

Natalia KORCZ<sup>1</sup>

## MODELE NUMERYCZNE UWZGLĘDNIAJĄCE TARCZOWĄ PRACĘ POKRYCIA DACHOWEGO Z BLACH TRAPEZOWYCH

W artykule porównano wybrane sposoby uwzględniania w modelowaniu numerycznym tarczowej pracy pokrycia dachowego z blachy trapezowej, możliwe do zrealizowania w programie Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2015, w celu oceny słuszności stosowania ich do obliczeń konstrukcji nośnej współpracującej z poszyciem z blachy trapezowej. Analizy przeprowadzono dla pojedynczej przepony. Za pomocą powłokowych elementów skończonych zbudowano dwa typy modeli blachy trapezowej. Uwzględniono podatność połączeń występujących w konstrukcji, wykorzystując pomocnicze belkowe elementy skończone. Wartości podatności na ścinanie paneli uzyskane numerycznie odniesiono do wyników otrzymanych na podstawie znanych procedur analitycznych. Miarą trafności modelu poszycia był poziom zgodności ww. wartości podatności na ścinanie. Zgodnie z tym kryterium wskazano model, który poprawniej odwierciedla współpracę pokrycia z blachy trapezowej z konstrukcją nośną.

**Słowa kluczowe:** konstrukcje stalowe, hala stalowa, przepona, projektowanie współpracy poszycia z konstrukcją nośną, powłoka ortotropowa

### 1. Wprowadzenie

Zastosowanie blachy trapezowej jako elementu poszycia budynku ma wpływ na sztywność szkieletu nośnego i przestrzenny charakter jego pracy, a co za tym idzie na przemieszczenia poszczególnych elementów i występujące w nich siły wewnętrzne. Mimo, że idea współpracy obudowy z konstrukcją nośną (AmE „diaphragm design”, BrE „stressed skin design”) jest od wielu lat powszechnie znana, w tradycyjnym projektowaniu pracę tarczową blachy trapezowej najczęściej pomija się, biorąc pod uwagę jedynie stężającą rolę blachy wobec płatwi. Wydaje się, że największą przeszkodą hamującą wzrost popularności uwzględniania w praktyce projektowej zjawiska pracy tarczowej poszycia z blachy trapezowej jest brak wystarczająco sprawdzonych, uniwersalnych i prostych do zastosowania przez projektanta rozwiązań tego zagadnienia. Nadal bowiem

---

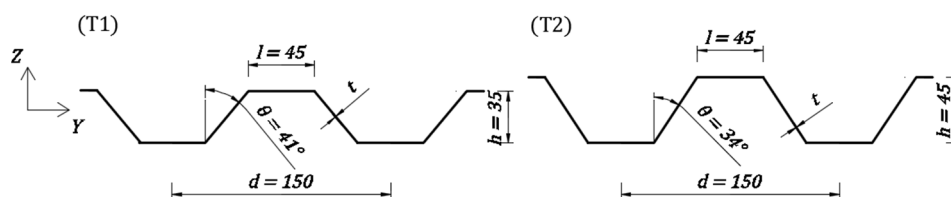
<sup>1</sup> Natalia Korcz, Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska, ul. G. Narutowicza 11/12, 80-233 Gdańsk; tel. 507-297-658; natkorc1@pg.edu.pl

poszukiwane (i rozwijane) są możliwie efektywne metody rozpatrywania tarczowej sztywności pokrycia w inżynierskich procedurach projektowych [1, 2, 3, 5, 6, 7]. W obliczu rozwoju narzędzi wspomagających projektanta podczas analizy statycznej (i dynamicznej) konstrukcji, uwzględnianie w przestrzennych analizach numerycznych współpracy poszycia z konstrukcją nośną wydaje się być podejściem coraz bardziej ekonomicznie uzasadnionym.

Celem artykułu była ocena słuszność stosowania wybranych sposobów uwzględniania w modelowaniu numerycznym tarczowej pracy pokrycia dachowego z blachy trapezowej. Jako kryterium oceny modeli przyjęto zbieżność otrzymanych numerycznie wartości podatności na ścinanie paneli z rezultatami analitycznymi. Analizę zawężono do dwóch narzędzi dostępnych w programie Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2015 (ARSA), a więc również w większości innych inżynierskich programów do modelowania konstrukcji MES, w których dostępne są powłokowe elementy skończone.

## 2. Analizowany układ konstrukcyjny

W celu porównania różnych modeli obliczeniowych, do analiz przyjęto układ pojedynczej przepony o konstrukcji z elementów giętych na zimno, jak na rys. 3. Na dwóch pasach górnych dźwigarów kratowych z kształtownika o przekroju kapeluszowym (główne wymiary 114 x 121 mm, grubość ścianki 6 mm) oparto pięć płatwi Z-owych o wysokości 250 mm, szerokości stopki 60 mm i zróżnicowanej grubości ścianki (2 mm albo 4 mm). Z kolei na płatwiach ułożono blachę trapezową w dwóch wariantach wysokości  $h$ : 35 mm (T1) i 45 mm (T2) oraz o zróżnicowanej grubości ścianki  $t$  (0,7 mm albo 0,6 mm). Geometrię dwóch wariantów blachy pokazano na rys. 1. Rozpatrywano oparcie poszycia na dwóch (2K) i czterech krawędziach (4K). W przypadkach (4K), uwzględniono elementy pośrednie, czyli podpórki brzegowe umożliwiające połączenie blachy z dźwigarem (rys. 3).



