MINUT 2019 (1), s. 56–62
ISSN 2719-3063

Rafał BROCIEK, Bartłomiej PAWLIK

Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska,
ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Rozkład na ułamki proste

Streszczenie. Ważnym elementem rozwiązywania całek z funkcji wymiernych jest rozkład wyrażenia wymiernego na ułamki proste. Doświadczenie dydaktyczne Autorów podpowiada, że studenci często niepotrzebnie komplikują sobie to zadanie poprzez tworzenie nadmiernie skomplikowanego układu równań. Autorów w tym przekonaniu utwierdza również przegląd obecnej literatury objaśniającej tę metodę całkowania, jak również zapoznanie się z najpopularniejszymi materiałami e-learningowymi dostępnymi w polskim internecie. Niniejszy artykuł ma na celu przybliżenie metody, która często w znaczny sposób ułatwia dokonanie rozkładu wyrażenia wymiernego na ułamki proste.

1. Wstęp teoretyczny

Na wstępie rozpoczniemy od zdefiniowania funkcji wymiernej oraz ułamków prostych pierwszego i drugiego rodzaju.

Definicja 1 (Funkcja wymierna). *Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych nieujemnych, a $\mathbb{R}$ zbiór liczb rzeczywistych. Niech*

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

oraz

$$h(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

będą wielomianami o współczynnikach rzeczywistych, odpowiednio stopnia n oraz m, gdzie $n, m \in \mathbb{N}$ oraz $h(x) \neq 0$. Wówczas funkcję f daną wzorem $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ nazywać będziemy funkcją wymierną.

Definicja 2 (Ułamki proste). *Ułamkami prostymi pierwszego rodzaju nazywamy wyrażenia postaci:*

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \qquad A, a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.$$

Autor korespondencyjny: B. Pawlik (Bartlomiej.Pawlik@polsl.pl).
Data wpłyniecia: 14.03.2019.

Ułamkami prostymi drugiego rodzaju nazywamy wyrażenia postaci:

$$\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}, \qquad A,B,b,c \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},$$

dla których trójmian kwadratowy x^2+bx+c nie posiada pierwiastków rzeczywistych ($\Delta < 0$).

Mając dane powyższe definicje możemy przedstawić twierdzenie o rozkładzie na ułamki proste.

Twierdzenie 1 (O rozkładzie na ułamki proste). *Każdą funkcję wymierną $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ taką, że stopień wielomianu g jest mniejszy niż stopień wielomianu h, można jednoznacznie przedstawić w postaci skończonej sumy ułamków prostych, przyjmując, że:*

1. *czynnikowi mianownika $(x-a)^n$ odpowiadają ułamki proste pierwszego rodzaju*

$$\frac{A_1}{(x-a)}, \quad \frac{A_2}{(x-a)^2}, \quad \dots, \quad \frac{A_n}{(x-a)^n},$$

2. *czynnikowi mianownika $(x^2+bx+c)^m$ odpowiadają ułamki proste drugiego rodzaju*

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+bx+c)}, \quad \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2}, \quad \dots, \quad \frac{B_mx+C_m}{(x^2+bx+c)^m},$$

gdzie $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_m, C_1, C_2, \dots, C_m \in \mathbb{R}$.

Zatem cała trudność rozkładu polega na wyznaczeniu współczynników pojawiających się w licznikach ułamków prostych. Prześledźmy klasyczne rozwiązanie tego zadania na konkretnym przykładzie. Rozłóżmy na ułamki proste wyrażenie wymierne:

$$\frac{3x^3+4x^2-13x-6}{(x+3)(x+2)x(x-1)}. \tag{1}$$

Z twierdzenia o rozkładzie na ułamki proste otrzymujemy:

$$\frac{3x^3+4x^2-13x-6}{(x+3)(x+2)x(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x-1}.$$

