

# Optymalna wysokość wolnopodpartej żelbetowej belki prefabrykowanej o przekroju prostokątnym

Szymon Sobczyk

*Institut Mechaniki Budowli, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska,  
e-mail: szymek.sobczyk@gmail.com*

**Streszczenie:** Praca dotyczy optymalnego kształtowania wolnopodpartych prefabrykowanych belek żelbetowych. W artykule skupiono się na optymalnym doborze wysokości przekroju poprzecznego przy ustalonej długości, szerokości, stopniu zbrojenia elementu oraz przy określonych obciążeniach zewnętrznych. Dzięki zastosowaniu metody gradientowo-iteracyjnej możliwe było przeprowadzenie wielokrotnych obliczeń optymalizacyjnych. Na podstawie uzyskanych wyników sformułowano praktyczne zalecenia doboru wysokości belek żelbetowych.

**Słowa kluczowe:** belka żelbetowa, belka prefabrykowana, optymalizacja konstrukcji, zalecenia kształtowania

## 1. Wprowadzenie

Przy projektowaniu współczesnych konstrukcji prawie zawsze za kryterium optymalności przyjmuje się minimalizację kosztów. Konstrukcja optymalnie zaprojektowana to taka, która przy możliwie minimalnym koszcie wykonania spełnia wszystkie warunki stanów granicznych nośności i użyteczności.

Ze względu na powszechność i skalę stosowania, przy projektowaniu żelbetowych belek należy zwrócić szczególną uwagę na dobór wymiarów przekroju poprzecznego oraz ilości zastosowanego zbrojenia. Projektując ekonomicznie, przed przystąpieniem do obliczeń, należy szczegółowo przeanalizować koszty związane z wykonaniem danego elementu w konkretnej inwestycji.

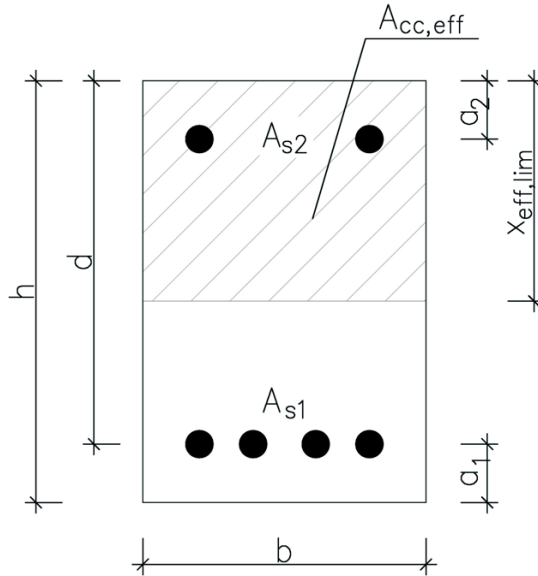
Nie w każdym przypadku element optymalny będzie cechował się minimalnym zużyciem stali zbrojeniowej. Cena elementu prefabrykowanego zależy od licznych czynników, m.in.: aktualnych cen materiałów, kosztów transportu i montażu, możliwości linii technologicznej. Każdy producent jest w stanie określić optymalny pod względem ekonomicznym stopień zbrojenia belki, który będzie minimalizował wypadkową wszystkich kosztów związanych z wyprodukowaniem, transportem i montażem elementu.

W pracy skupiono się na optymalnym doborze wysokości belki przy założonym stopniu zbrojenia oraz ustalonych warunkach obciążeniowych.

## 2. Algorytm obliczeniowy

### 2.1. Założenia obliczeniowe

Analizie podlega jednokierunkowo zginana belka żelbetowa o przekroju prostokątnym. Na rys. 1 pokazano oznaczenia wymiarów przekroju poprzecznego.



Rys. 1. Przekrój poprzeczny.

