

Adam ŻUCHOWSKI

POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA, INSTYTUT AUTOMATYKI PRZEMYSŁOWEJ

Uwagi o rejestracji przebiegów czasowych z jednoczesną prognozą ich zmian**Prof. dr hab. inż. Adam ŻUCHOWSKI**

Profesor zwyczajny zatrudniony w Instytucie Automatyki Przemysłowej Politechniki Szczecińskiej. Ze szkolnictwem wyższym związany zawodowo od 1955 roku (Politechnika Wrocławska, Politechnika Szczecińska). Jest współtwórcą polskiej szkoły miernictwa dynamicznego, posiada w dorobku ponad 300 publikacji. W kwietniu 2005 roku upłynęło 50 lat jego działalności naukowej.



e-mail: chlod@ps.pl

Streszczenie

Rozpatrzono koncepcję rejestracji przebiegów czasowych $y(t)$ z jednoczesnym zapisem prognozy ich zmian $y(t+t_p)$ w pewnym przedziale $0 \leq t_p \leq t_{p \max}$. Rozpatrzono kilka koncepcji procedur prognozowania, ich błędy i zakres $t_{p \max}$.

Słowa kluczowe: rejestracja przebiegów, prognozy, dokładność prognoz

The Remarks on Recording of Time Variable Signals with Simultaneous Prediction of Signal Changes

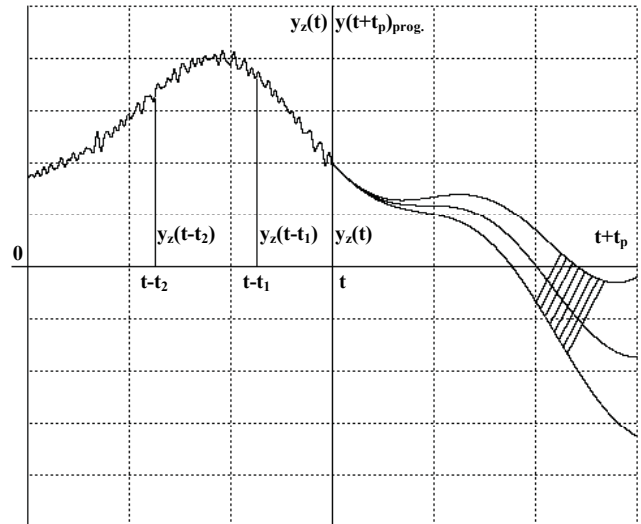
Abstract

The idea for recording of time-variable signals $y(t)$ with simultaneous recording of signal prediction $y(t+t_p)$ for certain $0 \leq t_p \leq t_{p \max}$ has been considered in the paper. The errors and ranges of $t_{p \max}$ for several ideas of prediction procedures have been discussed.

Keywords: Signal recording, prediction, accuracy of prediction

1. Wstęp

Uzasadnienie potrzeby dokumentowania wyników pomiarów jest zbędne. Służą do tego celu rejestratory – zastępowane współcześnie pamięcią komputera, w której notuje się skwantowane i dyskretne w czasie wartości sygnału $y(t) = y(n \cdot T)$, wraz z numeracją chwil czasu $t = n \cdot T$. Wykorzystanie metod grafiki pozwala utworzyć czytelny wykres przebiegu $y(t)$ w dowolnej skali zmiennej y i czasu t , a więc także gwarantującej czytelność [1]. Komputer może być jednocześnie wykorzystywany do wyznaczania prognozy rejestrowanego przebiegu w pewnym przedziale czasowym stanów przyszłych i utworzenia odpowiedniego wykresu – razem z zarejestrowanym wykresem dotychczasowej historii przebiegu $y(t)$ np. według zasady, którą ilustruje rys. 1. Odpowiednie wykresy są tworzone w sposób dyskretny i aktualizowane okresowo, co odstęp czasowy T zależy od użytego algorytmu prognozowania, i możliwości komputera. Tworzenie takich wykresów (na ekranie monitora) wydaje się celowe zwłaszcza w przypadku pomiarów przebiegów nie poddanych procesowi regulacji automatycznej (temperatura środowiska, przebiegi prądów i mocy w sieci elektrycznej itp.) Z uwagi na postulat odpowiednio częstego uaktualniania prognozy celowe jest stosowanie prostych metod jej wyznaczania i przynajmniej przybliżona ocena wiarygodności. Rozpatrzone tu problemy mają więc na celu rozszerzenie kręgu rozważań zawartych już w pracy [2].