Po pomnożeniu obustronnie przez $(x+3)(x+2)x(x-1)$, powyższe równianie przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} &3x^3+4x^2-13x-6 = \\ &= A(x+2)x(x-1) + B(x+3)x(x-1) + C(x+3)(x+2)(x-1) + D(x+3)(x+2)x. \end{aligned} \tag{2}$$

Następnie upraszczamy i porządkujemy względem x wielomian znajdujący się po prawej stronie:

$$3x^3+4x^2-13x-6 = (A+B+C+D)x^3 + (A+2B+4C+5D)x^2 + (-2A-3B+C+6D)x - 6C.$$

Aby zachodziła równość, współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x muszą być takie same, więc należy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 3 = A + B + C + D \\ 4 = A + 2B + 4C + 5D \\ -13 = -2A - 3B + C + 6D \\ -6 = -6C \end{cases},$$

co po obliczeniu daje:

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \\ C = 1 \\ D = -1 \end{cases}.$$

Zatem ostatecznie:

$$\frac{3x^3 + 4x^2 - 13x - 6}{(x+3)(x+2)x(x-1)} = \frac{1}{x+3} + \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}.$$

Wadami powyższego rozwiązania jest czasochłonne przekształcanie wielomianu oraz rozwiązywanie (często dużego) układu równań - w obu przypadkach nietrudno o błąd obliczeniowy.

Zauważmy, że szukamy takich wartości liczb A, B, C, D dla których równanie (2) będzie spełnione niezależnie od wartości x. W przedstawionym standardowym modelu rozwiązywania tego typu zadań występuje etap grupowania współczynników wielomianu względem zmiennej x oraz porównywania odpowiednich współczynników wielomianów po obu stronach otrzymanego równania. Cały ten proces można zastąpić przez utworzenie z równania (2) odpowiedniej liczby równań liniowych poprzez dobieranie odpowiednich wartości liczbowych za x. Oczywiście najlepszy rezultat uzyskamy, gdy za x będziemy podstawiać **pierwiastki mianownika** wyrażenia (1). Pierwiastkami wyrażenia $(x+3)(x+2)x(x-1)$ są oczywiście liczby -3, -2, 0 oraz 1. Po podstawieniu $x = -3$ otrzymujemy

$$-12 = -12 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C + 0 \cdot D,$$

więc $A = 1$. Ogólnie:

$$\begin{array}{l} x = -3: \\ x = -2: \\ x = 0: \\ x = 1: \end{array} \begin{cases} -12 = & -12 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C + 0 \cdot D \\ 12 = & 0 \cdot A + 6 \cdot B + 0 \cdot C + 0 \cdot D \\ -6 = & 0 \cdot A + 0 \cdot B - 6 \cdot C + 0 \cdot D \\ -12 = & 0 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C + 12 \cdot D \end{cases},$$

zatem tym sposobem otrzymujemy o wiele prostszy układ równań, niż w przypadku standardowego rozwiązania.

W ogólnym przypadku może się zdarzyć, że liczba niewiadomych jest większa niż liczba miejsc zerowych mianownika wyrażenia wymiernego. W takiej sytuacji, po wykorzystaniu wszystkich miejsc zerowych, można za x podstawiać dowolne liczby rzeczywiste - często najwygodniejsze rozwiązania to te, które są konstruowane na liczbach całkowitych o możliwie jak najmniejszym module. Otrzymane układy równań na ogół są prostsze od tych, które otrzymujemy rozwiązując zadanie standardowo.

Warto podkreślić, że przedstawiona metoda jest tym efektywniejsza, im jest mniejsza wartość różnicy między stopniem mianownika, a jego liczbą różnych miejsc zerowych.

