Dada Anna SZCZEPANIAK
Instytut Ogrzewnictwa i Wentylacji
Politechniki Warszawskiej

ELEMENTARNY DOWÓD KONSTRUKCJI STYCZNEJ DO ELPISY I PUNKTU STYCZNOŚCI (ELIPSA DANA ŚREDNICAMI SPRZĘŻONYMI)

Sześciokąt ***(123456)*** wpisany w stożkową, będącą utworem dwóch rzutowych pęków prostych, posiada tę własność, że punkty przecięcia się przeciwległych par boków sześciokąta leżą na jednej prostej ***p*** - zwanej prostą Pascala.

Prostą Pascala ***p*** dla sześciokąta ***(123456)*** otrzymujemy według schematu:

$$\begin{array}{r|l} 1\;2\;3 & 4\;5\;6 \\ \hline 1\;2 & 4\;5\;\ldots\;\mathrm{I} \\ 2\;3 & 5\;6\;\ldots\;\mathrm{II} \\ 3\;4 & 1\;6\;\ldots\;\mathrm{III} \end{array} \;\Big\}\; p \text{ - prosta Pascala}$$

Jeśli wierzchołki sześciokąta przyjmujemy za punkty stałe stożkowej i uwzględniając porządek w jakim następują kolejno po sobie poszczególne wierzchołki tego sześciokąta np. rozpoczynając wypisywanie wierzchołków od ***3***, otrzymujemy dla tego sześciokąta dwie formy; ***(345612)*** i ***(321654)***. Analogicznie wychodząc np. z wierzchołka 4 otrzymujemy również dwie formy ***(456123)*** i ***(432165)***. Wnioskujemy stąd, że dla jednego i tego samego sześciokąta możemy wypisać 12 takich form.

Gdy zaś uwzględnimy inny sześciokąt np. ***(134562)***, dla którego według schematu podanego wyżej możemy wypisać znowu 12 różnych form, to jak widać dla sześciu stałych wierzchołków otrzymujemy:

$$\frac{6!}{12} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{12} = 60$$

różnych sześciokątów i wyznaczonych dla nich, różnych od siebie prostych Pascala.

Twierdzenie Pascala umożliwia łatwe wyznaczanie punktu przecięcia stożkowej przez dowolną prostą przechodzącą przez jeden z danych punktów tej stożkowej oraz wyznaczanie stycznej do stożkowej jako graniczne położenie siecznej. Jeśli rozpatrzymy elipsę określoną średnicami sprzężonymi wraz z opisanym na niej równoległobokiem stycznym w punktach ***A B C D*** oraz jej dowolny punkt ***S*** to prosta Pascala sześciokąta ***(SDD'BAA')*** otrzymana według schematu:

$$\begin{array}{r|l} S\;D\;D' & B\;A\;A' \\ \hline S\;D & B\;A\;\ldots\;\mathrm{I} \\ D\;D' & A\;A'\;\ldots\;2 \\ D'\;B & S\;A'\;\ldots\;3 \end{array} \;\Big\}\; p = (\,\mathrm{I}\;\;3\,)$$

przecina średnicę ***AB*** w punkcie ***I***.

Dla otrzymania stycznej ***s*** w punkcie ***S***, rozpatrzmy sześciokąt ***(SDBB'AS')***. Widoczne jest, że prosta:

S D B	B'A S'	
S D	B'A ... I	
D B	A S' ... 3	p = (I 3)
B B'	S S' ... III	

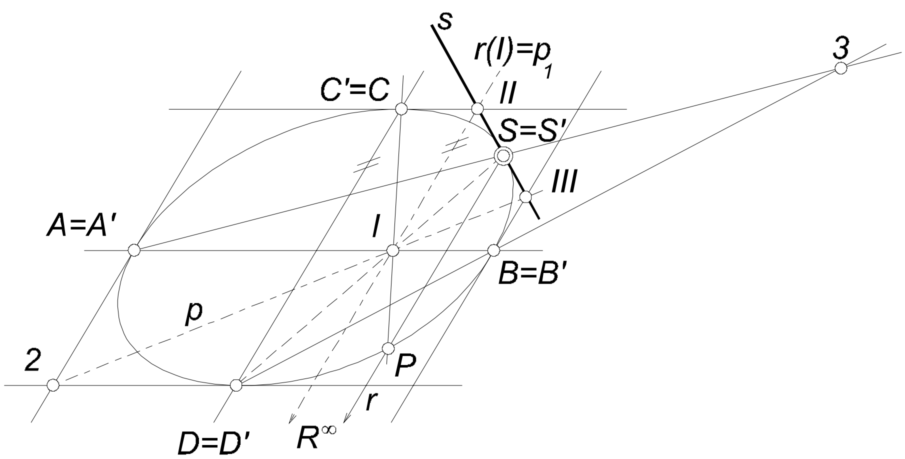
Pascala jest identyczna z poprzednią i że punkt przecięcia się ***III*** stycznej ***s*** ze styczną elipsy w punkcie ***B*** leży na tej prostej.

Jeśli przez punkt ***S*** poprowadzimy sieczną ***r*** równoległą do średnicy ***CD*** otrzymujemy drugi punkt przecięcia z elipsą: punkt ***P***.

