

Bernard BARON*
Joanna KOLAŃSKA-PŁUSKA*

ZASTOSOWANIE METODY ESDIRK (KENNEDY-CARPENTER) DO BADANIA STANÓW NIEUSTALONYCH W LINII DŁUGIEJ

W pracy przedstawiono algorytm rozwiązania równań telegrafistów dla linii długiej niejednorodnej z automatycznym doбором kroku całkowania. Algorytm ten jest połączeniem metody różnic skończonych z półjawną metodą ESDIRK (Kennedy, C.A. - Carpenter, M.H.) zastosowaną do rozwiązywania bardzo rzadkiego układu równań linii długiej, polegającej na ograniczeniu się tylko do niezerowych elementów macierzy Jacobiego w procesie iteracyjnym całkowania. Takie podejście skutecznie skraca czas całkowania. Opisano konstrukcję programu w środowisku C# umożliwiającego rozwiązanie wielkich i rzadkich układów równań różniczkowych dla półjawnej metody ESDIRK. Skonstruowana biblioteka posiada możliwość zadawania układów nieliniowych równań różniczkowych rzadkich nie tylko w postaci funkcji wektorowej zmiennej wektorowej lecz również Jacobianu funkcji w postaci pełnej macierzy lub tylko jej niezerowych elementów. Zamieszczono przykład ilustrujący możliwości programu.

SŁOWA KLUCZOWE: linia długa, równania różniczkowe, metody półjawne ESDIRK

1. WPROWADZENIE

Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych linii długiej niejednorodnej jest znanym problemem w literaturze [9]. Rozwiązania bazują na metodzie różnic skończonych ze względu na zmienną przestrzenną y co pozwala na sprowadzenie badania zmienności w czasie fali napięciowej $u(y,t)$ oraz prądowej $i(y,t)$ do problemu rozwiązywania wielkiego rzadkiego układu równań różniczkowych zwyczajnych. Niejednorodność linii wymaga przy rozwiązywaniu tych równań automatycznego doboru kroku całkowania. Do rozwiązania równań różniczkowych linii niejednorodnej można zastosować metody jawne typu ERK (*Explicit-Runge-Kutty*) z automatycznym doбором kroku całkowania wg. algorytmów par włożonych Fehlberga lub Dormanda – Prince’a. Metody te mają ograniczony obszar stabilności nie mniej w wielu stanach obciążenia linii długiej nie wykazują utraty stabilności rozwiązań ([9]).

* Politechnika Opolska.

W niniejszym opracowaniu pokazane będzie, że możliwe jest zastosowanie metody półjawnej typu ESDIRK (*Explicit, Singly Diagonal Implicit Runge-Kutta*) [2, 3, 5] dla dowolnych stanów obciążenia linii długiej przy porównywalnych kosztach obliczeń numerycznych jak w metodach jawnych typu ERK.

2. METODA PÓLJAWNA WŁOŻONA TYPU ESDIRK

W ostatnich latach pojawiły się liczne publikacje ([1 - 5]) dotyczące nowej podklasy ESDIRK (*Explicit, Singly Diagonal Implicit Runge-Kutta*) klasy metod SDIRK, w której pierwszy etap jest jawny tj. $a_{11} = 0$ dla $c_1 = 0$. Tablica Butchera tej metody m -etapowej wraz z metodą włożoną ma postać:

Tabela 1. Metoda ESDIRK m - etapowa

0	0	0	0	\dots	0	0
c_2	a_{21}	λ	0	\dots	0	0
c_3	a_{31}	a_{32}	λ	\dots	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
c_{m1}	$a_{m-1,1}$	$a_{m-1,2}$	$a_{m-1,3}$	\dots	λ	0
l	b_1	b_2	b_3	\dots	b_{m-1}	λ
\mathbf{w}	b_1	b_2	b_3	\dots	b_{m-1}	λ
\mathbf{w}	b_1^*	b_2^*	b_3^*	\dots	b_{m-1}^*	b_m^*