2. Przykłady

Przykład 1. Rozłożyć na sumę ułamków prostych wyrażenie wymierne

$$\frac{4x^2-18x+24}{x(x-2)(x-4)}.$$

Rozwiązanie
Zgodnie z twierdzeniem o rozkładzie na ułamki proste

$$\frac{4x^2-18x+24}{x(x-2)(x-4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-4}.$$

Mnożąc powyższe równanie obustronnie przez $x(x-2)(x-4)$ otrzymujemy

$$4x^2-18x+24=A(x-2)(x-4)+Bx(x-4)+Cx(x-2).$$

Pierwiastkami mianownika danego wyrażenia wymiernego są liczby 0, 2 i 4. Po podstawieniu ich do powyższego równania otrzymujemy

$$\begin{array}{l} x=0: \\ x=2: \\ x=4: \end{array}\left\{\begin{array}{l} 24=8A \\ 4=-4B \\ 16=8C \end{array}\right., \text{ więc } \left\{\begin{array}{l} A=3 \\ B=-1 \\ C=2 \end{array}\right..$$

Odpowiedź

$$\frac{4x^2-18x+24}{x(x-2)(x-4)}=\frac{3}{x}-\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-4}.$$

Przykład 2. Rozłożyć na sumę ułamków prostych wyrażenie wymierne

$$\frac{x^2-3x-2}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Rozwiązanie
Zgodnie z twierdzeniem o rozkładzie na ułamki proste

$$\frac{x^2-3x-2}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}.$$

Mnożąc powyższe równanie obustronnie przez $(x^2+1)(x-1)$ otrzymujemy

$$x^2-3x-2=(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1).$$

Jedynym pierwiastkiem rzeczywistym[1] mianownika danego wyrażenia wymiernego jest 1. Ponieważ w rozkładzie mamy trzy niewiadome, musimy w powyższym wyrażeniu podstawić za x jeszcze dwie liczby, przykładowo 0 i -1:

$$\begin{array}{l} x=1: \\ x=0: \\ x=-1: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -4=2C \\ -2=-B+C \\ 2=2A-2B+2C \end{array} \right. , \text{ więc } \left\{ \begin{array}{l} A=3 \\ B=0 \\ C=-2 \end{array} \right. .$$

Odpowiedź

$$\frac{x^2-3x-2}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{3x}{x^2+1} - \frac{2}{x-1}.$$

Przykład 3. Rozłożyć na sumę ułamków prostych wyrażenia wymierne

a) $\dfrac{3x^3-3x^2+3x+4}{x^4-3x^3-4x^2}$, **b)** $\dfrac{1}{x^4-3x^3+3x^2-3x}$.

Rozwiązanie

a) Najpierw musimy określić postać iloczynową mianownika danego wyrażenia:

$$x^4-3x^3-4x^2 = x^2(x^2-3x-4) = x^2(x+1)(x-4).$$

Zgodnie z twierdzeniem o rozkładzie na ułamki proste

$$\frac{3x^3-3x^2+3x+4}{x^4-3x^3-4x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-4}.$$

Mnożąc powyższe równanie obustronnie przez $x^2(x+1)(x-4)$ otrzymujemy

$$3x^3-3x^2+3x+4 = Ax(x+1)(x-4) + B(x+1)(x-4) + Cx^2(x-4) + Dx^2(x+1).$$

Pierwiastkami mianownika danego wyrażenia wymiernego są -1, 0 i 4. Ponieważ w rozkładzie mamy cztery niewiadome, dobieramy dodatkową liczbę do podstawienia, przykładowo 1:

$$\begin{array}{l} x=-1: \\ x=0: \\ x=4 \\ x=1: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -5=-5C \\ 4=-4B \\ 160=80D \\ 7=-6A-6B-3C+2D \end{array} \right. , \text{ więc } \left\{ \begin{array}{l} A=0 \\ B=-1 \\ C=1 \\ D=2 \end{array} \right. .$$

Odpowiedź

$$\frac{3x^3-3x^2+3x+4}{x^4-3x^3-4x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-4}.$$

b) Również w tym przypadku zaczynamy od określenia postaci iloczynowej mianownika:

$$x^4-3x^3+3x^2-x = x(x^3-3x^2+3x-1) = x(x-1)^3.$$

[1] Za x można podstawiać również pierwiastki zespolone, jednak będziemy tego unikać, gdyż często niepotrzebnie komplikują one obliczenia.

