

## **Dr hab. Leszek Knopik, prof. nadzw. UTP**

Faculty of Management  
UTP University of Science and Technology  
Fordońska Street 430, 85-890 Bydgoszcz, Poland  
e-mail: knopikl@utp.edu.pl

## **Dr hab. inż. Klaudiusz Migawa, prof. nadzw. UTP**

Faculty of Mechanical Engineering  
UTP University of Science and Technology  
Al. prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz, Poland  
e-mail: klaudiusz.migawa@utp.edu.pl

### **Wielostanowy model decyzji eksploatacyjnych Multi-state model of maintenance policy**

**Słowa kluczowe:** utrzymanie, wymiana prewencyjna, zysk na jednostkę czasu, gotowość, rozkład czasu życia, funkcja intensywności uszkodzeń, klasa IFR, klasa MTFR

**Keywords:** maintenance, preventive replacement, profit per unit time, availability, lifetime distribution, failure rate function, IFR class, MTFR class

**Streszczenie:** Wymiany prewencyjne stosuje się w celu podnoszenia gotowości systemów eksploatacji maszyn i wzrostu dochodu na jednostkę czasu systemu eksploatacji. W pracy analizuje się model wymian obiektów technicznych według wieku dla n-stanowego systemu. Funkcja kryterialna stosowana w pracy wyraża zysk przypadający na jednostkę czasu lub współczynnik gotowości. Zakłada się, że rozkład prawdopodobieństwa czasu do uszkodzenia obiektu technicznego jest znany i strategia wymian prewencyjnych będzie stosowana na długim przedziale czasowym. Bada się problem maksymalizacji zysku na jednostkę czasu i współczynnika gotowości dla rosnącej funkcji intensywności uszkodzeń lub funkcji intensywności z szerszej klasy. Celem tej pracy jest sformułowanie warunków, przy których zysk na jednostkę czasu osiąga maksimum. W pracy pokazano, że badaną funkcję kryterialną (zysk na jednostkę czasu lub współczynnik gotowości) można wyrazić za pomocą metod rachunku macierzowego. Na końcu pracy przedstawiono przykład numeryczny oceny optymalnego wieku wymiany dla rzeczywistego procesu eksploatacji.

**Abstract:** Preventive replacement is applied to improve the device availability or increase the profit per unit time of the maintenance system. In this paper, we study age-replacement model of technical object for n-state system model. The criteria function applied in this paper describe profit per unit time or coefficient of availability. The probability distribution of a unit's failure time is assumed to be known, and preventive replacement strategy will be used over very long period of time. We investigate the problem of maximization of profit per unit time and coefficient availability for increasing the failure rate function of the lifetime and for a wider class of lifetime. The purpose of this paper is to obtain conditions under which the profit per unit time approaches a maximum. In this paper we shows that the criteria function (profit per unit time or coefficient availability) can be expressed using the matrix calculation method. Finally, a numerical example to evaluate an optimal replacement age is presented.

## 1. Wstęp

Zarządzanie systemami przemysłowymi wymaga implementacji różnych czynności eksploatacyjnych. Jednym z ważnych zadań, w których rola optymalizacji ekonomicznej będzie rosła jest utrzymanie systemu eksploatacji, w tym wymiana obiektów technicznych. Utrzymanie i wymiana nie jest tylko kwestią techniczną ale jest problemem ekonomicznym. Strategia utrzymania skoncentrowana na utrzymaniu prewencyjnym ma zastosowanie głównie w obszarze badań operacyjnych i nauk o zarządzaniu. Strategia wymian według wieku obiektów technicznych polega na tym, że obiekt jest wymieniany prewencyjnie, gdy osiągnie wiek  $T$ , lub korekcyjnie (uszkodzenie) przed osiągnięciem wieku  $T$ . Wymiany prewencyjne są mniej ekspansywne i tańsze niż wymiany korekcyjne. Wiadomo, że czas wymiany prewencyjnej jest na ogół krótszy od czasu wymiany korekcyjnej. Fundamentalne fakty dla wymian według wieku są zawarte w pracach [2, 3]. Przegląd wyników dotyczących wymian prewencyjnych jest w pracach [5, 21, 24]. Pewne uogólnienia klasycznego zagadnienia wymian prewencyjnych uzyskano w pracach [12, 13]. Znacznie później rozważano metody wymian prewencyjnych dla systemów wielostanowych. Badanie systemów wielostanowych prowadzono w [14-19, 25-26]. W pracy [7] do analizy niezawodności systemów wielostanowych wykorzystuje się zmienne rozmyte (zbiory rozmyte), natomiast w pracy [22] bada się systemy wielostanowe ze składowymi z minimalną naprawą. Wykorzystanie metod symulacji do badania odnow prewencyjnych przedstawiono w pracy [20]. W tej pracy bada się systemy eksploatacji, w których obiekt techniczny może znajdować się w danej chwili w jednym z  $n$  stanów. Dla takich systemów bada się optymalne wymiany prewencyjne, bazujące na funkcji kryterialnej wyrażającej zysk na jednostkę czasu lub współczynnik gotowości. Budowa funkcji kryterialnej oparta jest na własnościach procesu semi-Markowa [6, 9], w przeciwieństwie do klasycznego podejścia opartego na teorii odnowy. Najczęściej cytowaną pracą w definiowaniu funkcji kryterialnej w oparciu o elementy teorii odnowy jest praca [23]. Praca zawiera analizę warunków dostatecznych istnienia maksimum zysku na jednostkę czasu i maksimum asymptotycznego współczynnika gotowości  $n$ -stanowego systemu eksploatacji. Wartości funkcji kryterialnej zależą od rozkładu czasu życia, wartości średniej czasu wymiany prewencyjnej, wartości średniej czasu naprawy, wartości średnich czasów przebywania w pozostałych stanach, zysków na jednostkę czasu, macierzy prawdopodobieństw przejścia włożonego w proces semi-Markowa łańcucha Markowa.