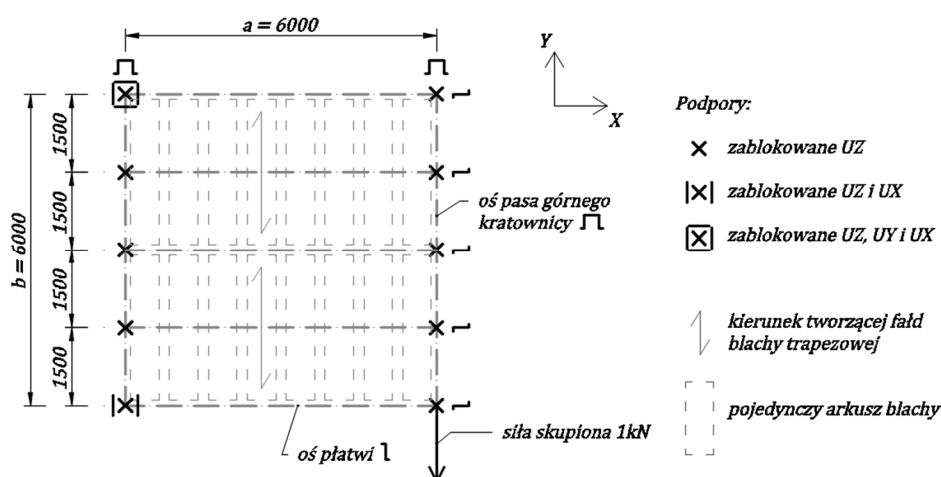
Rys. 1. Blacha trapezowa (T1) i (T2) – geometria

Fig. 1. Trapezoidal sheeting profiles (T1) and (T2) – geometry

Pojedynczy panel, stanowiący przedmiot analiz, składał się również z łączników elementów konstrukcji. Jak pokazano na rys. 3, wyróżnia się [2]:

- łączniki główne - łączące blachę trapezową z płatwiami,

- łączniki uszczelniające - łączące kolejne arkusze blachy ze sobą (w analizowanych modelach pominięte),
- łączniki pośrednie - łączące blachę trapezową z elementem pośrednim (4K).



Rys. 2. Analizowany układ konstrukcyjny – schemat

Fig. 2. Static scheme of the diaphragm used in the analyses

Ideowy szkic konstrukcji wraz z podstawowymi wymiarami osiowymi, schematem podpór i obciążenia, przedstawiono na rys. 2. Przyjęto wymiary gabarytowe przepony (w osiach) 6 m x 6 m, rozstaw płaty 1,5 m. Założono, że obciążenie ścinające w postaci siły skupionej o wartości 1 kN przyłożone jest w osi pasa górnego kratownicy. Podpory konstrukcji zostały dobrane tak, aby panel pracował w schemacie statycznym wspornika. Ponadto, w miejscach, gdzie do pasa górnego dźwigara kratowego w rzeczywistej konstrukcji dochodzą krzyżulce, zadano podpory blokujące przemieszczenia w kierunku pionowym (UZ). Uznano, że przybliżenie to (w rzeczywistości podparcie pasa w tych miejscach ma charakter sprężysty) w przypadku analizowanego problemu jest wystarczająco dokładne.

### 3. Procedury analityczne

Podstawą do pracy nad zagadnieniem będącym tematem tego artykułu są wytyczne European Convention for Constructional Steelwork (ECCS) pt. „European Recommendations for the application of Metal Sheeting acting as a Diaphragm” z roku 1995 [2]. Publikacja ta znalazła swoje odzwierciedlenie również w Eurokodzie 3 [8].

Zgodnie z [2], tarcza dachowa jest zespołem pojedynczych przepon (paneli, diafragm), których definicję determinuje zorientowanie tworzącej fałd blachy

w stosunku do długości dachu (ułożenie prostopadłe – typowe dla dachu płaskiego lub równoległe - typowe dla dachu bezpłaskiego). Wymiar  $a$  pojedynczej przepony jest zawsze wymiarem prostopadłym do tworzącej fałd blachy, natomiast wymiar  $b$  – wymiarem równoległym. Ponadto procedury obliczania podatności przepony na ścinanie różnią się w zależności od umiejscowienia „stężeń pionowych” (elementów konstrukcyjnych odprowadzających siły do poziomu fundamentu). Zgodnie z tą klasyfikacją wyszczególniono:

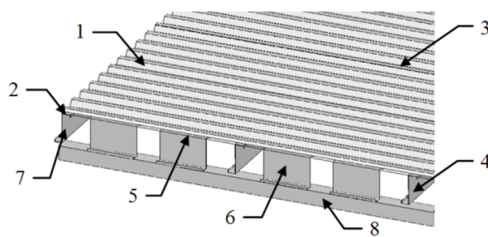
- „diaphragm beam”, czyli „przepona belkowa” (tzw. „zespół przepon”) – zespół paneli tworzących tarczę dachową pracuje wówczas w schemacie belki wolno- podpartej, co ma miejsce w przypadku typowego dachu hali na planie prostokąta,
- „cantilever diaphragm”, czyli „przepona wspornikowa” (tzw. „pojedyncza przepona”) - panel pracuje w schemacie wspornika.

Dwie powyżej przedstawione klasyfikacje pozwalają wybrać jeden z czterech zestawów wzorów, za pomocą których można analitycznie obliczyć (oszacować) podatność średnią przepony na ścinanie. Model będący przedmiotem analizy jest przypadkiem „przepony wspornikowej” w systemie płaskim.

Metoda obliczania podatności przepony na ścinanie zaproponowana w [2] jest metodą składnikową. Podatność jest sumą podatności wywołanych przez:

- odkształcenie blachy: spaczenie profilu blachy (składnik  $c_{1,1}$ ) i odkształcenie postaciowe (składnik  $c_{1,2}$ ),
- odkształcenie łącznika lub połączenia: łącznika głównego (składnik  $c_{2,1}$ ), łącznika uszczelniającego (składnik  $c_{2,2}$ ) oraz łącznika pośredniego lub połączenia między płatwią a dźwigarem (składnik  $c_{2,3}$ ),
- siły w płatwiach: odkształcenie osiowe w płatwiach (składnik  $c_3$ ).