Zatem zgodnie z twierdzeniem o rozkładzie na ułamki proste

$$\frac{1}{x^4-3x^3+3x^2-3x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}.$$

Mnożąc powyższe równanie obustronnie przez $x(x-1)^3$ otrzymujemy

$$1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx.$$

Pierwiastkami mianownika danego wyrażenia są liczby 0 i 1. Ponieważ w rozkładzie mamy cztery niewiadome, dobieramy dwie dodatkowe liczby do podstawienia, przykładowo -1 i 2:

$$\begin{array}{l} x=0: \\ x=1: \\ x=-1 \\ x=2: \end{array} \left\{\begin{array}{l} 1=-A \\ 1=D \\ 1=-8A-4B+2C-D \\ 1=A+2B+2C+2D \end{array}\right. \text{, więc } \left\{\begin{array}{l} A=-1 \\ B=1 \\ C=-1 \\ D=1 \end{array}\right. .$$

Odpowiedź

$$\frac{1}{x^4-3x^3+3x^2-3x}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}.$$

3. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Rozłożyć na sumę ułamków prostych wyrażenie wymierne:

a) $\dfrac{-2}{(x+1)(x-1)}$, **b)** $\dfrac{3x+2}{(x+4)(x-3)}$,

c) $\dfrac{4x^2-2x-2}{(x+1)x(x-2)}$, **d)** $\dfrac{10x+6}{(x+3)(x+1)(x-1)}$,

e) $\dfrac{-2x^2-4}{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}$, **f)** $\dfrac{-3x^2-5x+4}{(x+1)x(x-1)(x-2)}$.

Zadanie 2. Rozłożyć na sumę ułamków prostych wyrażenie wymierne:

a) $\dfrac{2x^2-2x-3}{(x-1)^2(x-2)}$, **b)** $\dfrac{2x^3+2x^2-8}{(x+2)x^2(x-2)}$,

c) $\dfrac{3x^2+2x}{(x^2+2)(x-3)}$, **d)** $\dfrac{x^2-6x+1}{(x^2+1)(x-1)^2}$,

e) $\dfrac{x^4+x^3-4}{(x^2+2)x^3}$, **f)** $\dfrac{2x^3+8x^2+x+3}{(x^2+1)(x-1)(x-2)}$.

Zadanie 3. Rozłożyć na sumę ułamków prostych wyrażenie wymierne:

a) $\dfrac{7x-21}{x^2-3x-10}$, **b)** $\dfrac{7x^2+4x-12}{x^3-4x}$,

c) $\dfrac{2x^3-4x^2-3x+2}{x^4-2x^3+x^2}$, **d)** $\dfrac{5x^2-8x+28}{x^4-16}$,

e) $\dfrac{4x^3-6x^2+2x-2}{x^4-2x^3+x^2-2x}$, **f)** $\dfrac{3x^3+x^2+7x-1}{x^5-x}$.

4. Odpowiedzi do zadań

Zad. 1:

a) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$,

b) $\frac{2}{x+4} + \frac{1}{x-3}$,

c) $\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}$,

d) $-\frac{3}{x+3} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1}$,

e) $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$,

f) $-\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x} + \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x-2}$.

Zad. 2:

a) $\frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-2}$,

b) $\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x-2}$,

c) $\frac{2}{x^2+2} + \frac{3}{x-3}$,

d) $\frac{3}{x^2+1} - \frac{2}{(x-1)^2}$,

e) $\frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}$,

f) $\frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$.

Zad. 3:

a) $\frac{5}{x+2} + \frac{2}{x-5}$,

b) $\frac{1}{x+2} + \frac{3}{x} + \frac{3}{x-2}$,

c) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2}$,

d) $\frac{x-1}{x^2+4} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-2}$,

e) $\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}$,

f) $-\frac{2}{x^2+1} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{3}{x-1}$.