



**Article citation info:**

Batsch, M. Surface strength of Novikov convexo-concave gears. *Scientific Journal of Silesian University of Technology. Series Transport*. 2016, **90**, 17-24. ISSN: 0209-3324. DOI: 10.20858/sjsutst.2016.90.2.

**Michał BATSCH**<sup>1</sup>

## **SURFACE STRENGTH OF NOVIKOV CONVEXO-CONCAVE GEARS**

**Summary.** Article presents the algorithm for obtaining maximum surface stresses for Novikov gears. Described surface strength calculation method is based on Hertz theory of two bodies being in point contact. What's more the influence of gear position errors on maximum contact stresses has been presented. Also the comparison of Hertz stresses for Novikov and involute gears has been made.

**Keywords:** surface strength, Novikov convexo-concave gear, Hertz theory, deviation

## **NOŚNOŚĆ POWIERZCHNIOWA PRZEKŁADNI ZĘBATYCH O KOŁOWO-LUKOWYM ZARYSIE ZĘBÓW TYPU NOWIKOWA**

**Streszczenie.** Artykuł przedstawia algorytm wyznaczania maksymalnych naprężeń stykowych dla przekładni zębatych typu Nowikowa. Opisywana metoda obliczeń wytrzymałościowych na naciski opiera się na zastosowaniu klasycznej teorii Hertza dla styku punktowego dwóch dowolnych ciał. Ponadto przedstawiono wpływ błędów położenia osi kół przekładni na wielkość nacisków powierzchniowych. Dokonano również porównania naprężeń uzyskanych w wyniku zastosowania wzorów Hertza dla przekładni Nowikowa i ewolwentowej.

**Słowa kluczowe:** nośność powierzchniowa, przekładnia zębata Nowikowa o kołowo-lukowym zarysie zębów, teoria Hertza, odchyłki

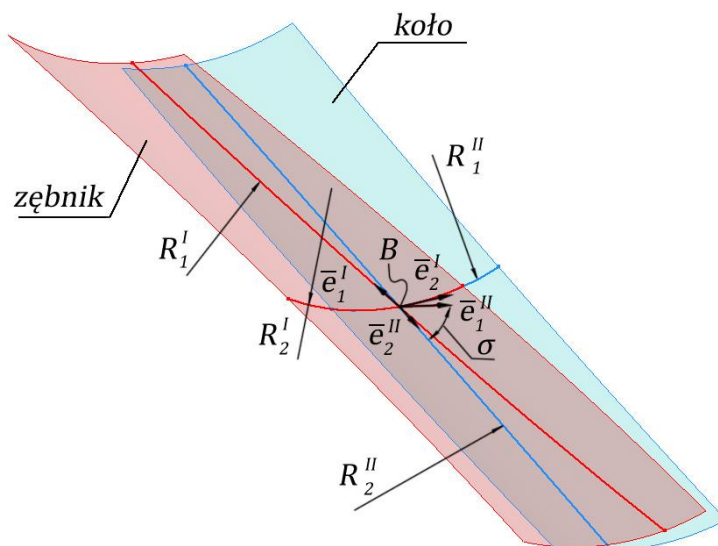
<sup>1</sup> Faculty of Mechanical Engineering and Aeronautics, Rzeszow University of Technology, al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów, Poland. E-mail: mbatsch@prz.edu.pl.

## 1. WPROWADZENIE

W artykule opisano metodę pozwalającą na wyznaczenie naprężeń stykowych kół przekładni Nowikowa. Metoda ta bazuje na klasycznym podejściu, opartym na teorii Hertza [2], z którego korzystano w pracach [1, 4]. Ponadto wyznaczono wpływ błędów montażu przekładni na wielkość nacisków powierzchniowych oraz porównano wytrzymałość stykową przekładni Nowikowa z wytrzymałością stykową przekładni ewolwentowej.

## 2. WYZNACZANIE NAPRĘŻEŃ STYKOWYCH WG HERTZA

Styk zębów przekładni Nowikowa jest punktowy. Pod wpływem działania sił zęby odkształcają się, a styk odbywa się na pewnej powierzchni, zazwyczaj ograniczonej elipsą. Niniejszy rozdział stanowi opis toku postępowania w przypadku wyznaczania naprężeń stykowych wg Hertza dla punktowego styku zębów przekładni Nowikowa. W celu wyznaczenia naprężeń należy rozważyć dwie stykające się powierzchnie, pokazane na rysunku 1.