Metoda półjawna ESDIRK m -etapowa ma ogólnie postać

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i + \sum_{j=1}^m b_j \mathbf{K}_j^{(i)} \quad (1)$$

w której współczynniki b_j stanowią przedostatni wiersz macierzy Butchera, natomiast wektory $\mathbf{K}_j^{(i)}$ spełniają następujące układy równań nieliniowych:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1^{(i)} &= h_i \mathbf{F}[\mathbf{X}_i, t_i] \\ \mathbf{K}_j^{(i)} &= h_i \mathbf{F}[\mathbf{X}_i + \sum_{l=1}^{j-1} a_{jl} \mathbf{K}_l^{(i)} + \lambda \mathbf{K}_j^{(i)}, t_i + c_j h_i], \quad \text{dla } j = 2, \dots, m \end{aligned} \quad (2)$$

W metodzie tej można estymować błąd całkowania co jest istotne w doborze kroku całkowania zgodnie z ideą metod włożonych.

$$\mathbf{E}^*(t_i + h; h) = \sum_{j=1}^5 (b_j - b_j^*) \mathbf{K}_j^{(i)} \quad (3)$$

gdzie b_j^* są elementami ostatniego wiersza macierzy Butchera (Tabela 1).

W metodach półjawnych ESDIRK realizuje się obliczenia kolejno $m-1$ układów równań nieliniowych (2) o N niewiadomych. Mając na uwadze zastosowanie algorytmu Newtona do rozwiązywania równań nieliniowych zapisuje się równania (2) ze względu na niewiadomy wektor $\mathbf{K}_j^{(i)}$ w postaci ogólnej

$$\mathbf{H}(\mathbf{K}_j^{(i)}) = \mathbf{K}_j^{(i)} - h_i \mathbf{F}[\mathbf{X} + \lambda \mathbf{K}_j^{(i)}, t] = 0, \text{ dla } j = 2, \dots, m \quad (4)$$

gdzie podstawa obliczenia ma postać

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_i + \sum_{l=1}^{j-1} a_{jl} \mathbf{K}_l^{(i)}; \quad t = t_i + c_j h_i \quad (4a)$$

W k -tej iteracji Newtona rozwiązywanie układu równań nieliniowych (4) zachodzi potrzeba rozwiązywania liniowego układu równań w postaci

$$\mathbf{J}^{(H)}(\mathbf{K}_j^{(i)(k)}) d\mathbf{K}_j^{(i)(k)} = H(\mathbf{K}_j^{(i)(k)}) \quad (5)$$

$$\mathbf{K}_j^{(i)(k+1)} = \mathbf{K}_j^{(i)(k)} - d\mathbf{K}_j^{(i)(k)} \quad (6)$$

$$\mathbf{J}^{(H)}(\mathbf{K}_j^{(i)(k)}) = \mathbf{I} - h_i \lambda \mathbf{J}^{(F)} \left(\mathbf{X}_i + \sum_{l=1}^{j-1} a_{jl} \mathbf{K}_l^{(i)} + \lambda \mathbf{K}_j^{(i)}, t_i + c_j h_i \right) \quad (7)$$

gdzie $\mathbf{J}^{(F)}(\mathbf{X}, t)$ jest macierzą Jacobiego prawej strony równania (1).

W pierwszym kroku tego procesu za warunek początkowy $\mathbf{K}_j^{(i)(0)}$ przyjmuje się rozwiązanie z poprzedniego kroku całkowania, co ze względu na bliskość rozwiązania wymaga wykonania tylko dwóch kroków iteracji ażeby osiągnąć dokładność rozwiązania odpowiadającą zadanej dokładności całkowania. W pierwszym kroku całkowania warunek początkowy iteracji Newtona przyjmuje się z warunku początkowego zagadnienia $\mathbf{K}_j^{(i)(0)} = \mathbf{K}_j^{(i)}$.