Rys. 1. Ilustracja wykresu przebiegu sygnału $y(t)$ i jego prognozy. Oznaczenia t , oraz $y_z(t)$ są dyskretnym zapisem stanu w chwili bieżącej

Fig. 1. The signal $y(t)$ and result of its prediction. The discrete state in current moment is represented by t and $y_z(t)$.

2. Prognoza oparta o wzór interpolacyjny Lagrange'a

Użycie wzoru interpolacyjnego Lagrange'a:

$$y(t)_{in} = \sum_{i=1}^n y(t_i) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(t - t_j)}{(t_i - t_j)} \quad (1)$$

gwarantuje osiągnięcie przez funkcję $y(t)_{in}$ wartości zadanych $y(t_i)$ w chwilach czasu $t = t_i$. Wykorzystując ten wzór można wyznaczyć wartości prognozy $y(t_n+t)_{in}$ wykorzystując pomiary wartości $y(t_1)$, $y(t_2)$, ... $y(t_n)$ w chwilach poprzedzających i aktualnej t_n z błędami addytywnymi $\Delta y(t_1)$, ... $\Delta y(t_n)$ wynikającymi m.in. z obecności zakłóceń i niedokładności pomiaru. Uwzględniając, że $t_2 = t_1 + T$, $t_3 = t_1 + 2 \cdot T$, ... $t_n = t_1 + (n-1) \cdot T$ (chwila bieżąca), oraz oznaczając $t = r \cdot T$ otrzymuje się:

$$y(t_n + t)_{in} = y_z(t_1) \cdot \frac{t \cdot (t + T) \cdot (t + 2T) \dots (t + nT - T)}{(t + nT - T) \cdot T^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (-1)^{n-1}} +$$

$$y_z(t_2) \cdot \frac{t \cdot (t + T) \cdot (t + 2T) \dots (t + nT - T)}{(t + nT - 2T) \cdot T^{n-1} \cdot 1! \cdot (n-2)! \cdot (-1)^{n-2}} +$$

$$\dots$$

$$y_z(t_k) \cdot \frac{t \cdot (t + T) \cdot (t + 2T) \dots (t + nT - T)}{(t + nT - kT) \cdot T^{n-1} \cdot (k-1)! \cdot (n-k)! \cdot (-1)^{n-k}} +$$

$$\dots$$

$$y_z(t_n) \cdot \frac{(t + T) \cdot (t + 2T) \dots (t + nT - T)}{T^{n-1} \cdot (n-1)!}$$

a dla $t = r \cdot T$

$$\begin{aligned}
y(t_n + r \cdot T)_{in} &= y_z(t_1) \cdot \frac{r \cdot (r+1) \cdot (r+2) \dots (r+n-1)}{(r+n-1) \cdot (n-1)!} \\
&\cdot (-1)^{n-1} + y_z(t_2) \cdot \frac{r \cdot (r+1) \cdot (r+2) \dots (r+n-1)}{(r+n-2) \cdot 1! \cdot (n-2)!} \cdot (-1)^{n-2} \\
&+ y_z(t_k) \cdot \frac{r \cdot (r+1) \cdot (r+2) \dots (r+n-1)}{(r+n-k) \cdot (k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot (-1)^{n-k} \\
&\dots \dots \dots \\
&+ y_z(t_n) \cdot \frac{(r+1) \cdot (r+2) \dots (r+n-1)}{(n-1)!} \cdot (-1)^{n-n}
\end{aligned} \quad (2)$$

Błędy $\Delta y(t_1) = d_1, \Delta y(t_2) = d_2, \dots, \Delta y(t_n) = d_n$ mają charakter losowy i różne znaki. W skrajnym przypadku odpowiadające im składniki wzoru (2) mogą się sumować z jednakowymi znakami i wtedy dla $|d_1| = |d_2| = \dots = |d_n| = d$ otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
D &\leq d \cdot (1 + 2 \cdot r) \text{ dla } n = 2 \\
&d \cdot (1 + 4 \cdot r + 2 \cdot r^2) \text{ dla } n = 3 \\
&d \cdot \left(1 + \frac{40}{6} \cdot r + 6 \cdot r^2 + \frac{8}{6} \cdot r^3 \right) \text{ dla } n = 3 \\
&d \cdot \left(1 + \frac{32}{3} \cdot r + \frac{40}{3} \cdot r^2 + \frac{16}{3} \cdot r^3 + \frac{2}{3} \cdot r^4 \right) \text{ dla } n = 5
\end{aligned} \quad (3)$$