Rys. 1. Styk punktowy powierzchni bocznych zębów przekładni Nowikowa

Stykające się powierzchnie opisane są za pomocą głównych promieni krzywizn. Kąt  $\sigma$  jest to kąt pomiędzy odpowiednimi kierunkami głównymi powierzchni. W otoczeniu punktu styku  $B$  stykające się powierzchnie można opisać paraboloidami o równaniach [1]:

$$z_1 = \frac{1}{2R_1^I} x_1^2 + \frac{1}{2R_1^{II}} y_1^2 \quad (1)$$

$$z_2 = - \left( \frac{1}{2R_2^I} x_2^2 + \frac{1}{2R_2^{II}} y_2^2 \right) \quad (2)$$

gdzie:

$R_1^I, R_1^{II}$  – odpowiednio promienie krzywizn głównych – pierwszej i drugiej – powierzchni bocznej zęba zębownika,

$R_2^I, R_2^{II}$  – promienie krzywizn głównych – pierwszej i drugiej – powierzchni bocznej zęba koła.

Odległość pomiędzy powierzchniami mierzona wzdłuż osi  $z$ , pokrywającej się ze wspólną, normalną obydwu powierzchni wyraża się wzorem:

$$h = Ax^2 + By^2 + Cxy \quad (3)$$

Osie układu współrzędnych obiera się tak, aby współczynnik  $C$  przyjął wartość zero. Jest to spełnione, gdy:

$$\begin{cases} A + B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1^I} + \frac{1}{R_1^{II}} + \frac{1}{R_2^I} + \frac{1}{R_2^{II}} \right) \\ B - A = \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{1}{R_1^I} - \frac{1}{R_1^{II}} \right)^2 + \left( \frac{1}{R_2^I} - \frac{1}{R_2^{II}} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{R_1^I} - \frac{1}{R_1^{II}} \right) \left( \frac{1}{R_2^I} - \frac{1}{R_2^{II}} \right) \cos 2\sigma} \end{cases} \quad (4)$$

Rozwiązując układ równań (4) można wyznaczyć współczynniki  $A$  i  $B$  w postaci (5)

$$\begin{cases} A = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{R_1^I} + \frac{1}{R_1^{II}} + \frac{1}{R_2^I} + \frac{1}{R_2^{II}} - \sqrt{\left( \frac{1}{R_1^I} - \frac{1}{R_1^{II}} \right)^2 + \left( \frac{1}{R_2^I} - \frac{1}{R_2^{II}} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{R_1^I} - \frac{1}{R_1^{II}} \right) \left( \frac{1}{R_2^I} - \frac{1}{R_2^{II}} \right) \cos 2\sigma} \right) \\ B = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{R_1^I} + \frac{1}{R_1^{II}} + \frac{1}{R_2^I} + \frac{1}{R_2^{II}} + \sqrt{\left( \frac{1}{R_1^I} - \frac{1}{R_1^{II}} \right)^2 + \left( \frac{1}{R_2^I} - \frac{1}{R_2^{II}} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{R_1^I} - \frac{1}{R_1^{II}} \right) \left( \frac{1}{R_2^I} - \frac{1}{R_2^{II}} \right) \cos 2\sigma} \right) \end{cases} \quad (5)$$

Wówczas odległość pomiędzy powierzchniami wyraża się wzorem (6):

$$h = Ax^2 + By^2 = \frac{1}{2R^I} x^2 + \frac{1}{2R^{II}} y^2, \quad (6)$$

gdzie  $R^I, R^{II}$  to główne, względne promienie krzywizn.

Dla tak opisanej, w otoczeniu punktu styku, geometrii rozkład naprężeń jest półelipsoidą o równaniu (7):

$$\sigma_H = \sigma_{Hmax} \sqrt{1 - \left( \frac{x}{a_e} \right)^2 - \left( \frac{y}{b_e} \right)^2}, \quad (7)$$

gdzie:  
 $a_e, b_e$  – to odpowiednio mała i wielka osie elipsy styku,  
 $\sigma_{Hmax}$  – maksymalne naprężenia stykowe.

Parametry obszaru styku  $a_e$  i  $b_e$  określa się rozwiązując równanie (8):

$$\frac{B}{A} = \frac{\left(\frac{a_s}{b_s}\right)^2 E(e) - K(e)}{K(e) - E(e)}, \quad (8)$$

gdzie:

$K(e)$  – zupełna całka eliptyczna drugiego rodzaju,

$E(e)$  – zupełna całka eliptyczna pierwszego rodzaju,

$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b_s}{a_s}\right)^2}$  – argument całki.