Źródła podatności przepony poddanej ścinaniu (jej składowe) przedstawiono w widoku aksonometrycznym na rys. 3. Przykładowe wartości poszczególnych składowych podatności panelu obliczone zgodnie z procedurą [2] dla modeli w wariantach „11” i „21” (charakterystyka wariantów w tabeli 3), zestawiono w tabeli 1.



Rys. 3. Źródła podatności przepony poddanej ścinaniu:

1–blacha trapezowa ( $c_{1,1}$ ,  $c_{1,2}$ ), 2–łącznik główny ( $c_{2,1}$ ), 3–łącznik uszczelniający ( $c_{2,2}$ ), 4–połączenie płatw/dźwigar ( $c_{2,3}$ ), 5–łącznik pośredni ( $c_{2,3}$ ), 6–element pośredni, 7–element krawędziowy–płatw ( $c_3$ ), 8–pas górny kratownicy

Fig. 3. Components of shear flexibility of the diaphragm:

1–trapezoidal sheeting ( $c_{1,1}$ ,  $c_{1,2}$ ), 2–sheet/purlin fastener ( $c_{2,1}$ ), 3–seam fastener ( $c_{2,2}$ ), 4–purlin/rafter connection ( $c_{2,3}$ ), 5–sheet/shear connector fastener ( $c_{2,3}$ ), 6–shear connector, 7–edge member–purlin ( $c_3$ ), 8–top chord of the truss

Tabela 1. Składowe podatności przepony wyznaczone analitycznie zgodnie z [2] – warianty „11” i „21”  
 Table 1. Components of shear flexibility of the diaphragm calculated analytically according to [2] – variants „11” and „21”

Składnik podatności		Wartość podatności na ścinanie [mm/kN]			
		Blacha (T1)		Blacha (T2)	
		$t = 0,7 \text{ mm}$	$t = 0,6 \text{ mm}$	$t = 0,7 \text{ mm}$	$t = 0,6 \text{ mm}$
$c_{1,1}$		0,0674	0,0991	0,0871	0,1280
$c_{1,2}$		0,0259	0,0303	0,0283	0,0330
$c_{2,1}$		0,0175	0,0175	0,0175	0,0175
$c_{2,2}$		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$c_{2,3}$	4 krawędzie (4K)	0,0438	0,0438	0,0438	0,0438
	2 krawędzie (2K)	1,1520	1,1520	1,1520	1,1520
$c'$	4 krawędzie (4K)	0,155	0,191	0,177	0,222
	2 krawędzie (2K)	1,263	1,299	1,285	1,331
$c_3$		0,023	0,023	0,023	0,023
$c$	4 krawędzie (4K)	<b>0,178</b>	<b>0,214</b>	<b>0,200</b>	<b>0,246</b>
	2 krawędzie (2K)	<b>1,286</b>	<b>1,322</b>	<b>1,308</b>	<b>1,354</b>

Wartości poszczególnych składowych podatności przepony przedstawione w tabeli 1 otrzymano dla następujących założeń:

- parametry stali:  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,3$ ,
- geometria układu konstrukcyjnego (wymiały  $a$  i  $b$ , liczba płatek  $n_p$ , liczba arkuszy po długości  $b$  przepony  $n_b$ ) – jak na rys. 2,
- geometria przekroju blachy trapezowej ( $d$ ,  $h$ ,  $l$ ,  $\theta$ ,  $t$ ) – jak na rys. 1, przy czym grubość arkusza blachy netto  $t = 0,7 \text{ mm}$  (wariant „11”) albo  $t = 0,6 \text{ mm}$  (wariant „21”),
- szerokość arkusza blachy:  $750 \text{ mm}$ ,
- $p = 150 \text{ mm}$  – rozstaw łączników głównych (mocowanie w każdej fałdzie, więc  $p = d$ ),
- $n_{sc} = 16$  – liczba łączników pośrednich dla jednego zewnętrznego dźwigara,
- $A = 8,14 \text{ cm}^2$  – pole powierzchni przekroju poprzecznego elementu krawędziowego (płatek Z 250 x 60 x 2).

Następnie na podstawie odpowiednich stabelaryzowanych zależności [2] określono m.in. wartości:

- $s_{pr} = 2,6 \text{ mm/kN}$  – przemieszczenie górnej stopki płatek w połączeniu płatek/dźwigar na jednostkę siły; przyjęto jak dla dwuteownika 254 x 102 ( $22 \text{ kg/m}$ ),
- $s_p = 0,35 \text{ mm/kN}$  – poślizg łączników głównych na jednostkę siły; przyjęto jak dla wkrętów z kołnierzem i neoprenową podkładką,
- $s_{sc} = 0,35 \text{ mm/kN}$  – poślizg łączników pośrednich na jednostkę siły; przyjęto jw.,

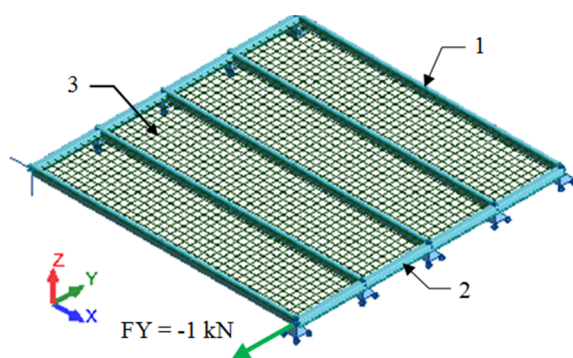
- $s_s = 0$  mm/kN – poślizg łączników uszczelniających na jednostkę siły (podatności łączników uszczelniających nie uwzględniono w modelach numerycznych).

