

Jakub PEKSIŃSKI\*  
Grzegorz MIKOŁAJCZAK\*  
Janusz KOWALSKI\*\*

## PREZENTACJA WŁAŚCIWOŚCI FILTRÓW WYGŁADZAJĄCYCH II RZĘDU W PROGAMIE MathCad

W pracy przedstawiono przykładową dydaktyczną aplikację w oparciu o uniwersalny program do obliczeń matematycznych MathCad. Program ten posiada duże możliwości obliczeniowe a jednocześnie jest łatwy w obsłudze i nie wymagającym nauki programowania, co tworzy z niego efektywne narzędzie w procesie dydaktycznym, gdzie wymaga się przeprowadzenia symulacji komputerowych. Prezentację oprogramowania omówiono na podstawie zagadnienia wygładzania sygnałów przy pomocy wybranych filtrów cyfrowych. Wyniki uzyskane w pracy mogą być wsparciem dydaktycznym przedmiotu dotyczącego filtracji cyfrowej, a zwłaszcza w zagadnieniach usuwania zakłócenia addytywnego o rozkładzie normalnym.

SŁOWA KLUCZOWE: wygładzanie sygnałów, cyfrowe filtry wygładzające, CAS

### 1. WSTĘP

MathCad to uniwersalny program służący do wykonywania obliczeń matematycznych – o bardzo dużych możliwościach, a zarazem łatwy do opanowania, nie wymagający nauki języka programowania. Począwszy od roku 1986 kolejne wersje MathCAD'a rozwijała firma MathSoft Inc. Obecnie program ten jest rozprowadzany w wielu wersjach pod nazwą PTC Mathcad Prime 3.1, gdyż w kwietniu 2006 r Mathsoft została przejęta przez Parametric Technology Corporation (PTC Inc., [www.ptc.com](http://www.ptc.com)). Firma PTC jest jednym z liderów producentów oprogramowania do obliczeń inżynierskich na świecie.

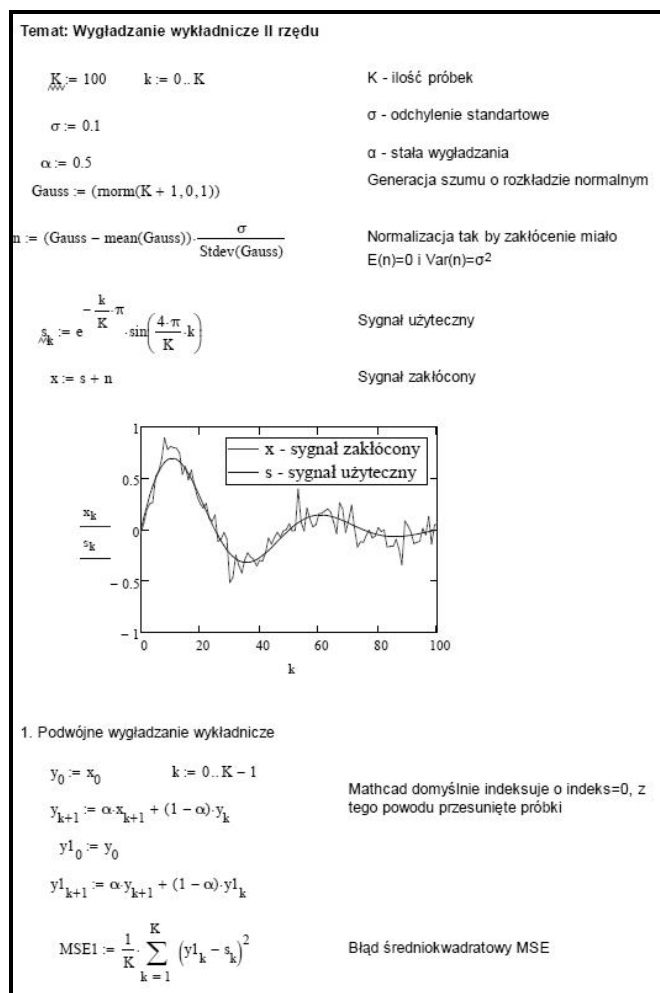
Mathcad to komercyjny program klasyfikowany jako CAS lub komputerowy system obliczeń symbolicznych (*ang. Computer Algebra System, System Algebry Komputerowej*), wspomagający obliczenia symboliczne w matematyce, fizyce i dyscyplinach technicznych. Większość programów CAS umożliwia rysowanie wykresów funkcji (jednej i dwu zmiennych oraz zmiennej zespolonej) i przeprowadzanie obliczeń z praktycznie dowolną dokładnością. Wiele z nich ma wbudowane języki programowania, dzięki czemu użytkownik może

\* Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie.

\*\* Pomorski Uniwersytet Medyczny w Szczecinie.

wykorzystywać do rozwiązywania zadań własne algorytmy i zwiększać w ten sposób funkcjonalność programu.

Systemy algebry komputerowej należy właściwie odróżnić od programów przeznaczonych do obliczeń numerycznych i inżynierskich takich jak MATLAB, SciLab czy Octave. Rozgraniczenie nie jest jednoznaczne, gdyż niektóre systemy algebraiczne zawierają moduły umożliwiające szybkie obliczenia numeryczne. Wśród tego typu oprogramowania można wymienić następujące programy: CoCoA, Derive (nierozwijany), Maple, Mathematica, MuPAD, Maxima, Sage, Yacas



Rys. 1. Zrzut pierwszej strony przykładu arkusza programu Mathcad prezentowanego w artykule

MathCad to prosty sposób na rozwiązywanie, analizowanie i udostępnianie wielu ważnych obliczeń technicznych. Przejrzysty i czytelny interfejs, przedstawiony na rys. 1, nie sprawi problemu nawet osobom zaczynającym pracę z programem. Przy jego pomocy można tworzyć dokumenty używając pełnego zapisu matematycznego za pomocą symboli i jednostek. To doskonałe środowisko obliczeniowe do komputerowego wspomaganie projektowania CAD.

Mathcad jest programem wszechstronnym, który można wykorzystać jako arkusz kalkulacyjny, dokument tekstowy, program do tworzenia prezentacji czy do zaprogramowania własnych funkcji. Otrzymane wyniki można przedstawić za pomocą wykresu, tekstu, grafiki czy animacji w jednym profesjonalnym dokumencie. Program działa w czasie rzeczywistym automatycznie przeliczając wyniki po wprowadzeniu zmian oraz pozwala na weryfikację poprawności wprowadzonych formuł i jednostek, co zostało sprawdzone w przykładowym arkuszu zamieszczonym na rys. 2.

2. Pojedyncze wygładzanie II rzędu

$$y^2_0 := x_0 \quad y^2_1 := \alpha \cdot x_1 + (1 - \alpha) \cdot y^2_0 \quad k := 0..K - 2$$

$$y^2_{k+2} := \alpha^2 \cdot x_{k+2} + 2 \cdot (1 - \alpha) \cdot y^2_{k+1} - (1 - \alpha)^2 \cdot y^2_k$$

$$\text{MSE2} := \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^K (y^2_k - \epsilon_k)^2$$

3. Trzecia metoda oparta na symetrycznej filtracji

$$y_0 := x_0 \quad k := 0..K - 1$$

$$y_{k+1} := \alpha \cdot x_{k+1} + (1 - \alpha) \cdot y_k$$

$$y^3_K := y_K$$

$$y^3_{K-k-1} := \alpha \cdot y_{K-k-1} + (1 - \alpha) \cdot y^3_{K-k} \quad \text{MSE3} := \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^K (y^3_k - \epsilon_k)^2$$

MSE1 = 0.00637    MSE2 = 0.00604    MSE3 = 0.00187    Porównanie metod przy pomocy MSE

Rys. 2. Zrzut drugiej strony przykładu arkusza programu Mathcad prezentowanego w artykule

Najnowsza wersja programu: PTC Mathcad Prime 3.1 posiada nowy, ulepszony interfejs API [5]. Pozwala on na integrację programu Mathcad z dowolną platformą CAD, oprogramowaniem programistycznym, narzędziami do analizy czy systemem PDM. W swojej strukturze posiada wiele gotowych arkuszy i szablonów do obliczeń mechanicznych, elektrycznych, matematycznych, chemicznych i wielu innych.