## 2.2. Stan graniczny nośności

### 2.2.1. Zginanie

W pierwszej kolejności należy wyznaczyć zasięg efektywnej wysokości strefy ściskanej  $\xi_{eff}$  w betonie.

$$\xi_{eff} = \frac{\lambda(f_{ck})}{0,8} \frac{A_{s1}f_{yd} - A_{s2}f_{yd}}{f_{cd}bh} \quad (1)$$

Jeżeli spełniony jest warunek  $\xi_{eff} \leq \xi_{eff,lim}$  to zbrojenie  $A_{s1}$  jest w pełni wykorzystane. Natomiast jeżeli  $\xi_{eff} > \xi_{eff,lim}$  to zbrojenie  $A_{s1}$  nie jest w pełni wykorzystane. Nośność elementu zginanego opisuje funkcja (2):

$$M_{Rd} = \begin{cases} \text{jeżeli: } \xi_{eff} \leq \xi_{eff,lim} \\ \left\{ \begin{array}{l} M_{Rd} = A_{s1}(d - a_2)f_{yd} \quad \text{jeżeli: } \xi_{eff} \leq 2\frac{a_2}{d} \\ M_{Rd} = \xi_{eff}(1 - 0,5\xi_{eff})d^2bf_{cd} + A_{s2}(d - a_2)f_{yd} \end{array} \right. \\ \text{w przeciwnym przypadku:} \\ \left\{ \begin{array}{l} M_{Rd} = \xi_{eff,lim}(1 - 0,5\xi_{eff,lim})d^2bf_{cd} \end{array} \right. \end{cases} \quad (2)$$

gdzie (oznaczenia we wzorach 1 i 2):  $a_2$ ,  $b$ ,  $d$  – wymiary geometryczne określone na rysunku nr 1,  $f_{cd}$  – obliczeniowa wytrzymałość betonu na ściskanie,  $f_{ck}$  – charakterystyczna wytrzymałość betonu na ściskanie,  $f_{yd}$  – obliczeniowa granica plastyczności stali zbrojeniowej,  $\lambda(f_{ck})$  – współczynnik określający efektywną wysokość strefy ściskanej (opisany formułą (3)).

$$\lambda(f_{ck}) = 0,8 - \begin{cases} 0 & \text{jeżeli: } f_{ck} \leq 50MPa \\ \frac{f_{ck} - 50MPa}{400MPa} & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \quad (3)$$

### 2.2.2. Ścinanie

Ponieważ analizowany w pracy problem dotyczy optymalnego doboru wysokości przekroju poprzecznego przy założonym stopniu zbrojenia podłużnego nie wymiarowano zbrojenia poprzecznego.

Sprawdzeniu podlega tylko nośność przekroju ze względu na ściskanie betonu powstające przy ścinaniu w elementach zginanych (funkcje 4 i 5). Warunek (5) musi zostać spełniony, gdyż w przeciwnym przypadku doszłoby do zmiążdżenia betonu.

$$\nu = 0,6 \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250MPa} \right) \quad (4)$$

$$V_{Ed} = 0,5bd \nu f_{cd} \quad (5)$$

## 2.3. Stan graniczny użytkowania

### 2.3.1. Ugięcia

Graniczny moment rysujący określa równanie (6).

$$M_{cr} = f_{ctm} b \frac{h^2}{6} \quad (6)$$

Sztywność elementu żelbetowego w funkcji granicznego momentu rysującego przedstawia funkcja (7).

$$B_{\infty} = \begin{cases} \text{jeżeli: } M_k > M_{cr} \\ \left\{ \frac{E_{c,eff} I_{II}}{1 - \beta_1 \beta_2 \left( \frac{M_{cr}}{M_k} \right)^2 \left( 1 - \frac{I_{II}}{I_I} \right)} \right. \\ \text{w przeciwnym przypadku:} \\ \left. \left\{ E_{c,eff} I_I \right. \right. \end{cases} \quad (7)$$

gdzie:  $\beta_1$  – współczynnik zależny od przyczepności prętów,  $\beta_2$  – współczynnik zależny od czasu działania i powtarzalności obciążenia,  $E_{c,eff}$  – efektywny moduł sprężystości betonu,  $I_I$  – sprowadzony moment bezwładności w fazie I (przekroju niezarysowany),  $I_{II}$  – sprowadzony moment bezwładności w fazie II (przekroju zarysowany),  $M_k$  – charakterystyczny moment zginający.