Należy pamiętać, że pełne procedury zawarte w [2], pozwalające uwzględnić pracę tarczową poszycia w projektowaniu konstrukcji, mogą być zastosowane tylko w przypadku spełnienia określonych założeń, takich jak: wszystkie ramy w konstrukcji są takie same, wszystkie pojedyncze przepony są takie same, wszystkie fundamenty i inne warunki (np. stężenia) są podobne (i symetryczne). Ograniczenia dotyczą również stosowalności poszczególnych wzorów, np. formuła na składnik podatności przepony  $c_{1,1}$  ma zastosowanie dla określonej geometrii panelu ( $b / p \geq 10$ ). Gdy warunki te nie zachodzą, zaleca się analizy numeryczne.

## 4. Model numeryczny (analityczno-numeryczny)

### 4.1. Elementy modelu numerycznego

Podstawowe informacje nt. przyjętego układu konstrukcyjnego przedstawiono w punkcie 2 oraz na rys. 2. Izometryczny widok modelu numerycznego odwzorowującego omawiany panel pokazano na rys. 4.



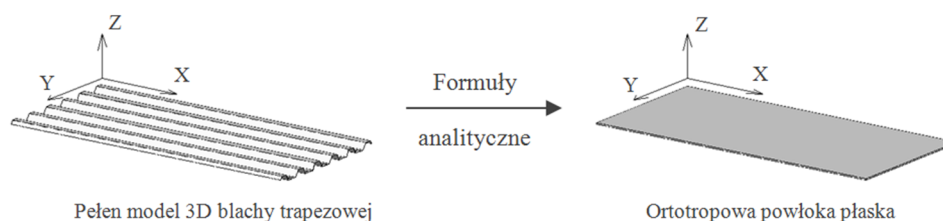
Rys. 4. Analizowana przepona – widok izometryczny w ARSA:  
1–płatew, 2–pas górny kratownicy, 3–siatka ES powłoki ortotropowej

Fig. 4. Diaphragm used in the analyses – isometric view in ARSA:  
1–purlin, 2–top chord of the truss, 3–FE mesh of the orthotropic plate

Pasy górne dźwigarów kratowych oraz płatwie zdefiniowano za pomocą elementów prętowych (o przekrojach rzeczywistych). Zmniejszyło to wymaganą moc obliczeniową komputera i nie wykluczyło możliwości wykorzystania modelu przepony w analizie przestrzennej całej konstrukcji. Blachę trapezową natomiast zdefiniowano za pomocą elementów powłokowych dwóch typów, których opis zamieszczono w punkcie 4.2.

## 4.2. Modele blachy trapezowej

Idea zastosowana w podejściu numerycznym do modelowania blachy trapezowej polega na zastąpieniu jej modelem powłoki ortotropowej, co schematycznie przedstawiono na rys. 5. Zabieg ten redukuje wymaganą moc obliczeniową komputera i rozmiar plików wyników, co może być szczególnie ważne przy większych modelach numerycznych, np. całej hali. Ponadto, uniknięcie pełnego modelu blachy 3D zmniejsza pracochłonność budowy modelu. Jest to oczywiście metoda przybliżona. Zakłada m.in. symetryczność przekroju oraz że wymiary fałd są małe w porównaniu z wymiarem całego arkusza blachy i nie uwzględnia lokalnej zmiany sztywności (model tarczy o zastępczej stałej grubości).



Rys. 5. Idea zastąpienia blachy trapezowej powłoką ortotropową, na podstawie [9]

Fig. 5. The idea of substitution the fully 3D-modelled trapezoidal sheeting by the orthotropic 2D plate model, based on [9]

Proces zastąpienia blachy trapezowej modelem powłoki ortotropowej polega na poszukiwaniu takich macierzy sztywności charakteryzujących zastępczą powłokę, które odwzorowują właściwości blachy wynikające z ortotropii strukturalnej, tj. różnej sztywności we wzajemnie prostopadłych kierunkach. Zastosowane modele analizowanej blachy trapezowej, z uwagi na sposób ich definiowania, można podzielić na dwie grupy:

- predefiniowana ortotropowa powłoka płaska w 3D o wprowadzanej przez użytkownika geometrii przekroju poprzecznego blachy trapezowej (MA),
- ortotropowa powłoka płaska w 3D o definiowanych przez użytkownika macierzach sztywności ortotropowej (MB).

Budując modele blachy trapezowej za pomocą powłoki ortotropowej należy zwrócić szczególną uwagę na zgodność kierunków ortotropii powłoki zastępczej z odpowiadającymi kierunkami ortotropii blachy trapezowej. W konwencji osi współrzędnych w programie ARSA [4] kierunek lokalnej osi X powłoki (kierunek główny ortotropii) jest równoległy do tworzącej fałd blachy, a kierunek lokalnej osi Y powłoki – prostopadły (jak na rys. 5), natomiast w [3, 9, 10] konwencja jest przeciwna (kierunek X prostopadły do tworzącej fałd blachy, kierunek Y – równoległy). Z uwagi na to, że macierze wyznaczone dla modeli (MB) na podstawie [3, 9, 10] wprowadzono następnie do modelu numerycznego, stosowaną w artykule konwencję osi ujednolicono, przyjmując obowiązującą w ARSA.