## 2. WYGŁADZANIE SYGNAŁÓW

Wygładzanie przebiegu najczęściej polega na usunięciu z niego składowych o wyższych częstotliwościach, które reprezentują zakłócenie np. addytywne (1). Z tego powodu metody wygładzania (*ang. smoothing methods*) często określane są jako filtry wygładzające.

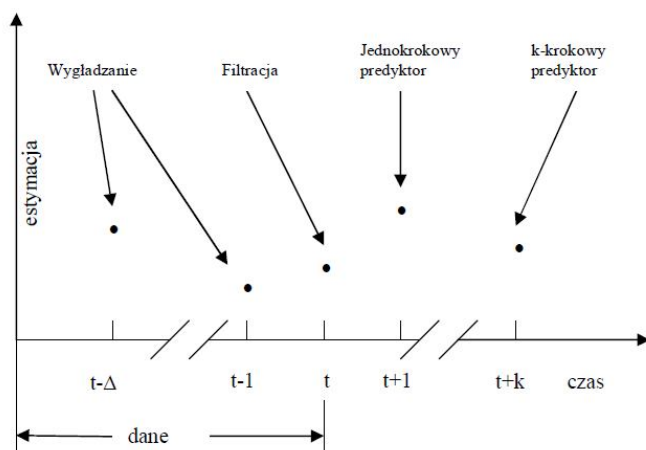
W odróżnieniu od filtracji przy wygładzaniu dopuszcza się, aby algorytmy wygładzania korzystały zarówno z próbek sygnału przeszłych jak i przyszłych w stosunku do próbki bieżącej.

$$x_k = s_k + n_k \quad (1)$$

gdzie:  $s_k$  – sygnał użyteczny,  $x_k$  – sygnał zaszumiony,  $n_k$  – zakłócenie.

Tak więc, wygładzanie można przeprowadzić na danych zebranych wcześniej albo na bieżąco, lecz z pewnym opóźnieniem, dlatego możemy oczekiwać dokładniejszej estymacji parametrów niż przy filtracji.

Powyższe ustalenia można przedstawić w formie relacji danych w stosunku do estymowanej wartości wyjścia filtru wygładzającego, co przedstawiono na rys. 3 [1].



Rys. 3. Ilustracja przedstawiająca operacje przetwarzania sygnału [1]

Rozpatrywane są zazwyczaj trzy typy zadań wygładzania sygnału. Są to: wygładzanie stało punktowe, wygładzanie ze stałym opóźnieniem i wygładzanie ze stałym przedziałem. W każdym przypadku wyznaczono estymaty wartości niezakłóconej.

Filtry wygładzające znalazły we współczesnym świecie nauki szerokie zastosowanie, gdyż istotą każdego eksperymentu jest pomiar różnych parametrów i wielkości, które w trakcie trwania analizowanego zjawiska mogą być obciążone różnego rodzaju zakłóceniami o charakterze losowym. Sygnałów o takim

charakterze jest wiele, począwszy od przebiegów ekonometrycznych i statystycznych, poprzez sygnały określające procesy technologiczne, zjawiska fizyczne i chemiczne, kończąc na sygnałach w telekomunikacji i elektronice.