Rozważając sześciokąt ***(SS'CDD'P)*** wnioskujemy, że otrzymana według schematu

S S' D	C C'P	
S S'	C C' ... II	
S' D	C' P ... I	p_1 // C D
D C	P S ... R^∞	

prosta Pascala jest równoległa do średnicy ***CD*** i do prostej siecznej ***r*** (rys.1), a styczna ***s*** przechodzi przez wyznaczone punkty ***II*** i ***III*** na opisanym równoległoboku ***ABCD***. Z rozważanych powyżej wpisanych w elipsę sześciokątów i ich prostych Pascala wynika konstrukcja stycznej i punktu styczności.



rys.1

Konstrukcja (rys. 1)

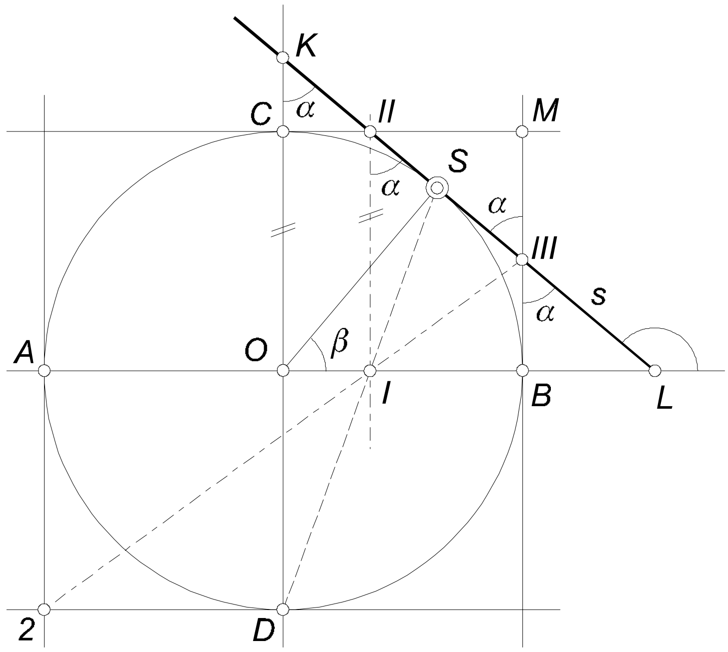
1° Przez dowolnie obrany punkt ***I*** na średnicy ***AB*** prowadzimy prostą ***r (I)*** // ***CD*** i otrzymujemy punkt ***II*** na boku równoległoboku.

2° Prosta ***2 I*** wyznacza na boku równoległoboku punkt ***III*** - zatem otrzymujemy styczną ***s = (II , III)*** .

3° Prosta ***DI*** w przecięciu stycznej ***s*** daje punkt styczności ***S*** .

Zauważmy, że zmieniając położenie punktu ***I*** na średnicy ***AB*** skonstruować możemy dalsze sty-czne i ich punkty styczności do danej elipsy określonej średnicami sprzężonymi lub osiami.

Aby elementarnie uzasadnić konstrukcję podaną wyżej rozważ-my okrąg wraz z opisanym na nim kwadratem ***ABCD*** oraz dowolnym jego punktem ***S*** (rys. 2).



rys. 2

Należy wykazać, że kąt w wierzchołku ***S*** trójkąta ***Δ (O S K)*** jest kątem prostym. Oznaczmy kąt w wierzchołku ***K*** jako kąt ***α*** wówczas kąt między styczną ***s*** i prostą ***I II*** jest również równy ***α*** . Rozpatrując trójkąty*:* ***Δ (L III B)*** ***Δ (II III M)*** i ***Δ (II K C)*** zauważamy, że kąt ostry ***α*** występuje w każdym z nich. Jest on zawarty przy wierzchołku ***III*** dla trójkątów: ***Δ (L III B)*** i ***Δ (II III M)*** oraz w trójkącie ***Δ (II K C)*** w wierzchołku ***K*** z przyjętego założenia.

Ponadto zauważmy, że trójkąty te są prostokątne o kątach prostych w wierzchołkach ***B, M, C*** tych trójkątów. Rozważane trójkąty są więc podobne. W trójkącie ***Δ (O L S)*** kąt w wierzchołku ***L*** jest równy ***(90 - α□)***, a kąt w wierzchołku ***O*** oznaczmy ***β*** . Zauważmy jednak, że kąt zewnętrzny tego trójkąta w wierzchołku ***L*** jest równy ***(90 + α□)***, zatem ***α*** = ***β□***. Wnioskujemy stąd, że trójkąty ***Δ (O S L)*** i ***Δ (O S K)*** są podobne i prostokątne. Tym samym wykazaliśmy elementarne uzasadnienie konstrukcji stycznej i punktu styczności.

LITERATURA:

[1]. K.Bartel: „Geometria Wykreślna“, PWN, Warszawa 1958
[2]. B.Grochowski: „Geometria Wykreślna”, PWN, Warszawa 1965
[3]. A.Plamitzer: „Elementy geometrji rzutowej”, druk. ks. K.S.Jakubowski, Lwów 1927

ELEMENTARY PROOF OF TANGENT AND POINTS OF TANGENCY TO ELLIPSE CONSTRUCTIONS

One of many constructions of the tangent and point of tangents to ellipse is considered. The correctness of the presented constructions is proved by means Pascal’s theorem.