W programach komputerowych umożliwiających numeryczną analizę przestrzenną konstrukcji (np. ARSA, RFEM) zaimplementowane są narzędzia (predefiniowane ortotropowe powłoki płaskie dla typu konstrukcji 3D), dzięki którym użytkownik nie musi sam wyznaczać macierzy sztywności zastępczej płyty, a są one generowane przez program na podstawie wprowadzonej geometrii przekroju poprzecznego blachy trapezowej. Z takiego narzędzia skorzystano tworząc modele (MA).

Przykładowe macierze sztywności tarczowej  $\mathbf{D}$ , sztywności giętej  $\mathbf{K}$  oraz sztywności ścinania  $\mathbf{H}$  (oznaczenia i nazewnictwo zgodne z programem ARSA), które odczytano w programie ARSA dla modeli (MA), a wyznaczone zostały przez program na podstawie zadanej przez użytkownika geometrii blachy trapezowej (T2) o grubości arkusza  $t = 0,7$  mm (warianty „11”, „12”, „13” zgodnie z tabelą 3), miały postać:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 213410,12 & 4,65 & 0 \\ 4,65 & 15,5 & 0 \\ 0 & 0 & 42796,17 \end{bmatrix} \text{kN/m} \quad (1)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 68,73 & 0,00 & 0 \\ 0,00 & 0,00 & 0 \\ 0 & 0 & 24,06 \end{bmatrix} \text{kN} \cdot \text{m} \quad (2)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 33975,39 & 0 \\ 0 & 57326,35 \end{bmatrix} \text{kN} \cdot \text{m} \quad (3)$$

Z kolei modele (MB) zbudowano, korzystając z wybranych formuł analitycznych na macierze sztywności zastępczej płyty ortotropowej dla blachy trapezowej zgodnie z [3, 9, 10]. Należy podkreślić, że podawane w literaturze ww. wzory analityczne często znacznie się od siebie różnią. Do przedstawianych analiz wybrano jedno ze znanych podejść analitycznych.

Wyrazy macierzy sztywności tarczowej  $\mathbf{D}$  obliczono na podstawie [3]:

$$\mathbf{D} = \frac{t}{1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx}} \begin{bmatrix} E_x & \nu_{yx} \cdot E_x & 0 \\ \nu_{xy} \cdot E_y & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx}) \cdot G_{xy} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$E_x = E \cdot \frac{l_p}{d} \quad (5)$$

$$E_y = E \cdot \frac{I_y^0}{I_y} \quad (6)$$



$$v_{yx} = v \cdot \frac{E_y}{E_x} \quad (7)$$

$$v_{xy} = v \quad (8)$$

$$G_{xy} = \frac{a}{b \cdot t \cdot (c_{1,1} + c_{1,2})} \quad (9)$$

gdzie:  $t$  – grubość arkusza blachy trapezowej = grubość zastępczej płyty ortotropowej;

$v$  – współczynnik Poissona;

$E$  – moduł sprężystości podłużnej stali;

$I_y^0$  – moment bezwładności prostokątnego przekroju zastępczego tarczy;

$I_y$  – moment bezwładności przekroju blachy trapezowej;

$l_p$  – długość linii rozwinięcia jednej fałdy blachy trapezowej;

$d$  – szerokość jednej fałdy blachy trapezowej;

$a, b$  – wymiary przepony;

$c_{1,1}, c_{1,2}$  – składniki podatności przepony na ścinanie wyznaczone analitycznie [2].

Macierz sztywności tarczowej  $\mathbf{D}$ , wyznaczona dla modelu (MB) tej samej przepony z blachy trapezowej (T2) o grubości arkusza  $t = 0,7$  mm przyjęła postać:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 194204,48 & 4,23 & 0 \\ 4,23 & 14,11 & 0 \\ 0 & 0 & 8665,51 \end{bmatrix} \text{ kN/m} \quad (10)$$

Procentowe stosunki wartości wyrazów macierzy  $\mathbf{D}$  w modelach (MA) i (MB) dla przepony z blachy trapezowej (T2) o grubości arkusza  $t = 0,7$  mm wyniosły:

$$\frac{D_{MB}}{D_{MA}} \cdot 100\% = \begin{bmatrix} 91 & 91 & 0 \\ 91 & 91 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \% \quad (11)$$

Otrzymane macierze sztywności tarczowej  $\mathbf{D}$  w modelach (MA) i (MB) różnią się więc znacząco (ok. 5-krotnie) składnikiem  $D_{33}$ . W procedurze zaimplementowanej w ARSA (MA) składnik ten uzależniono jedynie od geometrii przekroju blachy i właściwości materiału, zgodnie ze wzorem [4], który po przekształceniach przybiera postać:

$$D_{33} = G \cdot t \cdot \frac{d}{l_p} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \cdot t \cdot \frac{d}{l_p} \quad (12)$$

W modelu (MB), wyznaczając składnik  $D_{33}$  (wzory 4 - 9) uwzględniono natomiast wymiary przepony ( $a$ ,  $b$ ) i składniki podatności na ścinanie przepony  $c_{1,1}$  i  $c_{1,2}$  [2]. Składnik  $c_{1,1}$  (skutek spaczenia profilu blachy), zależy od geometrii blachy, ale również m.in. od sposobu mocowania arkusza do płatwi (w każdej fałdzie/co drugą) oraz od liczby arkuszy po szerokości przepony.