Rozwiązywanie w procesie iteracyjnym Newtona układu równań liniowych spowalnia niewątpliwie proces całkowania w metodach ESDIRK. Dzieje się tak tym bardziej im większy jest układ równań różniczkowych. W praktyce modelowania dynamiki różnych układów zauważa się, że im większy układ równań różniczkowych tym rzadsza jest macierz Jacobiego $\mathbf{J}^{(F)}(\mathbf{X}, t)$ prawej strony równania (1) tj. funkcji $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$. Dlatego też do rozwiązywania układu równań liniowych (5) w procesie iteracyjnym Newtona należy zastosować metodę rozkładu LU dla macierzy rzadkich bazującą tylko na niezerowych elementach macierzy Jacobiego co znacznie skraca czas procesu całkowania. Jest to możliwe, gdy układ równań różniczkowych zwyczajnych jest zadany nie tylko w postaci funkcji wektorowej $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ lecz również w postaci funkcji macierzowej $\mathbf{J}^{(F)}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}}$ wyznaczającej tylko niezerowe jej elementy.

W publikacji [5] (Kennedy, C.A. and Carpenter, M.H.) podano tablice Butchera dla metod ESDIRK rzędu 3, 4 i 5.

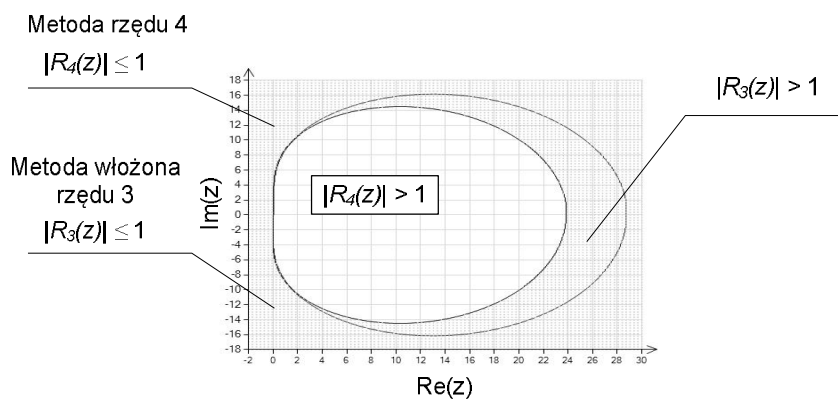
Tabela 2. Metoda ESDIRK 6-etapowa 4-rzędu oraz metoda włożona 3-rzędu (Kennedy, C.A. - Carpenter, M.H.)

0	0					
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$				
$\frac{83}{250}$	$\frac{8611}{62500}$	$\frac{-1743}{31250}$	$\frac{1}{4}$			
$\frac{31}{50}$	$\frac{5012029}{34652500}$	$\frac{-654441}{2922500}$	$\frac{174375}{388108}$	$\frac{1}{4}$		
$\frac{17}{20}$	$\frac{15267082809}{155376265600}$	$\frac{-71443401}{120774400}$	$\frac{730878875}{9021847668}$	$\frac{2285395}{8070912}$	$\frac{1}{4}$	
1	$\frac{82889}{524892}$	0	$\frac{15625}{83664}$	$\frac{69875}{102672}$	$\frac{-2260}{8211}$	$\frac{1}{4}$
w	$\frac{82889}{524892}$	0	$\frac{15625}{83664}$	$\frac{69875}{102672}$	$\frac{-2260}{8211}$	$\frac{1}{4}$
w^*	$\frac{4586570599}{29645900160}$	0	$\frac{178811875}{945068544}$	$\frac{814220225}{102672}$	$\frac{-3700637}{11593932}$	$\frac{61727}{225920}$

Biorąc pod uwagę funkcję stabilności

$$R_4(z) = I + w^T z(I - zA)^{-1} e \quad (8)$$

oraz wykonując obliczenia komputerowe, przedstawiono obszary stabilności metody na rys. 1.