Błąd D rośnie bardzo szybko zarówno ze wzrostem liczby wykorzystanych pomiarów n , jak i ze wzrostem czasu prognozy r . I tak dla $r = 1$ otrzymuje się $D \leq d \cdot (2^n - 1)$, natomiast dla dużych r obowiązuje wzór przybliżony:

$$D \cong d \cdot \left\{ 2 \cdot e \cdot \left(1 + \frac{r}{n-1} \right) \right\}^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot (n-1)}} \quad (4)$$

Jeśli uwzględnić, że wzór Lagrange'a odpowiada interpolacji funkcji $y(t)$ wielomianem:

$$y(t)_{in} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot t^{i-1} \quad (5)$$

to dla uzyskania dobrej dokładności konieczne jest stosowanie dużych n , co powoduje lawinowy wzrost błędów pochodzących od zakłóceń i niedokładności pomiarów. Tym samym możliwości prognozowania dla większych r są tu mocno ograniczone. Wobec równoważności wzoru Lagrange'a i wzoru (5) wyznaczenie prognozy w oparciu o ten wzór i określenie współczynników a_i z pomiarów wartości $y_z(t_i)$ prowadzi do identycznych rezultatów.

3. Prognoza oparta o równania różnicowe

Dla dyskretnych wartości zmiennych można poszukiwać zależności $y(t_n + T)$ zapisanej jako $y(n+1)$ przy $n = t_n/T$ w postaci równania różnicowego rzędu r :

$$y(n+1) = \sum_{i=0}^{r-1} A_i \cdot y(n-i) \quad (6)$$

Wyznaczenie współczynników A_i np. metodą regresji w oparciu o znane wartości $y(n), y(n-1), \dots, y(n-k)$ dla odpowiednio dużych k umożliwia bardzo proste prognozowanie.

Ogólne rozwiązanie równania (6) można przedstawić w postaci:

$$y(n) = \sum_{i=1}^r c_i \cdot q_i^n \quad (7)$$

gdzie q_i są pierwiastkami równania charakterystycznego:

$$q^r = A_0 q^{r-1} + A_1 q^{r-2} + \dots + A_{r-1} \quad (8)$$

i tym samym wzór (6) może się okazać dokładnym w szeregu szczególnych przypadków, np. dla $y(n) = a^n \cos(b \cdot n + c)$ lub sumy kilku takich składników. W tych warunkach prognoza będzie całkowicie dokładna, przy braku zakłóceń. W innych wypadkach otrzyma się jedynie przybliżone wartości $y(n+1)$ i obliczanie współczynników należy powtarzać kolejno w każdym kroku, co komplikuje prognozowanie. Warto jednak zauważyć rzecz następującą: równanie różnicowe rzędu r o postaci:

$$y(n+1) = \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \binom{r}{i} y(n-i+1) \quad (9)$$

to jest dla równania charakterystycznego:

$$(q-1)^r = 0 \quad (10)$$

spełnia każda funkcja

$$y(n) = a_0 + a_1 \cdot n + \dots + a_2 \cdot n^2 + \dots + a_{i-1} \cdot n^{i-1} \quad (11)$$

i tym samym każda funkcja $y(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{r-1} \cdot t^{r-1}$ w związku z tym każda funkcja $y(t)$ dająca się dostatecznie dokładnie aproksymować wielomianem (11) może być opisana równaniem różnicowym (9) i zbędne jest wyznaczanie ciągle na nowo współczynników A_i , co upraszcza i przyspiesza prognozę. W najprostszym przypadku, gdy dopuszczalna jest interpolacja $y(t)$ wielomianem $y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ wystarczy zawsze używać równania różnicowego:

$$y(n+1) = 3 \cdot y(n) - 3 \cdot y(n-1) + y(n-2) \quad (12)$$

Ponieważ funkcja $y(t)$ może mieć inną postać, niż przyjęto, a wartości $y(n-1)$ będą mierzone z błędami – zatem przyjmując, że każda z wartości $y(n-1)$ we wzorze (12) jest wyznaczona z błędem d o niekorzystnym rozkładzie znaków otrzyma się $y(n-1)_{in}$ z błędem rzędu 7.d. Obliczając prognozę dla kolejnego kroku $y(n+2)$ z wykorzystaniem obliczonej już wartości $y(n-1)$ z wzoru (12) otrzyma się:

$$y(n+2) = 6 \cdot y(n) - 8 \cdot y(n-1) + 3 \cdot y(n-2) \quad (13)$$

z błędem rzędu 17.d, kolejno $y(n+3)$ z błędem 21.d itd. Taki lawinowy wzrost błędów zarówno przy zwiększaniu rzędu równania (9) (dokładniejsza interpolacja), jak i przy zwiększaniu numeru kroku prognozy przypomina wzrost błędów przy stosowaniu wzoru Lagrange'a i jest to zjawisko tego samego typu. Tym samym i ta metoda prognozowania – poza specjalnymi przypadkami nie wydaje się najlepsza.

4. Prognoza oparta o pomiar sygnału i jego pochodnych

Jeśli mierzony sygnał jest wstępnie filtrowany przez analogowy filtr o dynamice opisanej równaniem różniczkowym rzędu $r+1$ to dostępne obserwacjom są wartości filtrowanego sygnału $y_f(t)$ i jego r pochodnych już ze zmniejszonym udziałem zakłóceń. Tym samym prognozę $y_f(t+t_p)_{in}$ można wyznaczyć jako:

$$y_f(t+t_p)_{in} = \sum_{i=0}^r \frac{1}{i!} \cdot t_p^i \cdot y_f^{(i)}(t) \quad (14)$$

a pomijając zmniejszony już wpływ zakłóceń jej błąd ocenić jako:

$$D \cong \frac{1}{(r+1)!} \cdot t_p^{(r+1)} \cdot \left| y_f^{(r+1)}(t) \right|_{max} \quad (15)$$

W praktyce wartości $y_f(t)$ i jego pochodnych będą mierzone kolejno a więc z niezbędnymi opóźnieniami czasowymi (pomiar cyfrowy) t_0 pomiędzy pomiarem $y_f(t)$ a pomiarem jego pierwszej pochodnej, $2 \cdot t_0$ pomiędzy pomiarem $y_f(t)$ a pomiarem jego drugiej pochodnej itd.. Tym samym pierwsza pochodna będzie zmierzona z „błędem” równym $t_0 \cdot y^{(2)}(t)$ druga pochodna z „błędem” równym $2 \cdot t_0 \cdot y^{(3)}(t)$, trzecia odpowiednio f_z „błędem” $3 \cdot t_0 \cdot y^{(4)}(t)$ itp. Tym samym błąd prognozy zostanie dodatkowo powiększony o składnik:

$$D_I = \frac{1}{1!} \cdot t_0 \cdot t_p \cdot y_f^{(2)}(t) + \frac{1}{2!} \cdot 2 \cdot t_0 \cdot t_p^2 \cdot y_f^{(3)}(t) + \dots \quad (16)$$

niewielki przy małych wartościach t_0 . Tu istnienie filtru musi być oczywiście uwzględnione w definicji mesurandu, ale dla stosunkowo „gładkich” sygnałów (malejący udział wyższych pochodnych) prognoza może być wyznaczana w dość szerokich granicach i z niezłą dokładnością.

5. Prognoza przy założeniu losowości i stacjonarności sygnału

Dla losowego i stacjonarnego sygnału $y(t)$ można tzw. liniową prognozę jego stanu $y(t+t_p)$ wyrazić w postaci:

$$y(t+t_p)_{prog} = A_0 \cdot y(t) + A_1 y(t-t_1) + \dots + A_r \cdot y(t-t_r) \quad (17)$$

a współczynniki A_0, A_1, \dots, A_r wyznaczyć minimalizując średniokwadratowy błąd prognozy:

$$\overline{D}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^T \left\{ y(t+t_p) - y(t+t_p)_{prog} \right\}^2 \cdot dt \quad (18)$$

Ponieważ:

$$D^{-2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \int_{-T}^T \left(y^2(t+t_p) + A_0^2 \cdot y^2(t) + A_1^2 \cdot y^2(t-t_1) + \dots - 2 \cdot A_0 \cdot y(t+t_p) \cdot y(t) - 2 \cdot A_1 \cdot y(t+t_p) \cdot y(t-t_1) - \dots + 2 \cdot A_0 \cdot A_1 \cdot y(t) \cdot y(t-t_1) + \dots \right) \cdot dt$$

zatem:

$$\overline{D}^2 = R_y(0) \cdot (1 + A_0^2 + A_1^2 + \dots) - 2 \cdot A_0 \cdot R_y(t_p) - 2 \cdot A_1 \cdot R_y(t_p + t_1) - \dots + 2 \cdot A_0 \cdot A_1 \cdot R_y(t) + \dots \quad (19)$$