W rozdziale 2 przedstawiono podstawowe oznaczenia i założenia wykorzystywane w pracy. W rozdziale 3 zbudowano model procesu eksploatacji obiektu technicznego i utworzono funkcję kryterialną opisującą zysk przypadającego na jednostkę czasu przy nieskończonym horyzoncie czasowym. W tym rozdziale bada się własności funkcji kryterialnej modelu wymian według wieku. Podstawowym celem tego rozdziału jest wprowadzenie do badań funkcji kryterialnej w macierzowej postaci. W rozdziale 4 analizuje się warunki dostateczne istnienia maksimum zysku na jednostkę czasu oraz asymptotyczny współczynnik gotowości. Warunki istnienia ekstremum funkcji kryterialnej sformułowano dla klasy rozkładów z rosnącą funkcją intensywności uszkodzeń (IFR) i dla szerszej klasy wprowadzonej przez jednego z autorów klasy (MTFR). Przykład numeryczny optymalizacji zysku na jednostkę czasu dla 8-stanowego systemu utrzymania analizowano w rozdziale 5. W przykładzie przyjęto, że czas życia obiektu technicznego ma rozkład Weibulla. Dane do tego przykładu pozyskano z rzeczywistego procesu eksploatacji autobusów miejskich.

## 2. Oznaczenia i założenia przyjęte w pracy

W pracy bada się semimarkowski model wymian prewencyjnych według wieku. Rozważa się  $n$ -stanowy proces semimarkowski  $X(t)$  z przestrzenią stanów  $S = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Jeśli  $X(t) = i$ , to rozważany obiekt techniczny w chwili  $t$  jest w stanie  $i$ . Zakłada się, że 1 jest stanem pracy bezawaryjnej, 2 jest stanem naprawy,  $n$  jest stanem wymiany prewencyjnej, pozostałe stany  $i$ , gdzie  $2 \leq i \leq n-1$  są innymi stanami utrzymania systemu.

Przez  $z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , oznacza się zysk na jednostkę czasu dla stanu  $i$ . W pracy zakłada się, że  $z_1 > 0$ ,  $z_i \leq 0$  dla  $2 \leq i \leq n$ . Jeśli obiekt techniczny jest w stanie 1, to przynosi zysk, natomiast jeśli obiekt techniczny jest w stanie  $i$ , gdzie  $2 \leq i \leq n$ , to obiekt techniczny generuje stratę.

Zakłada się, że  $\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < \dots$  są chwilami skoku i  $v_k < \tau_k - \tau_{k-1}$  dla  $k \geq 1$ ,  $v_0 = 0$  są czasami pobytu w stanach procesu  $X(t)$ . Proces semimarkowski jest w pełni określony, jeśli znany jest rozkład początkowy

$$P\{X(0) = i\} = p_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

i jego semimarkowskie jądro definiowane przez macierz

$$Q(t) = [Q_{ij}(t)], \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie

$$Q_{ij}(t) = P\left\{X(\tau_{k+1}) = j, \tau_{k+1} - \tau_k < t \mid X(\tau_k) = i\right\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Ciąg  $X(\tau_k)$ ,  $k \in N$  zmiennych losowych jest łańcuchem Markowa z macierzą prawdopodobieństw przejścia

$$P = [p_{ij}] = [Q_{ij}(\infty)] \quad \text{dla } i, j = 1, 2, \dots, n$$

nazywa się włożonym łańcuchem Markowa. Zmienne losowe  $T_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  oznaczają czasy przebywania w stanie  $i$  mają dystrybuanty postaci:

$$F_i(t) = P\{T_i < t\} = P\{\tau_{k+1} - \tau_k < t \mid X(\tau_k) = i\}$$

lub inaczej

$$F_i(t) = \sum_{j=1}^n Q_{ij}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Dystrybuanta czasu przebywania w stanie  $i$ , przed przejściem do stanu  $j$ , definiowana jest następująco

$$F_{ij}(t) = P\left\{\tau_{k+1} - \tau_k < t \mid X(\tau_{k+1}) = j, X(\tau_k) = i\right\}, \quad \text{dla } i, j = 1, 2, \dots, n, k \in N. \quad (2)$$