Ugięcie elementu żelbetowego wyznacza się za pomocą funkcji (8).

$$a = \alpha_k \frac{M_k I_{eff}^2}{B_\infty} \quad (8)$$

### 2.3.2. Szerokość rozwarcia rys

Szerokość rozwarcia rys ukośnych przy podporach ściśle zależy od przyjętego rozstawu strzemion. Ponieważ zadanie optymalizacyjne nie uwzględnia wymiarowania zbrojenia poprzecznego, zostanie pominięte sprawdzenie szerokości rozwarcia rys ukośnych.

Szerokość rozwarcia rys prostopadłych wyznacza się za pomocą równania (9):

$$w_k = \beta s_{rm} \frac{\sigma_s}{E_s} \left( 1 - \beta_1 \beta_2 \left( \frac{M_{cr}}{M_k} \right)^2 \right) \quad (9)$$

gdzie:  $\beta$  – współczynnik wyrażający stosunek obliczeniowej szerokości rysy do szerokości średniej,  $\sigma_s$  – naprężenie w zbrojeniu rozciągającym, obliczonym w przekroju przez rysę,  $E_s$  – moduł sprężystości stali zbrojeniowej,  $s_{rm}$  – średni rozstaw rys wyznaczony zgodnie z równaniem (10):

$$s_{rm} = 50mm + 0,25k_1 k_2 \frac{\varphi}{\rho_r} \quad (10)$$

gdzie:  $\varphi$  – średnica pręta [mm],  $\rho_r$  – efektywny stopień zbrojenia,  $k_1$  – współczynnik zależny od przyczepności prętów,  $k_2$  – współczynnik zależny od rozkładu odkształceń w strefie rozciąganej.

## 3. Optymalizacja

### 3.1. Opis metody optymalizacyjnej

Zastosowana w obliczeniach metoda stanowi połączenie metody gradientu prostego oraz iteracyjnego rozwiązania sformułowanego problemu optymalizacyjnego. W ogólności zastosowanie metody można opisać w 6 krokach:

1. Matematyczny zapis funkcji opisujących rozważane zadanie optymalizacyjne.
2. Ustalenie funkcji celu oraz zmiennych decyzyjnych.
3. Określenie ograniczeń optymalizacyjnych.
4. Ustalenie punktu startowego optymalizacji oraz kierunku poszukiwań rozwiązania.
5. Opis funkcji przyrostowej.
6. Iteracyjne znalezienie rozwiązania spełniającego zadane kryteria optymalizacyjne.

### 3.2. Założenia optymalizacyjne

Za funkcję celu w zadaniu optymalizacyjnym przyjęto objętość elementu.

$$f = \int_0^L A_c(x) dx \tag{11}$$

gdzie:  $A_c(x)$  – pole przekroju poprzecznego w funkcji długości elementu  $L$ .

Optymalizacja polega na doborze wysokości (stałej wzdłuż osi belki), która minimalizuje ustaloną funkcję celu (11) oraz spełnia wszystkie przyjęte ograniczenia.

Obliczenia przeprowadzane są dla ustalonych danych:

- szerokości i długości belki,
- obciążenia,
- stopnia zbrojenia.

Za punkt startowy optymalizacji przyjęto minimalną wysokość przekroju poprzecznego uwarunkowaną narzuconymi ograniczeniami geometrycznymi. Przyjęto skokowy przyrost zmiennej decyzyjnej w obrębie jednej pętli obliczeniowej. Kierunek przyrostu  $\Delta h$  zależy od spełnienia warunków nośności i użyteczności ( $1 \div 10$ ) i jest określany w zależności od uzyskanego wyniku weryfikacji nośności przekroju. Dodatkowo wartość przyrostu  $\Delta h$  maleje wraz z kolejnymi fazami obliczeń. Poniżej przedstawiono w uproszczony sposób funkcję określającą gradientową zmianę wysokości przekroju (12).