Parametry prognozy A_0, A_1, \dots wyznacza się teraz z układu równań:

$$\frac{\partial \overline{D}^2}{\partial A_i} = 0 \quad (20)$$

Jak łatwo zauważyć jest to układ równań liniowych wiążących parametry A_i z wartościami funkcji autokorelacji sygnału $R_y(v)$ i pozwala wyznaczyć średniokwadratowy błąd prognozy [3]. I tak w przypadku oparcia prognozy wyłącznie o pomiar aktualny $y(t)$ (lub gdy sygnał $y(t)$ stanowi proces Markowa) otrzymuje się:

$$y(t+t_p)_{prog} = y(t) \cdot \frac{R_y(t_p)}{R_y(0)} \quad (21)$$

z błędem średniokwadratowym:

$$\overline{D}_{min}^2 = R_y(0) \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{R_y(t_p)}{R_y(0)} \right)^2 \right\} \quad (22)$$

w przypadku wykorzystania wartości $y(t)$ i $y(t+t_1)$ otrzymuje się:

$$A_0 = \frac{R_y(t_p) \cdot R_y(0) - R_y(t_p + t_1) \cdot R_y(t_1)}{R_y(0)^2 - R_y(t_1)^2} \quad (23)$$

$$A_1 = \frac{R_y(0) \cdot R_y(t_p + t_1) - R_y(t_p) \cdot R_y(t_1)}{R_y(0)^2 - R_y(t_1)^2}$$

i błąd prognozy:

$$\overline{D}_{min}^2 = R_y(0) - \frac{R_y(0) \cdot R_y(t_p)^2 + 2 \cdot R_y(t_p) \cdot R_y(t_1) \cdot R_y(t_p) - R_y(0) \cdot R_y(t_p + t_1)}{R_y(0)^2 - R_y(t_1)^2} \quad (24)$$

a przy większej liczbie składników prognozy wzory jeszcze bardziej złożone. Ponieważ $R_y(t_p) < R_y(0)$ zatem w przypadku wzoru (21) prognozowana wartość $y(t+t_p)_{prog}$ zawsze w pierwszej fazie zmian t_p maleje w stosunku do wartości $y(t)$ reprezentującej ostatni pomiar. Także i dla tego typu prognoz błąd rośnie szybko ze wzrostem czasu t_p , a wyznaczanie funkcji autokorelacji wymaga specjalnego programu, wstępnych obliczeń przed rozpoczęciem rejestracji i być może okresowej kontroli stacjonarności mierzonego sygnału.

6. Podsumowanie

Ograniczono się do przeglądu najprostszych metod prognozowania opartych o niewielką liczbę łatwo dostępnych danych pomiarowych, przy nieznanym modelu obserwowanego procesu, w warunkach jego stosunkowo szybkich zmian. Z grupy omówionych najwłaściwszą wydaje się metoda wyznaczania prognozy w oparciu o wstępną filtrację sygnału (analogową) i wykorzystanie dostępnych pochodnych – ewentualnie krótkotrwałą prognoza z wykorzystaniem równań różnicowych typu (9). Wniosek taki może być przedwczesny i wymaga praktycznego potwierdzenia. Najprawdopodobniej istnieją także możliwości tworzenia prognoz innego typu – np. z wykorzystaniem filtrów fft. Bogaty wykaz literatury znaleźć można w pracy [4].

7. Literatura

- [1]. Stanisław Skoczowski: Teoria czytelności zapisu ciągłego rejestratorów analogowych. Zeszyty Naukowe Politechniki Szczecińskiej Nr 132, Prace Monograficzne Nr 66, Szczecin 1971 r.
- [2]. Adam Żuchowski: Rejestracja przebiegów z jednoczesną prognozą. Krajowy Kongres Metrologii, Warszawa 24-26.06.2001 r. Wyd. Politechniki Warszawskiej Tom 1, str. 65-68.
- [3]. Adam Żuchowski: Modele dynamiki i identyfikacja. Wyd. Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Szczecin 2003.
- [4]. G.E.P.Box, G.M. Jenkins: Analiza szeregów czasowych. Prognozowanie i sterowanie. PWN Warszawa 1983.