Wartości wyrazów macierzy sztywności giętej  $\mathbf{K}$  obliczono zgodnie z [9]:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} E \cdot \frac{I_y}{0,5 \cdot d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{l_p} \cdot \frac{E \cdot t^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 + \nu)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Formuły na ww. wartości wyrazów macierzy  $K_{11}$  i  $K_{22}$  znajdują również potwierdzenie w [2], tj. wynikają ze wzorów tam podanych i uproszczenia  $(1 - \nu^2) \approx 1$ . Moment bezwładności  $I_y$  obliczono ze wzoru 14 [10] (definicja zmiennych na rys. 1):

$$I_y = \frac{t}{2} \cdot \left[ \frac{4h^3}{3 \sin(90^\circ - \theta)} + 2h^2 \left( d - \frac{2h}{\tan(90^\circ - \theta)} \right) \right] \quad (14)$$

Macierz sztywności giętej  $\mathbf{K}$ , wyznaczona dla modeli (MB) przepony z blachy trapezowej (T2) o grubości arkusza  $t = 0,7$  mm miała postać:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 62,54 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (15)$$

W obu typach modeli (MA) i (MB) wartości wyrazów macierzy sztywności ścinania  $\mathbf{H}$  przyjęto takie same, np. dla blachy trapezowej (T2) o grubości arkusza  $t = 0,7$  mm zgodnie ze wzorem 3.

#### 4.3. Odwzorowanie połączeń

Podatności połączeń i łączników występujących w konstrukcji (rys. 3) mają bardzo duży wpływ na podatność tarczy dachowej. Poszukiwano zastępczego modelu numerycznego, który może zostać zastosowany w modelach całych konstrukcji, a więc odwzorowującego z zadowalającą dokładnością podatności połączeń elementów konstrukcji przy stosunkowo niewielkim stopniu skomplikowania modelu numerycznego i zwiększenia objętości jego pliku. Wykorzystano

metodę przedstawioną w [3], polegającą na uwzględnieniu właściwości połączeń i łączników elementów konstrukcji za pomocą specjalnych prętów pomocniczych w postaci belkowego elementu skończonego o schemacie statycznym wspornika. Celem było odwzorowanie podatności teoretycznych  $s$  połączeń, które przyjęto zgodnie z [2]. Wyjątek stanowiła podatność połączenia dźwigar/płatew na kierunku globalnym X, której wartość przyjęto jak w [3]. Znając wartość  $s$  i wykorzystując wzór na maksymalne wychylenie wspornika obciążonego siłą skupioną na jego swobodnym końcu, dla przyjętej długości pręta pomocniczego  $l_{eq}$  [3] wyznaczono, zgodnie ze wzorem 16, momenty bezwładności  $I_{eq}$ , jakie należało zadać zastępczym elementom belkowym. Korzystając z opisanej metody odwzorowano rozmieszczenie i podatność łączników głównych oraz połączenia dźwigar/płatew, a także – w przypadku (4K) – łączników pośrednich. Aby nie zwiększać liczby zmiennych, od których zależą wyniki i ich poprawność, w analizach pominięto łączniki uszczelniające. Przykładowe momenty bezwładności  $I_{eq}$  prętów pomocniczych przyjęte dla wariantów „11”, „13”, „21”, „23” (opis wariantów w punkcie 5) wyznaczono w tabeli 2.

$$I_{eq} = \frac{l_{eq}^3}{3sE} \quad (16)$$

Tabela 2. Przyjęcie przekrojów prętów pomocniczych – warianty „11”, „13”, „21”, „23”

Table 2. Calculations of cross sections of equivalent beam elements used in the analyses – variants „11”, „13”, „21”, „23”

Lp.	Rodzaj łącznika / połączenia	Długość pręta [3] $l_{eq}$ [mm]	Podatność teoretyczna $s$ [mm/kN]	Moment bezwładności $I_{eq}$ [mm <sup>4</sup> ]	Przyjęty przekrój zastępczy
1	Łącznik główny	1	0,35	0,00454	Pręt $\phi = 0,55$ mm
2	Połączenie dźwigar/płatew y-y	10	0,005	317,46032	Blacha 17,17 x 0,75 mm, długość 10 mm
	Połączenie dźwigar/płatew z-z	10	2,6	0,61050	
3	Łącznik pośredni	11	0,35	6,03628	Pręt $\phi = 3,32$ mm

## 5. Schemat przeprowadzonych porównań

Wykorzystując dwa typy modeli blachy trapezowej (MA) i (MB) przeanalizowano przepony dachowe podparte na dwóch (2K) i czterech (4K) krawędziach, każda z blachy trapezowej o różnej geometrii (T1) i (T2) (rys. 1) i różnej grubości. W tabeli 3 zestawiono analizowane przypadki. Parametry nie ujęte w tabeli 3 były stałe (opis w punkcie 3).

Tabela 3. Zestawienie wartości zmiennych w poszczególnych wariantach modeli przepon

Table 3. Comparison of values of variables in all variants of the diaphragm models

Wariant	$s_{pr}$ [mm/kN]	$s_p$ [mm/kN]	$s_{sc}$ [mm/kN]	$A$ [mm <sup>2</sup> ]	$t$ [mm]
11	2,6	0,35	0,35	814	0,7
12	<u>1,4</u>	<u>0,10</u>	0,35	814	
13	2,6	0,35	0,35	<u>1648</u>	
21	2,6	0,35	0,35	814	0,6
22	<u>1,4</u>	<u>0,10</u>	0,35	814	
23	2,6	0,35	0,35	<u>1648</u>	

## 6. Wyniki

W tabelach 4 - 7 zestawiono wartości podatności na ścinanie przepon uzyskane w programie ARSA oraz na podstawie zależności analitycznych określonych wg [2] („ECCS”). Obliczono błąd bezwzględny  $\Delta$  (różnicę wartości „ECCS” i wartości „ARSA”) oraz błąd względny procentowy % odniesiony do wartości otrzymanej analitycznie.