Równanie (8) można rozwiązać numerycznie, np. metodami Newtona lub bisekcji. Po jego rozwiązaniu znany jest stosunek wielkiej osi elipsy styku do osi małej  $b_e/a_e$ . Następnie, wykorzystując zależność (9) oblicza się oś wielką elipsy styku:

$$b_s = \left(\frac{3PR_s}{4E^*}\right)^{\frac{1}{3}} F_1(e) \sqrt{\frac{b_s}{a_s}}, \quad (9)$$

gdzie:

$R_e$  – równoważny promień krzywizny określony zależnością (10)

$$R_s = \frac{1}{2}(AB)^{-\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

gdzie:

$F_1(e)$  – współczynnik zależny od stosunku  $b_e/a_e$ , wyrażony wzorem (11)

$$F_1(e) = \left(\frac{4}{\pi e^2} \left(\frac{b_s}{a_s}\right)^{3/2} \sqrt{\left(\frac{a_s}{b_s}\right)^2 (E(e) - K(e))(K(e) - E(e))}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad (11)$$

gdzie:

$E^*$  – zastępczy moduł Younga, określony równaniem (12)

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}, \quad (12)$$

gdzie:

$E_1, E_2$  – moduły Younga materiału odpowiednio zębniaka i koła,

$\nu_1, \nu_2$  – współczynniki Poissona materiału odpowiednio zębniaka i koła.

Znając stosunek osi wielkiej do osi małej elipsy styku, wyznaczony jako rozwiązanie równania (8), oraz oś wielką, określoną równaniem (9) można wyznaczyć oś małą jako (13):

$$a_s = \frac{b_s}{b_s/a_s} \quad (13)$$

Maksymalne naprężenia występujące w punkcie styku określa zależność (14):

$$\sigma_{Hmax} = \frac{3P}{2\pi a_g b_g}, \quad (14)$$

gdzie  $P$  to siła obwodowa.

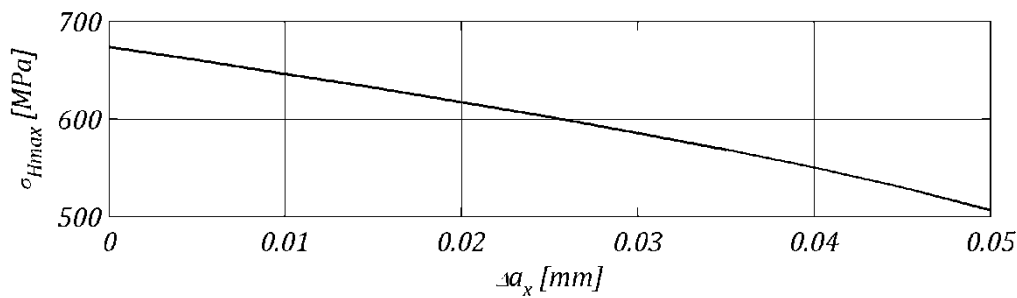
Z uwagi na przetaczanie się punktu styku i poskokowy wskaźnik przyporu siła ta zmienia swoją wartość. Zatem dla przekładni o poskokowym wskaźniku przyporu mieszczącym się w granicach od 1 do 2 w celu obliczenia naprężeń stykowych w połowie szerokości wieńca we wzorze (14) należy przyjąć nominalną maksymalną wartość siły obwodowej. Siła ta jest wówczas przenoszona przez jeden ząb. W przypadku innego położenia punktu styku siła obwodowa może być przenoszona przez dwa zęby, wówczas można ją zmniejszyć dwa razy.

### 3. WPLYW BŁĘDÓW MONTAŻU PRZEKŁADNI NA WIELKOŚĆ NAPRĘŻEŃ STYKOWYCH

Jak wynika z przeprowadzonej analizy styku zębów przekładni Nowikowa [3], w której uwzględniono błędy położenia osi, punkt styku zmienia swoje położenie na powierzchni bocznej zęba w stosunku do swojego położenia dla przekładni bezodchyłkowej. Zmieniają się wówczas krzywizny oraz kierunki główne w punkcie styku, które są zależne od parametrów powierzchni, definiujących położenie tego punktu. Wobec powyższego można się spodziewać zmiany wielkości nacisków powierzchniowych. Aby je wyznaczyć, należy zastosować metodę Hertza (opisaną w rozdziale 2) z wykorzystaniem nowych, głównych promieni krzywizn i nowego kąta pomiędzy kierunkami głównymi powierzchni. Wielkości te wyznacza się z wykorzystaniem parametrów powierzchni, uzyskanych w wyniku analizy styku zębów, która uwzględnia błędy położenia osi przekładni.