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta h_1 = 0 \\ \text{dopóki } |WN_p - WN_{p-1}| > \lambda \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta h_2 = 0,5h_{\max} \\ \dots \\ \Delta h_{p+1} = \Delta h_p + \begin{cases} |\Delta h_p - \Delta h_{p-1}| \text{ if } WN_p > 1 \\ -|\Delta h_p - \Delta h_{p-1}| \text{ if } WN_p \leq 1 \end{cases} \end{array} \right. \\ \text{przerwij jeżeli: } p > p_{\max} \end{array} \right. \tag{12}$$

gdzie:  $\lambda$  – ustalone kryterium zbieżności,  $p$  – numer fazy obliczeniowej,  $p_{\max}$  – maksymalna ustalona ilość faz obliczeniowych,  $WN_p$  – zbiór warunków obliczeniowych wynikających z analizy stanów granicznych dla  $p$ -tej fazy obliczeniowej.

Na podstawie powyższych założeń został napisany program komputerowy, który umożliwia znalezienie rozwiązania optymalnego dla rozważanego zagadnienia. Algorytm został zapisany w środowisku programu Mathcad. Wymieniony program do obliczeń matematycznych umożliwia czytelny zapis procedury obliczeniowej oraz szybkie rozwiązywanie równań macierzowych.

## 4. Wyniki

### 4.1. Założenia obliczeniowe

Dane przyjęte do obliczeń:

- Beton: C35/45 ( $f_{ck} = 35$  MPa,  $f_{cd} = 25$  MPa),
- Stal zbrojeniowa: A-IIIIN ( $f_{yd} = 420$  MPa),
- Średnica zbrojenia podłużnego:  $\varphi = 16$  mm,
- Średnica zbrojenia poprzecznego:  $\varphi_s = 8$  mm (strzemiona czterocięte),
- Konstrukcyjne zbrojenie w strefie ściskanej:  $4\varphi 16$ ,
- Otulina zbrojenia: 30 mm,
- Ugięcie dopuszczalne:  $L/250$ .

Obliczenia przeprowadzono dla zmiennej decyzyjnej określonej w zakresie:

- wysokość  $h \in [300; 2000]$  [mm].

W celu sformułowania zaleceń praktycznych przeprowadzono wielokrotne obliczenia belek o zróżnicowanej długości, szerokości oraz dla różnych wartości obciążeń zewnętrznych. Przyjęto zakresy oraz przyrost zmiennych:

- długości analizowanych elementów:
  - $L \in [6; 12]$  [m],
  - $\Delta L = 0,5$  m,
- szerokość przekroju poprzecznego:
  - $b \in [0,3; 0,8]$  [m],
  - $\Delta b = 0,05$  m,
- charakterystyczne obciążenia zewnętrzne:
  - $q \in [30; 100]$  [kN/m],
  - $\Delta q = 5$  kN/m.

Napisany algorytm komputerowy automatycznie uwzględni ciężar analizowanej belki. W obliczeniach założono, że 60% obciążenia zewnętrznego stanowią obciążenia zmienne. Z powyższego wyniku współczynnik obliczeniowy ustalony dla założonych obciążeń  $\gamma = 1,45$ .

Dodatkowo wszystkie powyższe obliczenia przeprowadzono dla stopni zbrojenia podłużnego w strefie rozciąganej ( $A_{s1}$ ) przyjętych z przedziału:

- $\rho \in [0,5; 2,5]$  [%],
- $\Delta\rho = 0,1$  %.

Obliczenia przeprowadzono dla dwóch wariantów:

- Wariant A – analizowany przekrój spełnia wszystkie warunki nośności i użytkowalności.
- Wariant B – analizowany przekrój spełnia tylko warunki nośności; stan graniczny użytkowalności nie wpływa na dobór wysokości przekroju poprzecznego.

Poniżej w tabeli 1 pokazano przykładowe wyniki dla belki o długości 10 m, szerokości 0,4 m oraz obciążenia zewnętrznego  $q = 50$  kN/m (wariant A).

Komplet wyników obliczeń jest zbyt obszerny, żeby było możliwe jego zamieszczenie.

Tabela 1. Wyniki obliczeń optymalizacyjnych ( $L = 10$  m,  $b = 0,4$  m,  $q = 50$  kN/m) (wariant A).