Tabela 4. Podatność na ścinanie przepony – podparcie 2K, model MA

Table 4. Shear flexibility of diaphragm – two sides fastening, model MA

Symbol modelu	Podatność na ścinanie przepony [mm/kN] - podparcie 2K							
	T1				T2			
	ECCS	ARSA	$\Delta$	%	ECCS	ARSA	$\Delta$	%
MA_011	1,286	1,174	0,112	8,7	1,308	1,175	0,133	10,2
MA_012	0,714	0,649	0,065	9,1	0,736	0,651	0,085	11,5
MA_013	1,274	1,155	0,119	9,3	1,296	1,157	0,139	10,7
MA_021	1,322	1,179	0,143	10,8	1,354	1,181	0,173	12,8
MA_022	0,750	0,655	0,095	12,7	0,781	0,656	0,125	16,0
MA_023	1,310	1,160	0,150	11,5	1,342	1,162	0,180	13,4

Tabela 5. Podatność na ścinanie przepony – podparcie 2K, model MB

Table 5. Shear flexibility of diaphragm – two sides fastening, model MB

Symbol modelu	Podatność na ścinanie przepony [mm/kN] - podparcie 2K							
	T1				T2			
	ECCS	ARSA	$\Delta$	%	ECCS	ARSA	$\Delta$	%
MB_011	1,286	1,249	0,037	2,9	1,308	1,271	0,037	2,8
MB_012	0,714	0,725	-0,011	-1,5	0,736	0,747	-0,011	-1,5
MB_013	1,274	1,230	0,044	3,5	1,296	1,252	0,044	3,4
MB_021	1,322	1,288	0,034	2,6	1,354	1,320	0,034	2,5
MB_022	0,750	0,763	-0,013	-1,7	0,781	0,796	-0,015	-1,9
MB_023	1,310	1,268	0,042	3,2	1,342	1,301	0,041	3,1

Tabela 6. Podatność na ścinanie przepony – podparcie 4K, model MA

Table 6. Shear flexibility of diaphragm – four sides fastening, model MA

Symbol modelu	Podatność na ścinanie przepony [mm/kN] - podparcie 4K							
	T1				T2			
	ECCS	ARSA	$\Delta$	%	ECCS	ARSA	$\Delta$	%
MA_011	0,178	0,121	0,057	32,0	0,200	0,122	0,078	39,0
MA_012	0,166	0,107	0,059	35,5	0,188	0,109	0,079	42,0
MA_013	0,166	0,109	0,057	34,3	0,188	0,111	0,077	41,0
MA_021	0,214	0,124	0,090	42,1	0,246	0,127	0,119	48,4
MA_022	0,202	0,110	0,092	45,5	0,233	0,113	0,120	51,5
MA_023	0,202	0,113	0,089	44,1	0,234	0,115	0,119	50,9

Tabela 7. Podatność na ścinanie przepony – podparcie 4K, model MB

Table 7. Shear flexibility of diaphragm – four sides fastening, model MB

Symbol modelu	Podatność na ścinanie przepony [mm/kN] - podparcie 4K							
	T1				T2			
	ECCS	ARSA	$\Delta$	%	ECCS	ARSA	$\Delta$	%
MB_011	0,178	0,193	-0,015	-8,4	0,200	0,215	-0,015	-7,5
MB_012	0,166	0,179	-0,013	-7,8	0,188	0,201	-0,013	-6,9
MB_013	0,166	0,182	-0,016	-9,6	0,188	0,204	-0,016	-8,5
MB_021	0,214	0,229	-0,015	-7,0	0,246	0,261	-0,015	-6,1
MB_022	0,202	0,215	-0,013	-6,4	0,233	0,247	-0,014	-6,0
MB_023	0,202	0,218	-0,016	-7,9	0,234	0,250	-0,016	-6,8

## 7. Obserwacje

Porównano dwa narzędzia dostępne w programie ARSA, a więc również w większości innych inżynierskich programów do modelowania numerycznego konstrukcji, w których możliwe jest korzystanie z powłokowych elementów skończonych. Na etapie budowy modelu zaobserwowano, że:

- charakterystyka zastępczego modelu ortotropowego blachy trapezowej zależy od wyboru metody jej wyznaczania; nie ma jednego ścisłego rozwiązania analitycznego tego problemu, co utrudnia interpretowanie rezultatów analiz i może prowadzić do błędnych wniosków,
- otrzymane macierze sztywności tarczowej w modelach (MA) i (MB) różnią się znacząco (ok. 5-krotnie) składnikiem  $D_{33}$ , który wpływa na wartość podatności analizowanej przepony,
- model (MA) nie uwzględnia podatności przepony wynikającej ze spaczenia profilu blachy, natomiast model (MB) w sposób pośredni ją odwzorowuje (składnik  $D_{33}$  zależny jest od analitycznie wyznaczonej wartości  $c_{1,1}$ ),
- zastępcze ortotropowe modele numeryczne blachy trapezowej nie odwzorowują lokalnych zmian sztywności blachy,

- narzędzia zaimplementowane w komercyjnych programach komputerowych do numerycznej analizy przestrzennej konstrukcji, takie jak zastosowane w modelach (MA) predefiniowane ortotropowe powłoki płaskie, są niewątpliwie dużym ułatwieniem dla projektanta; należy jednak pamiętać, że program komputerowy wykorzystuje jedną ze znanych procedur wyznaczania macierzy sztywności zastępczej płyty ortotropowej, ograniczoną pewnymi założeniami i opartą na przybliżeniach.