Rys. 1. Obszar stabilności metody ESDIRK 6-etapowej 4-rzędu z metodą włożoną 3-rzędu

Wykazuje się, że metoda Kennedy'ego 4-rzędu jest A-stabilna tj. $|R_4(z)| \leq 1$ dla $Re(z) \leq 0$. Ponadto wykazuje się że jest ona również L-stabilna czyli dodatkowo spełnia warunek $|R_4(z)| \leq \rightarrow 0$ dla $|z| \rightarrow \infty$.

Metoda włożona rzędu 3 jest A-stabilna tj. $|R_3(z)| \leq 1$ dla $Re(z) \leq 0$, a dokładniej $|R_3(\infty)| \cong 0,144$ co gwarantuje większą stabilność procesu estymacji błędu całkowania niż metody jawne.

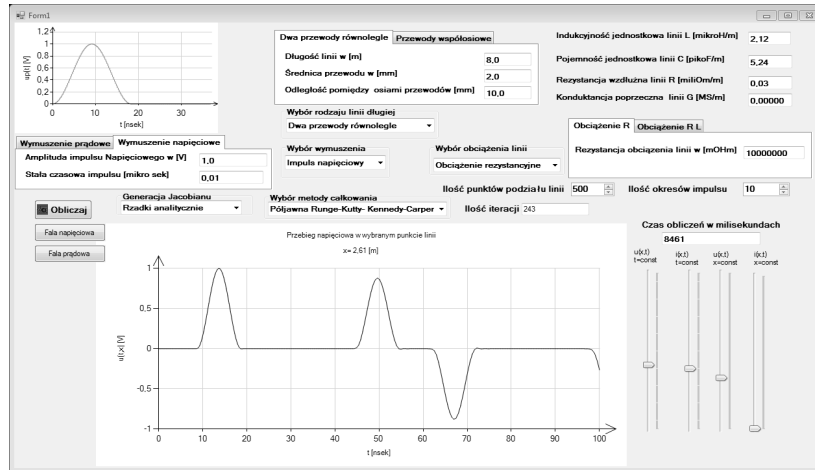
3. PRZYKŁAD SYMULACJI

W programie, którego interfejs podano na rys. 2, możliwy jest wybór linii długiej (płaskiej lub koncentrycznej), rodzaju obciążenia i zasilania (napięciowe lub prądowe) oraz metody rozwiązywania rzadkich układów równań różniczkowych z opcją zadania macierzy Jacobiego, rzadkiej lub pełnej. Rozkłady fal napięcia $u(y,t)$ i prądu $i(y,t)$ w linii są opisane równaniami różniczkowymi cząstkowymi

$$-\frac{\partial u(y,t)}{\partial y} = R(y)i(y,t) + L(y)\frac{\partial i(y,t)}{\partial t} \quad (9)$$

$$-\frac{\partial i(y,t)}{\partial y} = G(y)u(y,t) + C(y)\frac{\partial u(y,t)}{\partial t} \quad (10)$$

gdzie: $R(y)$ - rezystancja jednostkowa, $G(y)$ - konduktancja jednostkowa, $L(y)$ - indukcyjność jednostkowa, $C(y)$ - pojemność jednostkowa linii.



Rys. 2. Interfejs projektu do badania stanów dynamicznych linii długiej o różnych obciążeniach

W równaniach (9) i (10) pochodne cząstkowe ze względu na zmienną y przybliża się za pomocą różnic skończonych. W tym celu linię o długości d

dzieli się na M elementów dla węzłów podziału $y_k = k\Delta y$, $\Delta y = d/M$, $k = 0, 1, 2, \dots, M$.