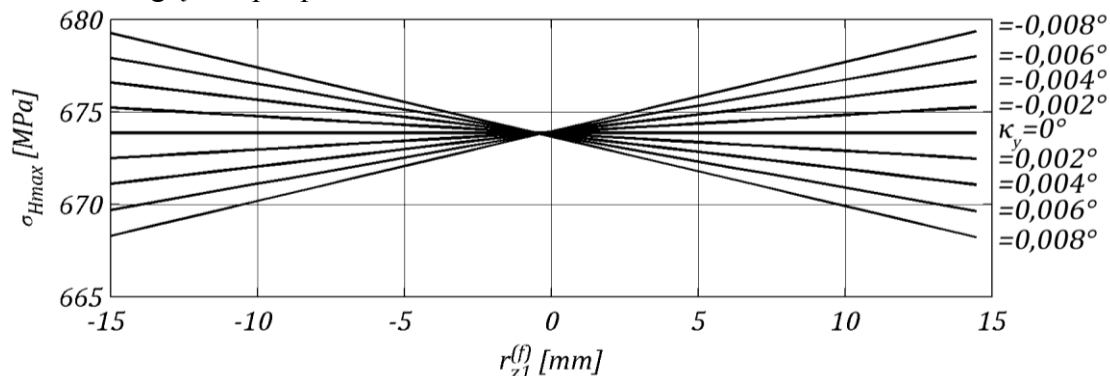
Rysunek 2 przedstawia wpływ błędu rozstawienia osi kół na wielkość nacisków powierzchniowych dla przykładowej przekładni Nowikowa, obciążonej momentem obrotowym  $M_I = 550 \text{ Nm}$ .

W przypadku uwzględnienia jedynie błędu rozstawienia osi kół, naciski są takie same na całym obszarze ruchu punktu styku. Im błąd ten zwiększa się, tym naciski stają się mniejsze. Zjawisko to można wyjaśnić spadkiem rzeczywistego kąta przyporu, a co za tym idzie – przesunięciem się punktu styku ku stopie zęba zębownika, gdzie zmniejsza się stosunek średnich głównych promieni krzywizn. Przy projektowaniu przekładni Nowikowa należy uwzględnić błąd rozstawienia osi oraz celowo zwiększyć kąt przyporu lub stosunek promienia zarysu zębownika do jego promienia podziałowego, co pozwala na zmniejszenie naprężeń stykowych oraz kontrolę nad położeniem obszaru styku. Należy również zaznaczyć, że zbyt duży błąd rozstawienia osi może w efekcie prowadzić do zwiększenia naprężeń, w wyniku ich koncentracji spowodowanej krawędziowaniem śladu styku.



Rys. 2. Zależność nacisków powierzchniowych od błędu rozstawienia osi

Na rysunku 3 przedstawiono wpływ błędu przekoszenia osi dla symetrycznego położenia przekładni względem podpór.



Rys. 3. Zależność nacisków powierzchniowych od położenia punktu styku oraz błędu przekoszenia osi

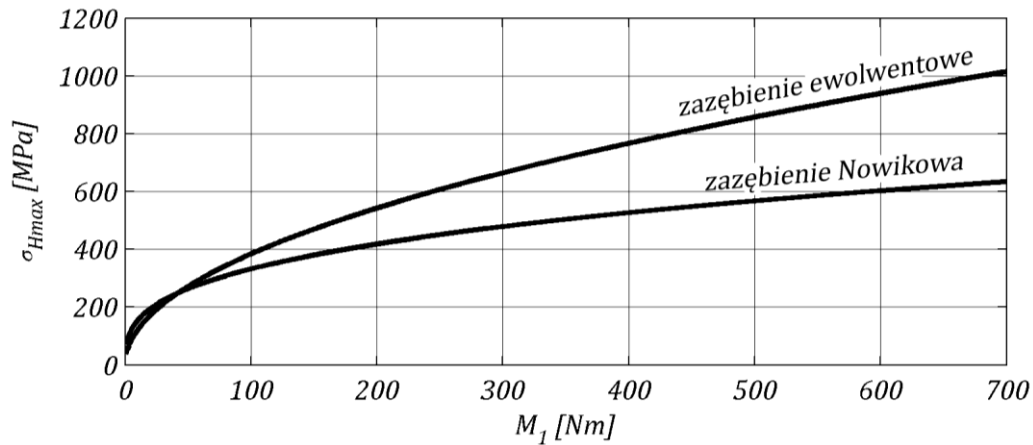
Naciski zwiększają się lub zmniejszają w zależności od znaku kąta  $\kappa_y$ , począwszy od wejścia w zazębienie aż do wyjścia z zazębienia.