### 3. PRZYKŁADY FILTRÓW WYGŁADZAJĄCYCH

Model wyrównania wykładniczego stanowi jeden z klasycznych już modeli wygładzania sygnałów opracowany przez R. G. Browna [2]. W modelu wyrównania wykładniczego ocenę sygnału  $y_k$  można przedstawić jako średnią ważoną wartości sygnału z okresu poprzedniego  $y_{k-1}$  oraz najnowszej obserwacji  $x_n$ . Wartości ocen sygnału wyznacza się za pomocą następującej relacji:

$$y_k = \alpha \cdot x_k + (1 - \alpha) \cdot y_{k-1} \quad k = 1, \dots, K \quad (2)$$

przy czym  $y_0 = x_0$ , a zatem początkowa ocena sygnału to wartość najwcześniejszej chronologicznie obserwacji  $x_n$ .

Parametr  $\alpha \in (0, 1)$  jest nazywany stałą wygładzania. W zależności od wielkości parametru większe znaczenie mają obserwacje bieżące lub poprzednie. Wartości parametru bliskie jedności oznaczają, że większy udział mają obserwacje najnowsze, natomiast wartości bliskie zera wskazują, że większą wagę mają obserwacje okresu poprzedniego. Wartość parametru  $\alpha$  ustala się zwykle metodą doświadczalną. Za najlepszą uznaje się tę wartość, dla której otrzymuje się największą zgodność obserwacji empirycznych szeregu z wartościami teoretycznymi modelu [3].

Standardowy filtr medianowy otrzymywany jest w wyniku uporządkowania próbek wejściowych  $x_i$  w kolejności rosnącej i wybór jako wyjściowej, środkowej wartości spośród nich, jeżeli ilość pobranych próbek jest nieparzysta. W przeciwnym razie próbką wyjściową filtru medianowego jest dowolna wartość znajdująca się pomiędzy wartościami dwóch środkowych (najczęściej średnia arytmetyczna). Oznaczając  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  jako zbiór obserwacji, a ich medianę jako  $med(x)$  to powyższą zależność można zapisać wzorem [4]:

$$med(x) = \begin{cases} x_{v+1}, & \text{gdy } N = 2 \cdot v + 1 \\ \frac{x_v + x_{v+1}}{2}, & \text{gdy } N = 2 \cdot v \end{cases} \quad (3)$$

Filtr średniej ruchomej (ang. *moving average* - MA). Filtr średniej ma zastosowanie do wygładzania stacjonarnych przebiegów czasowych, czyli takich, w których nie obserwuje się trendu. Zaletą tej metody jest systematyczna eliminacja z sygnału szumu. Działanie tego filtru można opisać następującą zależnością:

$$MA(x) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=-v}^v x_i \quad \text{gdzie } N = 2 \cdot v + 1 \quad (4)$$

#### 4. WYGŁADZANIE WYKŁADNICZE II RZĘDU

Jako przykład zostanie rozpatrzone wygładzanie wykładnicze drugiego rzędu w trzech wariantach. Pierwszy polegający na podwójnej filtracji filtrem pierwszego rzędu. W drugim przypadku poprzez bezpośrednią zależność wynikającą z kaskadowego połączenia dwóch filtrów pierwszego rzędu. Natomiast w trzecim przypadku rozpatrzony filtr drugiego rzędu wynikający z filtracji ciągu próbek raz w kierunku od pierwszej do ostatniej, a następnie w kierunku przeciwnym.

1. Podwójna filtracja wygładzaniem wykładniczym pierwszego rzędu, gdzie wartości ocen sygnału wyznacza się za pomocą następującej relacji:

$$\begin{aligned} y_k &= \alpha \cdot x_k + (1-\alpha) \cdot y_{k-1} \\ y_{l_k} &= \alpha \cdot y_k + (1-\alpha) \cdot y_{l_{k-1}} \end{aligned} \quad (5)$$

przy czym:  $y_0 = x_0, y_{l_0} = y_0$

2. Pojedyncze wygładzanie wykładnicze II rzędu. Wykonując przekształcenie z równania różnicowego (1) otrzymamy:

$$Y(z) = \alpha \cdot X(z) + (1-\alpha) \cdot Y(z) \cdot z^{-1} \quad (6)$$

Transmitancja filtru cyfrowego wyraża się wzorem:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\alpha}{1 - (1-\alpha) \cdot z^{-1}} \quad (7)$$