Dla dystrybuanty  $F_{ii}(x)$  zdefiniowanej wzorem (2) zakłada się, że zachodzi  $F_{ii}(x) = F_i(x)$  dla  $i = 2, 3, 4, \dots, n$ . Podczas konstrukcji funkcji kryterialnej wykorzystuje się twierdzenie graniczne dla skończonych procesów semimarkowskich [6, 8]. Zakłada się, że wartości średnie  $ET_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  są skończone, dodatnie i łańcuch Markowa  $X(\tau_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , ma jedną klasę ergodyczną. Te założenia pozwalają na sformułowanie twierdzenia granicznego postaci

$$P_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = j\} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = j \mid X(0) = i\} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie

$$P_j = \frac{p_j^* E T_j}{\sum_{k=1}^n p_k^* E T_k}, \quad (3)$$

gdzie  $p_j^*$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, n$  jest rozkładem granicznym włożonego łańcucha Markowa  $X(\tau_k)$ ,

gdzie  $k \in \mathbb{N}$  z macierzą prawdopodobieństw przejścia  $P = [p_{ij}]$ , gdzie  $p_{ij} = Q_{ij}(\infty)$ ,  $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$ . Prawdopodobieństwa graniczne  $p_j^*$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, n$  są rozwiązaniem układu równań liniowych

$$\sum_{i=1}^n p_i^* p_{ij} = p_j^* \quad \text{z warunkiem } \sum_{i=1}^n p_i^* = 1, \quad \text{gdzie } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

### 3. Funkcja kryterialna

Niech  $X(t)$  będzie procesem semimarkowskim z ciągłym jądrem  $Q(t)$ . Definiuje się proces zliczający

$$K_j(t) = \int_0^t I\{X(u) = j\} du,$$

gdzie  $I$  jest indykatorem określonym następująco

$$I\{X(u) = j\} = \begin{cases} 1 & \text{for } X(u) = j, \\ 0 & \text{for } X(u) \neq j. \end{cases}$$

Jest to sumaryczny czas przebywania procesu  $X(t)$  w stanie  $i$  oraz w przedziale  $[0, t]$ . Wartość

$$L(t) = \sum_{i=1}^n z_i E K_i(t)$$

jest oczekiwanym zyskiem na jednostkę czasu w przedziale  $[0, t]$ . Granica

$$L = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(t)}{t}$$

jest oczekiwanym zyskiem na jednostkę czasu dla nieskończonego przedziału czasowego. Granica jest podstawą do budowaniu funkcji kryterialnej. Z definicji procesu  $K_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , jest

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E K_j(t)}{t} = P_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

stąd

$$L = \sum_{i=1}^n z_i P_i.$$

Zgodnie z (3) zachodzi

$$L = \frac{\sum_{i=1}^n z_i p_i^* E T_i}{\sum_{i=1}^n p_i^* E T_i}. \quad (4)$$

Jednostka jest wymieniana w wieku  $T$  lub gdy jest uszkodzona, którekolwiek nastąpi wcześniej. Przez  $T_1(x)$  definiuje się czas do wymiany lub uszkodzenia. Zmienną  $T_1(x)$  można zapisać jako

$$T_1(x) = \begin{cases} T_1, & \text{if } T_1 < x, \\ x, & \text{if } T_1 \geq x. \end{cases} \quad (5)$$

Wykorzystując wzór (5) otrzymuje się semimarkowski proces z macierzą prawdopodobieństw przejścia  $P(x)$  włożonego łańcucha Markowa. Elementy pierwszego wiersza macierzy  $P(x)$  zależą od  $x$ . Dla  $p_{1n}(x)$  jest

$$\begin{aligned} p_{1n}(x) &= P\{X(\tau_{k+1}) = n \mid X(\tau_k) = 1\} = \\ &P\{X(\tau_{k+1}) = n \mid X(\tau_k) = 1, T_1 < x\} P\{T_1 < x \mid X(\tau_k) = 1\} + \\ &P\{X(\tau_{k+1}) = n \mid X(\tau_k) = 1, T_1 \geq x\} P\{T_1 \geq x \mid X(\tau_k) = 1\}. \end{aligned}$$

Z (5) wynika, że

$$P\{X(\tau_{k+1}) = n \mid X(\tau_k) = 1, T_1 \geq x\} = 1.$$

Wykorzystując własności prawdopodobieństwa warunkowego, uzyskuje się:

$$P\{X(\tau_{k+1}) = n \mid X(\tau_k) = 1, T_1 < x\}$$

$$P\{X(\tau_{k+1}) = n, T_1 < x \mid X(\tau_k) = 1\} / P\{T_1 < x \mid X(\tau_k) = 1\} = Q_{1n}(x) / F_1(x),$$

stąd

$$p_{1n}(x) = Q_{1n}(x) + R_1(x), \text{ gdzie } R_1(x) = 1 - F_1(x).$$

Z (2) wynika, że

$$p_{1n}(x) = p_{1n} F_{1n}(x) + R_1(x).$$

Podobnie, dla prawdopodobieństwa  $p_{1i}(x)$  gdzie  $2 \leq i \leq n-1$ , wynika:

$$\begin{aligned} p_{1i}(x) &= P\{X(\tau_{k+1}) = i \mid X(\tau_k) = 1\} = \\ &P\{X(\tau_{k+1}) = i \mid X(\tau_k) = 1, T_1 < x\} P\{T_1 < x \mid X(\tau_k) = 1\} + \\ &P\{X(\tau_{k+1}) = i \mid X(\tau_k) = 1, T_1 \geq x\} P\{T_1 \geq x \mid X(\tau_k) = 1\}. \end{aligned}$$