Stopień zbrojenia	Wysokość optymalna	Warunek nośności zbrojenia zginanego	Warunek nośności na ścinanie	Warunek użytkowania (ugięcie)	Warunek użytkowania (zarysowanie)
[%]	[m]	[-]	[-]	[-]	[-]
0,5	1,21	0,999	0,151	0,514	0,554
0,6	1,10	0,999	0,163	0,603	0,552
0,7	1,02	0,991	0,175	0,680	0,542
0,8	0,95	0,996	0,186	0,769	0,541
0,9	0,90	0,985	0,195	0,837	0,528
1,0	0,85	0,996	0,206	0,929	0,528
1,1	0,82	0,978	0,213	0,975	0,510
1,2	0,80	0,948	0,218	0,996	0,484
1,3	0,79	0,903	0,220	0,986	0,452
1,4	0,78	0,867	0,223	0,982	0,425
1,5	0,77	0,837	0,226	0,981	0,403
1,6	0,76	0,812	0,228	0,985	0,384
1,7	0,75	0,791	0,231	0,991	0,366
1,8	0,75	0,754	0,231	0,962	0,341
1,9	0,74	0,740	0,234	0,973	0,328
2,0	0,73	0,729	0,237	0,987	0,317
2,1	0,73	0,701	0,237	0,963	0,299
2,2	0,72	0,694	0,240	0,981	0,291
2,3	0,72	0,671	0,240	0,960	0,276
2,4	0,71	0,667	0,243	0,981	0,270
2,5	0,71	0,648	0,243	0,962	0,258

W tabeli pogrubiono wartości, które zadecydowały o przyjęciu wysokości przekroju poprzecznego. Z powyższej tabeli wynika, że dla analizowanej belki przy stopniu zbrojenia w strefie rozciąganej  $\rho > 1,1$  % o wymiarach przekroju decyduje stan graniczny użytkowalności (ugięcia). Stan graniczny zarysowania oraz stan graniczny nośności z uwagi na zmiężdżenie betonu przy ścinaniu nigdy nie jest warunkiem decydującym o rozwiązaniu optymalnym.

Dodatkowo w tabeli 2 pokazano wyniki dla wariantu obliczeniowego B.

Ponownie na dobór optymalnej wysokości nie ma wpływu warunek nośności na ścinanie. Tabela 2 bardzo dobrze obrazuje wpływ zastosowanego stopnia zbrojenia na ugięcie belki. Dla stopnia zbrojenia 2,5 % obliczone ugięcie jest prawie dwukrotnie większe od dopuszczalnego.

## 4.2. Zalecenia praktyczne

Łącznie wyznaczono wysokość optymalną dla 45045 belek o zróżnicowanej długości, szerokości, stopniu zbrojenia oraz obciążeniu zewnętrznym. Wszystkie obliczenia przeprowadzono w dwóch wariantach, co daje łącznie 90090 wyznaczonych rozwiązań optymalnych. Na podstawie uzyskanych wyników sformułowano zalecenia praktyczne doboru optymalnej wysokości belki żelbetowej.

Tabela 2. Wyniki obliczeń optymalizacyjnych ( $L = 10$  m,  $b = 0,4$  m,  $q = 50$  kN/m) (wariant B).

Stopień zbrojenia	Wysokość optymalna	Warunek nośności zbrojenia zginanego	Warunek nośności na ścinanie	Warunek użytkowania (ugięcie)	Warunek użytkowania (zarysowanie)
[%]	[m]	[-]	[-]	[-]	[-]
0,5	1,21	0,999	0,151	0,514	0,554
0,6	1,10	0,999	0,163	0,603	0,552
0,7	1,02	0,991	0,175	0,680	0,542
0,8	0,95	0,996	0,186	0,769	0,541
0,9	0,90	0,985	0,195	0,837	0,528
1,0	0,85	0,996	0,206	0,929	0,528
1,1	0,82	0,978	0,213	0,975	0,510
1,2	0,78	0,995	0,223	1,074	0,513
1,3	0,75	0,999	0,231	1,152	0,509
1,4	0,73	0,986	0,237	1,198	0,494
1,5	0,71	0,980	0,243	1,252	0,478
1,6	0,69	0,980	0,250	1,317	0,467
1,7	0,67	0,985	0,257	1,393	0,459
1,8	0,65	0,996	0,265	1,481	0,455
1,9	0,64	0,982	0,269	1,509	0,439
2,0	0,63	0,972	0,273	1,542	0,426
2,1	0,61	0,996	0,282	1,660	0,429
2,2	0,60	0,992	0,287	1,706	0,420
2,3	0,59	0,990	0,291	1,757	0,413
2,4	0,58	0,992	0,296	1,814	0,407
2,5	0,57	0,996	0,302	1,877	0,402

