of particles in individual layers. These calculations show that there are significant differences in these distributions compared to other known models. Also the overall picture of the enrichment process in the jig adopted on the basis of previous experimental research and theoretical considerations is significantly different from the picture resulting from the presented model. Observed differences also turn out to be important for the practice of coal enrichment, indicating clearly the choice of the direction of jigs modernization significantly different from the trends currently prevailing among the designers of these machines. The presented model shows also incorrectness of currently used calculations to predict separation results using separation curves mainly due to the free choice of separation density. The choice of separation density in the actual jig operation process is significantly limited by the densities of the layers formed. The presented model shows that the mathematical approximation of the separation curves in the currently used calculation is not correct.

Keywords: *hard coal enrichment, jig, modeling of the jig operation, dispersion of grains, separation curves*