Transmitancja filtru II rzędu będzie wynikała z kaskadowego połączenia dwóch filtrów I rzędu:

$$H_2(z) = H(z) \cdot H(z) = \frac{\alpha^2}{1 - 2 \cdot (1-\alpha) \cdot z^{-1} + (1-\alpha)^2 \cdot z^{-2}} \quad (8)$$

Stosując transformatę odwrotną otrzymamy następujące równanie różnicowe:

$$y_{2k} = \alpha^2 \cdot x_k + 2 \cdot (1-\alpha) \cdot y_{2k-1} - (1-\alpha)^2 \cdot y_{2k-2} \quad (9)$$

przy czym  $y_{2_0} = x_0, y_{2_1} = \alpha x_1 + (1-\alpha)y_{2_0}$

3. Dla wygładzania próbek sygnału  $\{x_0, x_1, \dots, x_K\}$  transmitancja opisana będzie zależnością (7). Dla wygładzania sygnału w kierunku przeciwnym, czyli  $\{x_K, x_{K-1}, \dots, x_0\}$  równanie różnicowe będzie wyrażone zależnością:

$$y_k = \alpha \cdot x_k + (1-\alpha) \cdot y_{k+1} \quad (10)$$

Natomiast transmitancja tego filtru wyraża się wzorem:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\alpha}{1 - (1-\alpha) \cdot z} \quad (11)$$

Transmitancję opisującą taki proces filtracji możemy opisać jako:

$$H_3(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{1 - (1-\alpha) \cdot z^{-1}} + \frac{\alpha}{1 - (1-\alpha) \cdot z} \right) \quad (12)$$

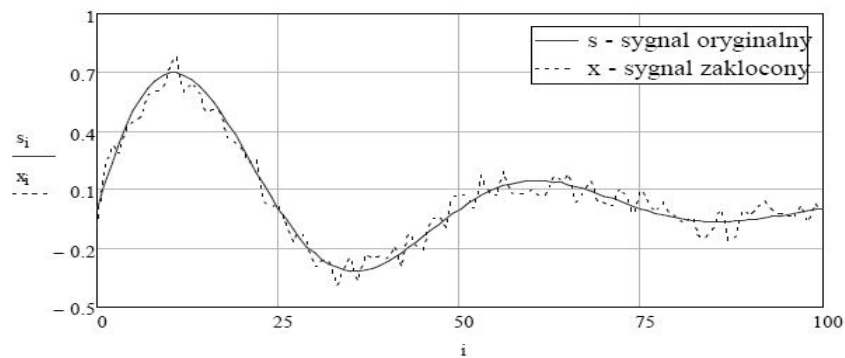
Równania różnicowe opisujące ten proces wygładzania będą miały postać:

$$\begin{aligned} y_k &= \alpha \cdot x_k + (1-\alpha) \cdot y_{k-1} \quad \text{gdzie } y_0 = x_0 \\ y_{3K-k-1} &= \alpha \cdot y_{K-k-1} + (1-\alpha) \cdot y_{3K-k} \quad \text{gdzie } y_{3K} = y_K \end{aligned} \quad (13)$$

## 5. WYNIKI TESTÓW

Proponowane metody (5), (9) i (13) poddano testom, polegającym na wygładzaniu ciągu próbek  $\{x_k\}$ , wygenerowanych na podstawie tłumionego sygnału harmonicznego  $\{s_k\}$  (14), przedstawionym na rys. 4, zakłóconych szumem  $\{n_k\}$ , o rozkładzie normalnym (Gausa), wartości przeciętnej zero  $E(n) = 0$  i wariancji  $V(n) = \sigma_n^2$ , dla następujących wartości odchylenia standardowego:  $\sigma_n = 0.1$ ,  $\sigma_n = 0.4$ ,  $\sigma_n = 0.5$ .

$$s_k = e^{-\frac{\pi}{K} \cdot k} \cdot \sin\left(\frac{4 \cdot \pi}{K} \cdot k\right) \quad k \in (0; K-1) \quad (14)$$