Współcześnie powszechnym rozwiązaniem jest stosowanie odwrotnego ugięcia wstępnego, które zmniejsza ugięcie obliczone do wartości dopuszczalnej. Projektując element przy dopuszczeniu przekroczenia ugięcia dopuszczalnego (wariant B obliczeń) należy przyjmować wysokość belek zgodnie z formułą (13).

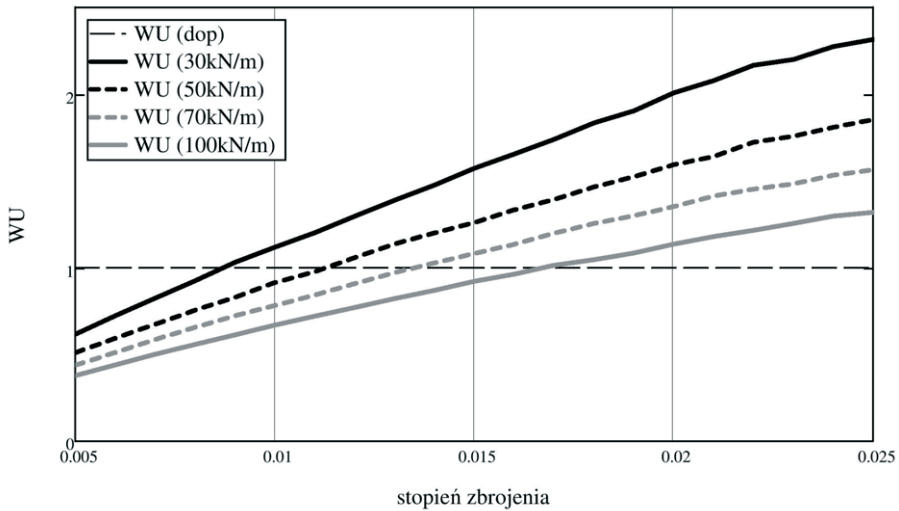
$$h = 0,00284L \frac{\sqrt[3]{q}}{\sqrt{\rho}} \sqrt[3]{|1-b|} \pm 0,035 \text{ [m]} \quad (13)$$

gdzie:  $\rho$  – stopień zbrojenia w strefie rozciąganej ( $A_{s1}$ ) [-],  $b$  – szerokość w [m],  $L$  – długość w [m],  $q$  – obciążenie zewnętrzne w [kN/m].

Dla przykładu na rys. 2 pokazano zmianę warunku użytkowania z uwagi na stan graniczny ugięcia w funkcji stopnia zbrojenia oraz obciążenia zewnętrznego dla belek o szerokości  $b = 0,4$  m.

Należy zwrócić uwagę, że dla dużych stopni zbrojenia oraz małych obciążeń zewnętrznych ugięcie obliczone przekracza dwukrotnie wartość dopuszczalną. Tak dużego ugięcia nie można niwelować strzałką wstępnego ugięcia. Wynika z tego wniosek, że projektując elementy o dużym stopniu zbrojenia należy zwiększyć optymalną z uwagi na nośność wysokość belki w celu ograniczenia ugięcia obliczeniowego do wartości, która wraz z dopuszczalną przeciwstrzałką zapewni spełnienie stanu granicznego użyteczności.





Rys. 2. Warunek użytkowania WU (ugięcia).