Stosując iloraz różnicowy lewostronny i prawostronny otrzymuje się:

$$u(y_{k+1}, t) = u(y_k, t) + \Delta y \left. \frac{\partial u(y, t)}{\partial t} \right|_{y=y_k} \quad (11)$$

$$u(y_{k-1}, t) = u(y_k, t) - \Delta y \left. \frac{\partial u(y, t)}{\partial t} \right|_{y=y_k} \quad (12)$$

Różnica równań (11) i (12) daje przybliżenie pochodnej cząstkowej fali napięciowej w postaci ilorazu różnicowego centralnego:

$$\left. \frac{\partial u(y, t)}{\partial t} \right|_{y=y_k} \cong \frac{u(y_{k+1}, t) - u(y_{k-1}, t)}{2\Delta y} \quad (13)$$

Analogiczne przybliżenie otrzymuje się dla pochodnej fali prądowej:

$$\left. \frac{\partial i(y, t)}{\partial t} \right|_{y=y_k} \cong \frac{i(y_{k+1}, t) - i(y_{k-1}, t)}{2\Delta y} \quad (14)$$

Niech $u_k(t)$ oznacza napięcie $u(y_k, t)$ w węźle y_k , natomiast $i_k(t)$ prąd $i(y_k, t)$ w węźle y_k

$$u_k(t) = u(y_k, t), \quad i_k(t) = i(y_k, t) \quad (15)$$

W ten sposób zdefiniowano zmienne stanu napięciowe i prądowe dla każdego węzła podziału linii. Problem rozwiązania równań telegrafistów (8) i (9), po podstawieniu (13) i (14) oraz wprowadzeniu oznaczenia (15), przybliży się następującym układem równań różniczkowych zwyczajnych [9]:

$$\frac{du_k(t)}{dt} = -\frac{G(y_k)}{C(y_k)} u_k(t) - \frac{i_{k+1}(t) - i_{k-1}(t)}{C(y_k)(y_{k+1} - y_{k-1})} \quad (16)$$

$$\frac{di_k(t)}{dt} = -\frac{R(y_k)}{L(y_k)} i_k(t) - \frac{u_{k+1}(t) - u_{k-1}(t)}{L(y_k)(y_{k+1} - y_{k-1})} \quad (17)$$

gdzie: $k = 2, 3, \dots, M-1$.

Warunek brzegowy $u(0, t)$ lub $i(0, t)$ (na początku linii - dla $y = 0$) dla układu równań różniczkowych cząstkowych jest członem wymuszającym dla układu równań różniczkowych zwyczajnych (16) i (17):

$$i_0(t) = i(0, t), \quad u_0(t) = u(0, t), \quad (18)$$

Jeśli wielkością wymuszającą na wejściu linii jest napięcie $u_0(t)$, to wielkością poszukiwaną jest prąd wejściowy linii $i_0(t)$. Warunki początkowe $i(y, 0)$ oraz $u(y, 0)$ (dla chwili $t = 0$) określone dla układu równań różniczkowych cząstkowych linii (zgodnie z oznaczeniami (15)) są warunkami początkowymi

$$i_k(0) = i(y_k, 0), \quad u_k(0) = u(y_k, 0) \quad (19)$$

dla układu równań różniczkowych zwyczajnych (16) i (17).

Przy wymuszeniu napięciowym $u_0(t)$ oraz obciążeniu rezystancyjnym linii R_{obc} wektor stanu linii przyjmuje postać:

$$\mathbf{X}(t) = [i_0(t), i_1(t), u_1(t), i_2(t), u_2(t), u_2(t), \dots, \\ i_{M-2}(t), u_{M-2}(t), i_{M-1}(t), u_{M-1}(t), u_M(t)]^T \quad (20)$$

W równaniu na pochodną prądu wejściowego linii używa się prawego ilorazu różnicowego (patrz wzór (11)):

$$\frac{di_0(t)}{dt} = -\frac{R(y_0)}{L(y_0)} i_0(t) - \frac{u_1(t) - u_0(t)}{L(y_0)(y_1 - y_0)} \quad (21)$$