Z definicji (5) wnioskuje się

$$P\{X(\tau_{k+1}) = i \mid X(\tau_k) = 1, T_1 \geq x\} = 0,$$

stąd wynika, że

$$P\{X(\tau_{k+1}) = i \mid X(\tau_k) = 1, T_1 < x\} = Q_{li}(x) / F_1(x)$$

oraz

$$p_{li}(x) = Q_{li}(x) = p_{li}F_{li}(x) \text{ dla } i = 2, 3, \dots, n-1.$$

Teraz macierz  $P(x)$  prawdopodobieństw przejścia jest następująca

$$P(x) = \begin{bmatrix} 0 & p_{12}F_{12}(x) & p_{13}F_{13}(x) & \dots & p_{1n}F_{1n}(x) + R_1(x) \\ p_{21} & 0 & p_{23} & \dots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & 0 & \dots & p_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Na podstawie (4) funkcja kryterialna może być zapisana w postaci

$$g(x) = \frac{ET_1(x)z_1p_1^*(x) + \sum_{i=2}^n ET_i z_i p_i^*(x)}{ET_1(x)p_1^*(x) + \sum_{i=2}^n ET_i p_i^*(x)}, \quad (6)$$

gdzie  $p_i^*(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  są prawdopodobieństwami granicznymi łańcucha Markowa z macierzą przejścia  $P(x)$ , natomiast  $ET_1(x)$  jest wartością średnią zmiennej losowej  $T_1(x)$ . Wartości średnią  $ET_1(x)$  oblicza się ze wzoru

$$ET_1(x) = \int_0^x dF_1(t) + xP\{T_1 \geq x\}.$$

Całkując przez części, otrzymuje się

$$ET_1(x) = \int_0^x R_1(t) dt. \quad (7)$$

Prawdopodobieństwa graniczne  $p_i^*(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  spełniają następujący układ równań liniowych

$$\begin{bmatrix} -1 & p_{21} & p_{31} & \dots & p_{n1} \\ p_{12}F_{12}(x) & -1 & p_{32} & \dots & p_{n2} \\ p_{13}F_{13}(x) & p_{23} & -1 & \dots & p_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{1n}F_{1n}(x) + R(x) & p_{2n} & p_{3n} & \dots & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^*(x) \\ p_2^*(x) \\ p_3^*(x) \\ \dots \\ p_n^*(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Układ równań liniowych jest jednorodny i posiada nieskończoną liczbę rozwiązań. Zastępując ostatnie równanie układu (8), przez warunek normalizacyjny postaci

$$\sum_{i=1}^n p_i^*(x) = 1, \quad (9)$$

układ równań liniowych ma postać

$$\begin{bmatrix} -1 & p_{21} & p_{31} & \dots & p_{n1} \\ p_{12}F_{12}(x) & -1 & p_{32} & \dots & p_{n2} \\ p_{13}F_{13}(x) & p_{31} & -1 & \dots & p_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^*(x) \\ p_2^*(x) \\ p_3^*(x) \\ \dots \\ p_n^*(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Przez  $u_i(x)$  oznacza się dopełnienie algebraiczne  $i$ -tej jedynki  $n$ -tego wiersza macierzy układu równań (10). Uwzględniając prawą stronę układu (10) rozwiązanie tego układu ma postać  $p_i^*(x) = u_i(x) / W(x)$ , gdzie  $W(x)$  jest wyznacznikiem układu (10). Kładąc  $u_i(x)$  we wzorze (6) zamiast  $p_i^*(x)$ , funkcja kryterialna (6) nie zmienia wartości. Z własności wyznaczników, licznik funkcji kryterialnej (6) można zapisać jako

$$L(x; z_1, z_2, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} -1 & p_{21} & p_{31} & \dots & p_{n1} \\ p_{12}(x) & -1 & p_{32} & \dots & p_{n2} \\ p_{13}(x) & p_{23} & -1 & \dots & p_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1 ET_1(x) & z_2 ET_2 & z_3 ET_3 & \dots & z_n ET_n \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Mianownik  $M(x)$  funkcji kryterialnej (6) wyraża się jako:  $M(x) = L(x; 1, 1, \dots, 1)$ . Ze wzoru (11) wynika, że funkcję kryterialną (6) można teraz zapisać jako iloraz wyznaczników

$$g(x) = L(x; z_1, z_2, \dots, z_n) / L(x; 1, 1, \dots, 1). \quad (12)$$

Ostatnia równość jest ważnym wynikiem tej pracy. Przedstawienie funkcji kryterialnej  $g(x)$  w postaci (12) umożliwia obliczanie wartości funkcji bez wyznaczania prawdopodobieństw granicznych  $p_i^*(x)$ . W pracy [9] funkcję kryterialną  $g(x)$  wyrażono w postaci (6). Przez  $A_1$  oznacza się dopełnienie algebraiczne elementu  $z_1 ET_1(x)$ . Wiadomo, że  $A_1$  nie zależy od  $x, z_2, z_3, \dots, z_n$ . Przez  $D_i(x)$  oznacza się dopełnienie algebraiczne  $i$ -tej jedynki w macierzy układu równań (10). Prawdopodobieństwo graniczne  $p_i^*(x)$  wyraża się wzorem