#### 4. PORÓWNANIE NAPRĘŻEŃ STYKOWYCH PRZEKŁADNI EWOLWENTOWEJ ORAZ NOWIKOWA

W niniejszym rozdziale porównano teoretyczne naprężenia wg Hertza dla przekładni ewolwentowej oraz Nowikowa. Naprężenia stykowe dla przekładni Nowikowa obliczono w połowie szerokości wieńca metodą z rozdziału 2., bez uwzględnienia błędów położenia osi. Naprężenia dla przykładowej przekładni ewolwentowej wyznaczono bazując na znanym wzorze (15) [6, 5].

$$\sigma_{Hmax} = C_{m,\alpha} \sqrt{\frac{P \cos^2 \beta}{b \varepsilon_\alpha d_1} \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)} \quad (15)$$

Rysunek 4 przedstawia zależności naprężeń Hertza od momentu obciążającego zębnik dla przekładni ewolwentowej oraz Nowikowa o tych samych parametrach.



Rys. 4 Porównanie naprężeń Hertza przekładni ewolwentowej oraz Nowikowa

Dla małych obciążeń zazębienie ewolwentowe wykazuje większą nośność na naciski aniżeli zazębienie Nowikowa. Dla obydwu przekładni naprężenia są równe dla momentu  $M_1=42 \text{ Nm}$ . Powyżej tej wartości teoretyczna nośność zazębienia Nowikowa w porównaniu do ewolwentowego znacząco rośnie. Dla momentu  $M_1=480 \text{ Nm}$  naprężenia w przekładni o zarysie Nowikowa są 1,5 razy mniejsze niż w przekładni o zarysie ewolwentowym. Wynika stąd fakt, że zazębienie Nowikowa będzie opłacało się stosować dla przekładni silnie obciążonych, gdzie wytrzymałość stykowa odgrywa największą rolę. W rzeczywistości w zależności od wartości błędów położenia osi przekładni Nowikowa naprężenia te, jak zostało pokazane w rozdziale 3., mogą wzrosnąć bądź zmaleć.

## 5. WNIOSKI I PODSUMOWANIE

Artykuł przedstawia zastosowanie teorii Hertza w obliczeniach wytrzymałościowych kół przekładni Nowikowa. Wyznaczono w nim wpływ błędów montażu przekładni na wielkość nacisków powierzchniowych. Porównane również zostały maksymalne naprężenia Hertza dla przekładni ewolwentowej oraz Nowikowa.

W przypadku przekładni silnie obciążonych zazębienie Nowikowa odznacza się teoretycznie większą nośnością na naciski aniżeli zazębienie ewolwentowe. Ponadto błąd rozstawienia osi kół przekładni może korzystnie wpływać na rozkład naprężeń przez przesunięcie punktu styku ku stopie zęba wypukłego, gdzie stosunek średnich promieni krzywizn jest mniejszy. W zależności od charakteru błędu, przekoszenia osi naprężenia nieznacznie rosną bądź maleją wzdłuż szerokości wieńca, począwszy od wejścia w zazębienie aż do wyjścia.

## 6. PODZIĘKOWANIA

Badania realizowane w ramach Projektu „Nowoczesne technologie materiałowe stosowane w przemyśle lotniczym” Nr POIG.01.01.02-00-015/08-00 w Programie Operacyjnym Innowacyjna Gospodarka (PO IG). Projekt współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego.

## References

1. Dyson A., H.P. Evans, W. Snidle. 1989. "Wildhaber-Novikov circular arc gears: some properties of relevance to their design". *Proceedings of The Royal Society A* 425: 341-363.
2. Johnson K.L. 2003. *Contact mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press.
3. Markowski T., M. Batsch. 2013. "Analysis of the Contact Region Geometry of the Novikov Convexo-Concave Gears". In *AIRTEC 2013*. Frankfurt 5-7.10.2013.
4. Markowski T., A. Kawalec. 1995. "An Analysis of the Contact Area Parameters Which Influence the Load Capacity of a Mesh". In *2nd Int. Scientific Colloquium CAE Techniques*. Bielefeld 1995.
5. Markowski T., M. Mijał, E. Rejman. 2000. *Podstawy konstrukcji maszyn. Napędy mechaniczne Cz. I*. [In Polish: *Machine construction basics. Mechanical drives Vol. I*]. Rzeszów: Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej.
6. Ochęduszko K. 1985. *Koła zębate T.1 Konstrukcja*. [In Polish: *Gears T.1 Construction*]. Warszawa: WNT.

Received 11.08.2015; accepted in revised form 21.12.2015



Scientific Journal of Silesian University of Technology. Series Transport is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License