Równanie na pochodną prądu w węźle numer 1 określa równanie typu (17)

$$\frac{di_1(t)}{dt} = -\frac{R(y_1)}{L(y_1)} i_1(t) - \frac{u_2(t) - u_0(t)}{L(y_1)(y_2 - y_0)} \quad (22)$$

Równanie na pochodną napięcia w węźle numer 1 opisuje równanie typu (16) z ilorazem różnicowym typu (14)

$$\frac{du_1(t)}{dt} = -\frac{G(y_1)}{C(y_1)} u_1(t) - \frac{i_2(t) - i_0(t)}{C(y_1)(y_2 - y_0)} \quad (23)$$

Równania różniczkowe typu (16) i (17) oraz (21)-(23) wraz z dwoma równaniami opisującymi współzależność napięcia $u_M(t)$ i prądu $i_M(t)$ na końcu linii stanowią pełny układ równań różniczkowych. Na podstawie prawa Ohma dla ostatniego węzła linii zachodzi $u_M(t) = R_{obc} i_M(t)$. Równanie na pochodną prądu w przedostatnim węźle linii:

$$\frac{di_{M-1}(t)}{dt} = -\frac{R(y_{M-1})}{L(y_{M-1})} i_{M-1}(t) - \frac{R_{obc} i_M(t) - u_{M-2}(t)}{L(y_{M-1})(y_M - y_{M-2})} \quad (24)$$

oraz na pochodną prądu na końcu linii:

$$\frac{di_M(t)}{dt} = -\frac{R(y_M)}{L(y_M)} i_M(t) - \frac{R_{obc} i_M(t) - u_{M-1}(t)}{L(y_M)(y_M - y_{M-1})} \quad (25)$$

Zgodnie z oznaczeniem wektora stanu (20) otrzymuje się postać normalną układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{F}[\mathbf{X}(t), t] \quad (26)$$

W przykładzie symulacyjnym wybrano linię płaską o długości $d = 10$ [m], parametrach $L = 2,12$ [$\mu\text{H}/\text{m}$], $C = 5,24$ [pF/m], $R = 0,03$ [$\text{m}\Omega/\text{m}$], $G = 0$ oraz wymuszeniu napięciowym w postaci impulsu o amplitudzie 1 [V] i czasie trwania $T_0 = 20$ [nsek] przy zmiennym obciążeniu rezystancyjnym $R_{obc} = 1 \div 50$ [$k\Omega$]. Linię tę podzielono na $M = 500$ elementów, otrzymując $N = 1000$ równań różniczkowych rzadkich. Czas całkowania ograniczono do 10 okresów trwania impulsu $t_{max} = 10T_0$. Obliczenia zrealizowano dla dwóch metod całkowania tj. metody ESDIRK Kennedy - Carpenter 4 i 3 rzędu 6-etapowej przy założonym błędzie względnym i absolutnym $1.0e^{-6}$.

Wyniki tej symulacji pokazują, że ze wzrostem rezystancji obciążenia problem rozwiązywania równań różniczkowych staje się coraz to bardziej sztywny.

Tabela 2. Porównanie ilości iteracji oraz czasów obliczeń dla metody jawnej ERK DP i półjawnej ESDIRK KC

R_{obc} [kΩ]	Dormand – Prince		Kennedy – Carpenter	
	$N_{iteracji}$	t_{max} [sek]	$N_{iteracji}$	t_{max} [sek]
1	905	3,0	209	10,9
2	1994	6,4	240	10,9
5	5150	16,1	254	8,7
10	10368	33,6	258	8,6
20	20818	52,8	258	8,9
50	52230	115,9	261	8,9

Metoda półjawna ESDIRK Kennedy – Carpenter 4 i 3 rzędu 6-etapowa realizuje całkowanie z taką samą ilością iteracji około 250 z takim samym czasem całkowania wynoszącym około 9 sek.