$$p_i^*(x) = D_i(x) / W(x), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

gdzie  $W(x)$  jest wyznacznikiem macierzy układu równań (10). Macierz uzyskana z macierzy układu (10) przez skreślenie  $n$ -tego wiersza i  $n$ -tej kolumny posiada dominującą przekątną. Oznacza to w tym przypadku, że suma elementów każdej kolumny z pominięciem elementu na przekątnej jest mniejsza od 1. Na podstawie własności macierzy [4] wynika, że znak dopełnienia elementu  $z_n ET_n$  można zapisać w postaci  $(-1)^{n-1}$ . Na podstawie (13) wnioskuje się, że znak wyznacznika  $W(x)$  jest równy także  $(-1)^{n-1}$ . Wyznacznik dopełnienia  $D_1(x)$  jest

wyznacznikiem z macierzy niezależnej od  $x, z_1, z_2, \dots, z_n$  i znak tego wyznacznika jest równy  $(-1)^{n-1}$ . Licznik i mianownik funkcji kryterialnej  $g(x)$  danej wzorem (13) mnoży się przez  $W(x)$   $(-1)^{n-1}$ . Przyjmując powyższe oznaczenia funkcję kryterialną  $g(x)$  daną wzorem (6) można zapisać w postaci

$$g(x) = \frac{Az_1 ET_1(x) + \sum_{i=2}^n z_i ET_i E_i(x)}{AET_1(x) + \sum_{i=2}^n ET_i E_i(x)}, \quad (14)$$

gdzie  $E_i(x) = D_i(x) (-1)^{n-1}$ ,  $A = A_1 (-1)^{n-1}$ . Wiadomo teraz, że dla każdego  $x \geq 0$  jest  $E_i(x) \geq 0$  i  $A \geq 0$ . Z postaci macierzy układu równań (10) wnioskuje się, że  $E_i(x)$  jest funkcją liniową dystrybuanty  $F_1(x)$ . Istnieją stałe  $G_i$  i  $H_i$  takie, że  $E_i(x) = G_i F_1(x) + H_i$ . Kładąc  $x = 0$ , wnioskuje się, że  $H_i \geq 0$ .

Przyjmując:

$$B_1 = \sum_{i=2}^n z_i ET_i G_i, \quad C_1 = \sum_{i=2}^n z_i ET_i H_i, \quad B = \sum_{i=2}^n ET_i G_i, \quad C = \sum_{i=2}^n ET_i H_i \quad (15)$$

funkcję kryterialną (14) można zapisać jako

$$g(x) = \frac{Az_1 ET_1(x) + B_1 F_1(x) + C_1}{AET_1(x) + BF_1(x) + C}. \quad (16)$$

Łatwo jest zauważyć, że  $g(0) = C_1 / C \leq 0$  oraz  $g(\infty) = (A z_1 ET_1 + B_1 + C_1) / (A ET_1 + B + C)$ .

#### 4. Warunki dostateczne istnienia maksimum funkcji kryterialnej

W tym podpunkcie pracy formułuje się warunki dostateczne istnienia maksimum funkcji kryterialnej przy założeniu, że czas do uszkodzenia  $T_1$  jest zmienną losową o rosnącej funkcji intensywności uszkodzeń  $\lambda_1(t)$ . Fakt ten zapisuje się następująco:  $T_1 \in$  IFR (Increasing Failure Rate). Drugą rozważaną klasą rozkładów jest klasa z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń zawarta w klasie MTFR (Mean Time to Failure or Repair). Własności klasy MTFR szczegółowo badano w pracach [1, 10, 11]. Pochodna  $g'(x)$  funkcji kryterialnej wyraża się wzorem

$$g'(x) = \{A[B_1 - Bz_1][ET_1(x)f_1(x) - F_1(x)R_1(x)] + R_1(x)A(Cz_1 - C_1) + f_1(x)(B_1C - BC_1)\} / M^2(x),$$

gdzie  $M(x)$  jest mianownikiem we wzorze (16). Ostatecznie pochodną  $g'(x)$  można zapisać jako

$$g'(x) = \frac{1}{M^2(x)} (A\alpha r_1(x) + \beta R_1(x) + f_1(x)\gamma), \quad (17)$$

gdzie:



$$\begin{aligned}
\alpha &= A(B_1 - Bz_1), \\
\beta &= A(Cz_1 - C_1), \\
\gamma &= B_1C - BC_1, \\
r_1(x) &= ET_1(x)f_1(x) - F_1(x)R_1(x).
\end{aligned}
\tag{18}$$

Na początku rozdziału 2 przyjęto założenie, że  $z_1 > 0$ ,  $z_i \leq 0$  dla  $2 \leq i \leq n$ . To założenie oraz wzory (15), (16), (17) i (18) pozwalają na sformułowanie wniosków 1 i 2.