Jednak nie każda linia technologiczna ma możliwość wyprodukowania elementu żelbetowego z wstępną strzałką ugięcia. Z tego względu sformułowano zalecenia praktyczne (14), które gwarantują optymalny dobór wysokości belki, która będzie spełniać zarówno warunki stanu granicznego nośności jak i stanu granicznego ugięcia.

$$h = 0,00283L \frac{\sqrt[3]{q}}{\sqrt{\rho}} \left( (1-b) \right)^{\frac{1}{3,3}} \pm 0,073 \text{ [m]} \tag{14}$$

Wszystkie zalecenia zostały podane dla stali zbrojeniowej A-IIIIN, która jest najpowszechniej stosowaną klasą stali przy produkcji prefabrykowanych elementów żelbetowych. Zalecenia można natomiast skutecznie odnieść do dowolnej klasy betonu, gdyż dla elementów zginanych klasa betonu ma niewielki wpływ przy określaniu optymalnej wysokości przekroju.

Należy pamiętać, że przyjęcie wymiarów geometrycznych w oparciu o prezentowane zalecenia nie zwalnia projektanta od szczegółowej weryfikacji projektowanego elementu.

## 5. Wnioski

Przed przystąpieniem do projektowania belek żelbetowych należy przeanalizować koszty związane z wykonaniem i przetransportowaniem danego elementu. Wstępna analiza kosztowa pozwala zaprojektować element, który będzie optymalny. Powyższa analiza ma zdecydowanie większe znaczenie w przypadku elementów prefabrykowanych, dla których minimalizacja zużycia stali zbrojeniowej nie zawsze oznacza zmniejszenie kosztów.

W pracy przedstawiono gradientowo-iteracyjną metodę optymalizacji belek żelbetowych. Na podstawie wyników uzyskanych z wielokrotnych obliczeń sformułowano zalecenia praktyczne doboru optymalnej wysokości przekroju

poprzecznego. Dobór gabarytów elementu w oparciu o powyższe zalecenia umożliwiła znaczące zmniejszenie czasu potrzebnego do znalezienia optymalnego kształtu projektowanej belki.

Prezentowaną metodę gradientowo-iteracyjną obliczeń optymalizacyjnych można ponadto skutecznie zastosować do obliczeń innych elementów konstrukcyjnych.

## Literatura

- [1] Łapko A., Jensen B. C. *Podstawy projektowania i algorytmy obliczeń konstrukcji żelbetonowych*. Wydawnictwo „Arkady”, Warszawa 2005.
- [2] Mikulski L. *Teoria sterowania w problemach optymalizacji konstrukcji i systemów*. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, ISBN 978-93-7242-440-2, Kraków 2007.
- [3] Sobczyk Sz. *Optymalne kształtowanie pól dźwigarów strunobetonowych*. w: *Badania doświadczalne i teoretyczne w budownictwie*. monografia, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2012.
- [4] Sobczyk Sz., Mikulski L. *Optymalizacja belek sprężonych*. Pomiary Automatyka Kontrola nr 10/2012.
- [5] Sobczyk Sz., Mikulski L. *Optymalizacja dźwigarów strunobetonowych*. „*Poliptymalizacja i komputerowe wspomaganie projektowania. Tom X*”, Wydawnictwo Politechniki Koszalińskiej, Koszalin 2012r.
- [6] Starosolski Wł. *Konstrukcje żelbetowe według PN-B-03264:2002 i Eurokodu 2. Tom I*. Wydawnictwo naukowe PWN, Warszawa 2007.
- [7] PN-EN 1990:2004. *Podstawy projektowania konstrukcji*.
- [8] PN-EN 1992-1-1:2008. *Projektowanie konstrukcji z betonu – Reguły ogólne i reguły dla budynków*.

## Optimal height of free-ends prefabricated reinforced concrete beam with rectangular cross-section

Szymon Sobczyk

*Institute of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering,  
Cracow University of Technology, e-mail: szymek.sobczyk@gmail.com*

**Abstract:** This paper concerns the optimal modelling of free-ends prefabricated reinforced concrete beams. The article focuses on the selection of the optimal height of the cross-section at a fixed length, width, level of reinforcement of the element and the set of external loads. By applying gradient-iterative method it was possible to conduct multiple optimization calculations. Optimal beam height was formulated based on calculation results.

**Keywords:** reinforced concrete beam, prefabricated beam, structure optimization, design recommendations.