Metoda jawna Dormanda – Prince’a 5 i 6 rzędu 12 etapowa, aby zachować narzuconą dokładność $1e^{-6}$ obliczeń, gwałtownie zwiększa ilość kroków całkowania co sygnalizuje utratę stabilności rozwiązania.

4. PODSUMOWANIE

Metody niejawne IRK są implementowane dla wysokich rzędów jednak koszt obliczeń gwałtownie rośnie co skutecznie ogranicza zastosowania. W metodach półjawnych (DIRK, SDIRK, ESDIRK) koszt obliczeń jest znacznie mniejszy jednak dla dużego układu równań różniczkowych napotykamy również na barierę czasu obliczeń. Jak pokazano na przykładzie zastosowania metody ESDIRK (Kennedy-Carpenter) do rozwiązywania bardzo rzadkiego układu równań linii długiej ograniczenie się tylko do niezerowych elementów macierzy Jacobiego w procesie iteracyjnym całkowania skutecznie skraca czas całkowania. Jest to możliwe jeżeli w procesie tym zastosujemy metodę rozkładu LU z minimalną ilością dodatkowych niezerowych elementów jakie powstaną w procesie rozkładu.

LITERATURA

- [1] Alexander R., Design and implementation of DIRK integrators for stiff systems, *Applied Numerical Mathematics*, 46(1):1-17, 2003.
- [2] Carpenter, M.H., Kennedy, C.A., Bijl, H., Vilken, S.A., and Vatsa, V.N., Fourth-Order Runge-Kutta Schemes for Fluid Mechanics Applications, *Journal of Scientific Computing*, Vol. 25, No. ½, Nov. 2005, pp. 157-194.

- [3] Bijl, H., Carpenter, M.H., Vatsa, V.N., and Kennedy, C.A., Implicit Time Integration Schemes for the Unsteady Compressible Navier-Stokes Equations: Laminar Flow, *Journal of Computational Physics*, Vol. 179, 2002, pp. 313-329.
- [4] Kvaerno K.: Singly Diagonally Implicit Runge-Kutta Methods with an Explicit First Stage. *BIT Numerical Mathematics*, 44:489-502, 2004.
- [5] Kennedy C. A. and Carpenter M. H.: Additive Runge-Kutta Schemes for Convection-Diffusion-Reaction Equations. Technical report, NASA, 2001. NASA/TM-2001-211038.
- [6] Dormand J. R. and Prince P. J.: A family of embedded Runge-Kutta formulae. *J. Comput. Appl. Maths.*, (1980),6(1): 19-26.
- [7] Hairer E., and Wanner G.: Solving Ordinary Differential Equations II, stiff and Differential Algebraic Problems, Berlin: Springer-Verlag (1991).
- [8] Butcher J. C., and Chen D. J. L.: A new type of singlyimplicit Runge-Kutta method, *Applied Numerical Mathematics*, (2000), 34: 179–188.
- [9] Baron B., Krych J.: Zastosowanie metody różnic skończonych i metody Fehlberga do badania stanów nieustalonych w linii długiej. S.29-32, ZKWE 2001, Poznań.

IMPLEMENTATION OF ESDIRK (KENNEDY-CARPENTER) METHOD FOR THE PURPOSE OF TRANSIENT STATES IN LONG LINE INVESTIGATION

In this work an algorithm for solution of telegraph equations for a heterogeneous long line with an automatic selection of an integration step was presented. The proposed algorithm is a combination of a finite difference method with a half-explicit ESDIRK (Kennedy, C.A. - Carpenter, M.H.) method applied for the purpose of solving a very rare long line equations. The implementation of the proposed method relied on limitation to only non-zero elements of the Jacobi matrix in an iterative process of integration. Such approach successfully shortens the integration time. Also the construction of the application in C# was described, which enables to solve huge, rare differential equations for a half-explicit ESDIRK method. Also the developed library enables to set rare non-linear differential equations not only in form of vector variable function but also as a Jacobian function in form of a full matrix or its non-zero elements. Also an example, which illustrates the potential of the application was included.