Wniosek 1. Jeśli  $z_1 > 0$ ,  $z_i \leq 0$ ,  $F_{1i}(x) = F_1(x)$  dla  $i = 2, 3, 4, \dots, n$ , to prawdziwa jest nierówność  $\beta > 0$ .

Wniosek 2. Jeśli  $z_i = z_j$  dla  $2 \leq i \leq n$ ,  $2 \leq j \leq n$ , to  $\gamma = 0$ .

Tezy wniosków 1 i 2 są bardzo użyteczne podczas formułowania kryteriów istnienia maksimum współczynnika gotowości (wnioski 7 i 8). Niżej zakłada się, że funkcja intensywności uszkodzeń  $\lambda_1(x)$  jest ciągła dla  $t \geq 0$ .

Wniosek 3. Jeśli  $T_1 \in \text{IFR}$ ,  $\beta + \gamma f(0^+) > 0$ ,  $\alpha < 0$ ,  $\gamma < 0$ ,  $A\alpha(ET_1 \lambda_1(\infty) - 1) + \beta + \gamma \lambda_1(\infty) < 0$ , to funkcja kryterialna  $g(x)$  osiąga dokładnie jedno maksimum.

Dowód. Przyjmuje się, że  $\lambda_1(\infty)$  jest granicą funkcji  $\lambda_1(t)$  przy  $t \rightarrow \infty$  lub kresem górnym funkcji  $\lambda_1(t)$  przy  $t \rightarrow \infty$ . Niech  $s(x) = \alpha r(x) + \beta + \gamma \lambda_1(x)$ , gdzie  $r(x) = \lambda_1(x) ET_1(x) - F(x)$ . Ze wzoru (17) wynika, że znak pochodnej  $g'(x)$  jest taki sam jak znak funkcji  $s(x)$ . Z założeń  $\alpha < 0$ , i  $\gamma < 0$  wynika, że funkcja  $s(x)$  jest ciągła i malejąca od  $s(0) = \beta + \gamma f_1(0^+)$  do  $s(\infty) = A\alpha(ET_1 \lambda_1(\infty) - 1) + \beta + \gamma \lambda_1(\infty)$ . Jeśli  $s(0) > 0$  i  $s(\infty) < 0$ , to istnieje dokładnie jedno  $x_0$  takie, że  $s(x_0) = 0$  i  $g'(x_0) = 0$ . Stąd  $g(x)$  osiąga jedno maksimum.

Wniosek 4. Jeśli  $T_1 \in \text{IFR}$ ,  $\alpha < 0$ ,  $\beta + \gamma f_1(0^+) < 0$ ,  $\lambda_1(\infty) = \infty$ , to funkcja kryterialna  $g(x)$  osiąga dokładnie jedno maksimum.

Dowód. Jeśli  $\lambda_1(\infty) = \infty$ , to  $s(\infty) < 0$ . Na podstawie wniosku 3 wynika, że funkcja kryterialna  $g(x)$  osiąga dokładnie jedno maksimum.

Z wniosku 4 wynika następujący wniosek:

Wniosek 5. Jeśli  $T_1 \in \text{IFR}$ ,  $\alpha < 0$ ,  $f_1(0^+) = 0$ ,  $\lambda_1(\infty) = \infty$ , to funkcja kryterialna  $g(x)$  osiąga dokładnie jedno maksimum.

Wnioski 3, 4 i 5 Zawierają warunki dostateczne istnienia maksimum funkcji  $g(x)$  dla rozkładów czasów do uszkodzenia z klasy IFR. Niżej formułuje się warunki istnienia maksimum dla klasy MTFR.

Definicja. Zmienna losowa  $T_1 \in \text{MTFR}$ , jeśli  $r_1(x) \geq 0$  dla wszystkich  $x \geq 0$ .

Do klasy MTFR należą niektóre zmienne losowe posiadające jednomodalne funkcje intensywności uszkodzeń.

Wniosek 6. Niech czas do uszkodzenia  $T_1$  ma rozkład z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń  $\lambda_1(t)$ . Prawdziwa jest równoważność  $T_1 \in \text{MTFR}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $ET_1 \lambda_1(\infty) \geq 1$ .

Podstawiając  $z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = 0, \dots, z_n = 0$ , funkcja kryterialna  $g(x)$  wyraża asymptotyczny współczynnik gotowości. Dla współczynnika gotowości jest  $g(0) = 0$  oraz  $g(\infty) = A ET_1 / (A ET_1 + B + C)$ .

Wniosek 7. Jeśli  $T_1 \in \text{IFR}, \alpha < 0, \lambda_1(\infty) > (1 - \alpha/\beta) / ET_1$ , to współczynnik gotowości osiąga wartość maksymalną.

Dowód. Wiadomo na podstawie wniosku 2, że dla współczynnika gotowości jest  $\gamma = 0$ . Wynika stąd, że funkcja  $s(x) = \alpha r(x) + \beta$  maleje od  $s(0) = \beta > 0$  do  $s(\infty) = \alpha (ET_1 \lambda_1(\infty) - 1) + \beta < 0$ . Funkcja  $s(x)$  dokładnie raz zmienia znak z „+” na „-”.