Uzyskane wyniki pokazały, że:

- przepony zbudowane za pomocą predefiniowanej powłoki płaskiej o geometrii blachy trapezowej, tj. modele (MA) charakteryzowały się mniejszą podatnością na ścinanie niż przepony zbudowane za pomocą powłoki płaskiej definiowanej wprowadzanymi przez użytkownika macierzami sztywności, tj. modele (MB),
- lepszą zgodność z rozwiązaniem analitycznym w obu przypadkach podparcia paneli (2K i 4K) uzyskano w modelach (MB); błąd względny procentowy wyniósł  $-1,9 \div 3,5\%$  w przypadkach (2K) i  $6,0 \div 9,6\%$  w przypadkach (4K),
- w modelach (MB) dla modeli przepony różniących się tylko blachą (grubością  $t$  i wysokością  $h$ ), a o stałych pozostałych parametrach (np. dla wariantów T1\_11, T2\_11, T1\_21 i T2\_21 zarówno dla 2K jak i dla 4K) uzyskano zbliżony błąd bezwzględny  $\Delta$ , natomiast w przypadku wariantowania parametrów niezależnych od blachy, wartość  $\Delta$  zmieniała się; może to oznaczać, że zastępczy model blachy zastosowany w (MB) jest w niewielkim stopniu wrażliwy na zmianę parametrów blachy, czyli poprawnie odwzorowuje blachę, a błąd bezwzględny  $\Delta$  wynika z niedoskonałości odwzorowania połączeń elementów; zidentyfikowanie i wyeliminowanie tego błędu pozwoliłoby uzyskać lepszą zbieżność wyników numerycznych z wartościami analitycznymi,
- podparcie (4K) znacząco zwiększa sztywność przepon; z uwagi na konieczność stosowania elementów pośrednich, jest jednak w systemach płatwiowych mało praktyczne.

## 8. Podsumowanie

Przytoczone w artykule działania dały obraz podobieństw i różnic dwóch modeli obliczeniowych uwzględniających tarczową pracę pokrycia dachowego z blachy trapezowej oraz pozwoliły, na podstawie obserwacji wartości podatności na ścinanie pojedynczych przepon, skonfrontować procedury analityczne z numerycznymi i analityczno-numerycznymi. Miarą trafności analizowanego modelu obliczeniowego poszycia był poziom zgodności ww. wartości podatności. Zgodnie z tym kryterium zastępczy model blachy trapezowej (MB) poprawnie odzwierciedlał współpracę poszycia z konstrukcją nośną hali niż model (MA). Uzyskane rezultaty dają więc podstawy do wyboru modelu numerycznego (MB) do dalszych, bardziej zaawansowanych analiz konstrukcji. W obliczu

wielu parametrów, od których zależały otrzymane rezultaty, otwartym jednak pozostaje pytanie, czy przybliżanie się do wyniku analitycznego było faktycznym zbliżaniem się do prawidłowego rozwiązania.

## Literatura

- [1] Bródka J., Garncarek R., Miłaczewski K.: Blachy fałdowe w budownictwie stalowym. Wyd. Arkady, Warszawa, 1999.
- [2] European Recommendations for the Application of Metal Sheeting Acting as a Diaphragm. Stressed Skin Design. ECCS – TC7, TWG 7.5, May 1995.
- [3] Gryniwicz M., Szlendak J.K.: FEM model of the steel building roof includes stressed skin diaphragm action effects. The International Conference on Metal Structures, Zielona Góra, 2016.
- [4] <http://help.autodesk.com/view/RSAPRO/2015/PLK/>: Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2015 – Pomoc dla użytkownika. {dostęp 12.02.2017 r.}.
- [5] Joó A. L., Dunai L.: Full-scale experimental tests on steel frames with various claddings. Eighth International Conference on Advances in Steel Structures, Lisbon, Portugal, July 22-24, 2015.
- [6] Lendvai A., Joó A. L.: Test based finite element development for diaphragm action. The International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures, Timisoara, Romania, 2016.
- [7] Nagy Zs., Pop A., Mois I., Ballok R.: Stressed Skin Effect on the Elastic Buckling of Pitched Roof Portal Frames. Structures 2016, <http://dx.doi.org/10.1016/j.istruc.2016.05.001>. {dostęp 12.02.2017 r.}.
- [8] PN-EN 1993-1-3:2008. Eurokod 3. Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-3: Reguły ogólne. Reguły uzupełniające dla konstrukcji z kształtowników i blach profilowanych na zimno.
- [9] Wennberg D., Wennhage P., Stichel S.: Orthotropic Models of Corrugated Sheets in Finite Element Analysis, ISRN Mechanical Engineering, Vol. 2011, Art. ID 979532, doi:10.5402/2011/979532.
- [10] Xia Y., Friswell M.I., Saavedra Flores E.I.: Equivalent models of corrugated panels, International Journal of Solids and Structures 49 (2012) 1453-1462.

## NUMERICAL MODELS OF TRAPEZOIDAL SHEETING ACTING AS A DIAPHRAGM

### Summary

The paper presents the comparison of selected numerical models of trapezoidal cladding acting as a diaphragm which can be used in computer program called Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2015. The aim of the analyses was to evaluate the validity of using these models in calculations of the structure including the stressed skin effect.

The analyses were carried out for the cantilevered diaphragm as a part of the roof of the single storey steel building. Corrugated sheets were replaced by two types of equivalent orthotropic shell models and the influence of the choice of the model on the stiffness of the diaphragm was observed. Fasteners and connections were substituted by equivalent beam finite elements and their flexibility was included in the calculations.

---

The evaluation of numerical models of trapezoidal sheeting was contingent upon the degree of the agreement between numerical and analytical results of the shear flexibility of analyzed diaphragms, calculated according to [2]. In compliance with this criterion, more accurate numerical model of trapezoidal cladding acting as a diaphragm was pointed.

**Keywords:** steel structures, single storey building, diaphragm, stressed skin design, orthotropic plate model

*Przesłano do redakcji: 05.10.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 15.12.2017 r.*