Rys. 4. Przebieg sygnału oryginalnego  $\{s_n\}$  oraz zakłóconego szumem o rozkładzie normalnym  $\{x_n\}$

Do porównania wyników filtracji zakłócenia zastosowano miarę błędu średniokwadratowego:

$$MSE = \frac{1}{K} \cdot \sum_k (s_k - y_k)^2 \quad (14)$$

Uzyskane wartości MSE, które przedstawiono w tabeli 1 nie wskazują jednoznacznie, że któraś z metod jest najlepsza. Najwięcej najmniejszych wartości uzyskano w przypadku stosowania trzeciego wariantu wygładzania (1). Można zauważyć, że dla większych wartości stałej wygładzania  $\alpha \sim 0.5 - 0.9$ , wyniki są porównywalne, co sugerowało stosowanie wariantu trzeciego z małymi wartościami  $\alpha$ . Otrzymane wyniki trudno uogólnić, gdyż eksperyment przeprowadzono na tylko jednym sygnale harmonicznym tłumionym wykładniczo, przy stosunkowo niewielkiej ilości próbek.

Tabela 1. Wartości błędu średniokwadratowego MSE poszczególnych metod wygładzania dla różnego poziomu zakłócenia w funkcji parametru  $\alpha$ 

$\alpha \backslash \sigma^2$	Wariant 1 (5)			Wariant 2 (9)			Wariant 3 (13)		
	0,1	0,4	0,5	0,1	0,4	0,5	0,1	0,4	0,5
0,1	0.07852	0.09022	0.09502	0.0762	0.08953	0.09506	0.01805	0.01683	0.01716
0,2	0.04076	0.05195	0.05801	0.03877	0.0514	0.05804	0.00267	0.00569	0.00879
0,3	0.01967	0.03513	0.04431	0.01856	0.03478	0.04434	0.00081	0.01203	0.01963
0,4	0.01035	0.03314	0.04686	0.00975	0.03292	0.04687	0.00112	0.02174	0.03463
0,5	0.00637	0.03869	0.05815	0.00604	0.03855	0.05816	0.00187	0.0331	0.05214
0,6	0.0049	0.0491	0.07567	0.00471	0.04901	0.07568	0.00277	0.04648	0.07287
0,7	0.00478	0.06422	0.09992	0.00469	0.06417	0.09993	0.00387	0.06314	0.09879
0,8	0.0056	0.08554	0.13353	0.00556	0.08551	0.13353	0.00529	0.08521	0.13321
0,9	0.00729	0.11591	0.1811	0.00728	0.1159	0.1811	0.00723	0.11588	0.18109

Nie rozważono również wariantu, ponownego wygładzania odbywającego się z inną wartością współczynnika wygładzania  $\alpha$ . Wynika to faktu, skupienia się autorów na aspekcie dydaktycznym wykorzystania programu MathCad niż na analizie przedstawionych metod.

#### LITERATURA

- [1] Candy J.V., Signal Processing The Modern Approach. McGraw-Hill, New York 1988.
- [2] R.G. Brown Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series. Englewood Cliffs, New York 1963.
- [3] E.S. Gardner Exponential smoothing the state of art. Journal of Forecasting nr 4 1-28 1985.
- [4] S.K. Mitra, J.F.Kaiser, Handbook Digital Signal Processing, John Willey 1993.
- [5] <http://www.mathcad.pl/>

#### PRESENTATION OF PROPERTIES SMOOTHING FILTERS SECOND ORDER IN THE PROGRAM MathCad

The paper presents an example of educational application on the basis of universal program for mathematical calculations MathCad. This program has a large computational capabilities while still being easy to use and does not require learning programming, which is an effective tool in teaching in many subjects, which are required to perform computer simulations. The presentation software issues discussed on the basis of smoothing signals with selected digital filters. The work can be used for classes on the subject of digital filtering, especially in issues of additive noise removal of a normal distribution.

*(Received: 4. 02. 2016, revised: 3. 03. 2016)*