Wniosek 8. Jeśli  $T_1 \in \text{MTFR}, \alpha < 0, \lambda(t)$  jest jednomodalna,  $\lambda_1(\infty) > (1 - \alpha/\beta) / ET_1$ , to współczynnik gotowości  $g(x)$  osiąga wartość maksymalną.

Dowód. Pochodna funkcji  $s(t)$  jest równa  $s'(t) = \lambda'_1(x) [\alpha ET_1(x) + \gamma]$ . Wynika stąd, że jeśli funkcja  $\lambda_1(t)$  jest jednomodalna, to funkcja  $s(t)$  jest także jednomodalna. W pracy [9] pokazano, że jednomodalność funkcji  $s(x)$  można udowodnić bez założenia różniczkowalności funkcji  $\lambda_1(t)$ . Aby funkcja  $s(t)$  miała dokładnie jedno miejsce zerowe wystarcza aby prawdziwe były nierówności  $s(0) = \beta > 0$  i  $s(\infty) < 0$ . Warunek  $s(\infty) < 0$  jest równoważny warunkowi  $\lambda_1(\infty) > (1 - \alpha/\beta) / ET_1$ .

## 5. Przykład numeryczny

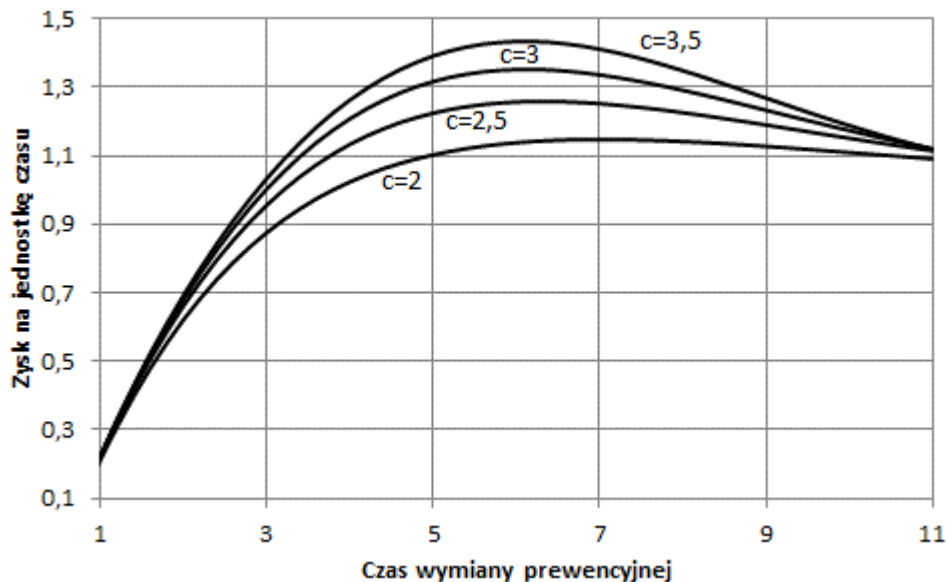
W tym rozdziale analizuje się przykład numeryczny ilustrujący wyniki otrzymane w rozdziałach 3 i 4. Rozważa się 8-stanowy proces eksploatacji autobusów miejskich. Wyróżniono następujące stany:

- $S_1$  – realizacja zadania przewozowego,
- $S_2$  – naprawa po uszkodzeniu,
- $S_3$  – wymiana (naprawa) przewencyjna,
- $S_4$  – kontrola stanu po naprawie,
- $S_5$  – zaopatrywanie w paliwo,
- $S_6$  – obsługa w dniu użytkowania,
- $S_7$  – okresowa obsługa techniczna,
- $S_8$  – postój na placu zajezdni.

Zakłada się, że czas do uszkodzenia ma rozkład Weibulla z funkcją niezawodności:  $R_1(t) = \exp(-(t/a)^c)$  dla  $a, c > 0, t \geq 0$ . Funkcja intensywności tego rozkładu ma postać:  $\lambda_1(t) = (c/a) (x/a)^{c-1}, t \geq 0$ . Na podstawie analizy statystycznej danych z eksploatacji dla wartości średnich czasów przebywania w stanach uzyskano oceny:  $ET_1 = 8,852, ET_2 = 3,619, ET_3 = 1,501, ET_4 = 0,164, ET_5 = 0,096, ET_6 = 0,122, ET_7 = 3,885, ET_8 = 5,659$ . Zyski jednostkowe wynikające z pracy w stanach systemu oceniono jako:  $z_1 = 4, z_2 = -2, z_3 = -0,2, z_4 = -0,2, z_5 = -0,2, z_6 = -0,2, z_7 = -0,2, z_8 = -1$ . Ocena macierzy prawdopodobieństw przejścia dla włożonego w proces łańcucha Markowa jest następująca

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0,239 & 0,104 & 0 & 0,657 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,277 & 0 & 0 & 0 & 0,723 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,982 & 0,178 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,234 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,766 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wartości współczynników A, B, B<sub>1</sub>, C i C<sub>1</sub> obliczono metodą współczynników nieoznaczonych. Dla wartości parametrów podanych wyżej obliczono:  $\alpha = -5,778$ ,  $\beta = 2,400$ ,  $\gamma = -4,133$ . Dla każdego  $c \in \{2; 2,5; 3; 3,5\}$  obliczono wartość parametru b tak, aby  $ET_1 = 8,852$ . Na rysunku 1 pokazano wykresy funkcji zysku na jednostkę czasu w zależności od chwili wymiany (naprawy) prewencyjnej. Każda z czterech realizacji funkcji kryterialnej osiąga wartość maksymalną.



Rys. 1. Wykres funkcji kryterialnej  $g(x)$  dla  $c \in \{2; 2,5; 3; 3,5\}$   
 Fig. 1. Graphs of the criteria function  $g(x)$  for  $c \in \{2, 2.5, 3, 3.5\}$

## 6. Wnioski

W pracy rozważa się problem wymian według wieku obiektów technicznych dla wielostanowych systemów użytkowania. Funkcja kryterialna badana w tej pracy to zysk przypadający na jednostkę czasu i współczynnik gotowości. Pierwszym z celów pracy jest macierzowe przedstawienie funkcji kryterialnej (wzór (12)), drugi to pokazanie, że przy pewnych ogólnych założeniach można sformułować warunki dostateczne istnienia maksimum funkcji kryterialnej.

## Literatura

1. Asha G, Unnikrishanan N N. Reliability properties of means time to failure in age replacement models. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering* 2010; 17(1): 15-26.
2. Barlow R E, Hunter L. Optimum preventive maintenance polices. *Operations Research* 1960; 8: 90-100.
3. Barlow R E, Proschan F. *Mathematical theory of reliability*. John Wiley & Sons, 1965.
4. Bellman R. *Introduction to matrix analysis*. New York: McGraw-Hill, 1971.
5. Feldman R M, Valdez-Flores C. *Applied probability and stochastic processes*. Springer, 2010.
6. Grabski F. *Semi-markowskie modele niezawodności i eksploatacji [Semi-Markov models of reliability and maintenance]*. Warszawa: IBS PAN, 2002.
7. He Q, Zha Y, Zhang R, Sun Q, Liu T. Reliability analysis for multi-state system based on triangular fuzzy variety subset Bayesian networks. *Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 2017; 19(2): 152-165.
8. Howard O. *Dynamic probabilistic system. Vol. 2. Semi-Markov and decision processes*. John Wiley, 1971.
9. Knopik L. *Metoda wyboru efektywnej strategii eksploatacji obiektów technicznych [Method of selection of strategy of maintenance of technical objects]*. Wydawnictwo Uniwersytetu Technologiczno-Przyrodniczego im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy, Rozprawy nr 145, 2010.
10. Knopik L. Some results on ageing class. *Control and Cybernetics* 2005; 34(4): 1175-1180.
11. Knopik L. Characterization of a class of lifetime distributions. *Control and Cybernetics* 2006; 35(2): 1175-1180.
12. Knopik L, Migawa K. Optimal age-replacement policy for non-repairable technical objects with warranty. *Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 2017; 19(2): 172-178.
13. Knopik L, Migawa K, Peszyński K, Wawrzyniak S. Some remarks on preventive replacement model. *Engineering Mechanics, Institute of Thermomechanics Academy of Sciences of the Czech Republic* 2017; 470-473.
14. Lesnianski A, Levitin G. *Multi–state system reliability: Assessment, optimization and application*. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics Vol. 6, World Science Publishing, 2003.

15. Levitin G, Lesnianski A. Optimal replacement scheduling in multi-state series-parallel system (short communication). *Quality Reliability Engineering International* 2000; 16: 157-162.
16. Levitin G, Lesnianski A. Structure optimization of multi-state system with two failure mode. *Reliability Engineering System Safety* 2001; 72: 75-89.
17. Liu Y, Huang H Z. Optimal replacement policy for multi-state system under imperfect maintenance. *IEEE Transactions on Reliability* 2010: 483-495.
18. Liu Y W, Kapur K C. Reliability measures for dynamic multi-state systems and their applications for system and design and evaluation. *IIE Trans.* 2006; 38: 511-520.
19. Liu Y W, Kapur K C. Customer's cumulative experience measures for reliability of non-repairable aging multi-state systems. *Quality Technology Quantitative Management* 2007; 4: 255-234.
20. Masaro MF, Cavalcante CAV. Random preventive maintenance policy based on inspection for multicomponent system using simulation. *Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 2017; 19(4): 552-559.
21. Nakagawa T. *Maintenance theory of reliability*. Springer, 2005.
22. Quin J, Niu Y, Li Z. A combined method for reliability analysis multi-state system of minor-repairable components. *Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 2016; 18(1): 80-88.
23. Ross S M. *Introduction to probability models*. 9<sup>th</sup> eds. Elsevier, 2007.
24. Tadj L, Ouali M S, Yacouant S, Kadi D A. *Replacement models with minimal repair*. Springer, 2010.
25. Yu L. Optimal replacement policy for multi-state system under imperfect maintenance. *IEEE Transactions on Reliability* 2010; 59(3): 483-495.
26. Zhang Y L, Yam R C M, Zuo M J. Optimal replacement policy for multistate repairable system. *Journal of Operational Research Society* 2002; 53: 336-341.