POZNAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY ACADEMIC JOURNALS
No 78 Electrical Engineering 2014

Seweryn MAZURKIEWICZ*
Janusz WALCZAK*

ANALIZA WŁAŚCIWOŚCI FILTRU PARAMETRYCZNEGO I RZĘDU

W artykule rozpatrzono problem transmisji sygnałów stochastycznych w deterministycznych układach parametrycznych LTV I rzędu. Wyprowadzono równania modelu filtru w postaci transmisyjnej i wyznaczono momenty procesów (wartości przeciętne, funkcje korelacji własnej i wzajemnej) na wejściu i wyjściu filtru. Wyniki zilustrowano przykładami transmisji sygnałów stochastycznych przez filtry o nieokresowo zmiennych parametrach.

SŁOWA KLUCZOWE: dynamiczne układy stochastyczne, filtr LTV w warunkach losowych, równania momentów

1. WPROWADZENIE

Analizie zjawisk losowych w układach elektrycznych i elektronicznych poświęcono wiele prac, w tym monografię [7]. Prace te często dotyczą wyznaczania różnych charakterystyk probabilistycznych procesów stochastycznych występujących w układach [1, 2, 3, 4]. W artykule omówiono metodę rozwiązywania losowych równań różniczkowych pierwszego rzędu o zmiennych w czasie parametrach. Rozważane równania opisują elektryczne układy dynamiczne pierwszego rzędu. Wyznaczono wartość oczekiwaną odpowiedzi układu, funkcje korelacji wzajemnej wymuszenia i odpowiedzi i funkcję korelacji własnej odpowiedzi układu. Pokazano przykład rozwiązania problemu z dwoma wzmacniaczami operacyjnymi, gdzie odpowiedzią jest napięcie na wyjściu drugiego wzmacniacza. Postępując w analogiczny sposób można rozważać inne układy pierwszego rzędu. Artykuł stanowi kontynuację prac [5, 12] z których pierwsza poświęcona była wyznaczaniu momentów procesów w układach liniowych n-tego rzędu o stałych współczynnikach w warunkach losowych, natomiast druga dotyczyła układów liniowych o współczynnikach będących zmiennymi losowymi.

2. FORMALIZACJA PROBLEMU

Niech dane będzie liniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu o zmiennych współczynnikach:

* Politechnika Śląska.

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = a(t)X(t) + F(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}, \tag{1}$$

gdzie: $X(t)$ – proces stochastyczny, będący odpowiedzią układu, $F(t)$ – proces stochastyczny, będący wymuszeniem, $a(t)$ – gładka funkcja deterministyczna, X_0 – losowy lub deterministyczny warunek początkowy.

Rozwiązanie równania (1) dane jest w postaci analitycznej:

$$X(t) = \exp(G(t))X_0 + \exp(G(t)) \int_0^t \exp(-G(\tau))F(\tau)\, d\tau, \tag{2}$$

$$G(t) = \int_0^t a(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Rozwiązanie (2) rozumiane jest w sensie średniokwadratowym [9]. Aby wyznaczyć momenty (wartość oczekiwaną oraz korelacje) odpowiedzi układu można skorzystać z dwóch metod. Pierwsza polega na zastosowaniu operatora wartości oczekiwanej do rozwiązania (2). Wtedy momenty określają wzory:

– wartość oczekiwana odpowiedzi:

$$\mu_X(t) = \exp(G(t))\mu_{X_0} + \exp(G(t)) \int_0^t \exp(-G(\tau))\mu_F(\tau)\, d\tau, \tag{4}$$

gdzie: $\mu_X(t) = \mathrm{E}[X(t)]$, $\mu_{X0} = \mathrm{E}[X_0]$, $\mu_F(t) = \mathrm{E}[F(t)]$.

– korelacja wymuszenia i odpowiedzi (przy założeniu, że wymuszenie w każdej chwili czasu i warunek początkowy są niezależnymi zmiennymi losowymi):

$$\mathrm{R}_{FX}(t_1, t_2) = \exp(G(t_2))\mu_F(t_1)\mu_{X_0} + \exp(G(t_2)) \int_0^{t_2} \exp(-G(\tau))\mathrm{R}_F(t_1, \tau)\, d\tau, \tag{5}$$

gdzie: $R_{FX}(t) = \mathrm{E}[F(t)X(t)]$, $R_F(t,\tau) = \mathrm{E}[F(t)F(\tau)]$.

– korelacja odpowiedzi:

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_X(t_1, t_2) = {} & \exp(G(t_1) + G(t_2))\mathrm{E}[X_0^2] \\ & + \exp(G(t_1) + G(t_2))\mu_{X_0} \int_0^{t_2} \exp(-G(\tau_2))\mu_F(\tau_2)\, d\tau_2, \\ & + \exp(G(t_1) + G(t_2))\mu_{X_0} \int_0^{t_1} \exp(-G(\tau_1))\mu_F(\tau_1)\, d\tau_1, \\ & + \exp(G(t_1) + G(t_2)) \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \exp(-G(\tau_1) - G(\tau_2)) \\ & \mathrm{R}_F(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Druga metoda polega na zastosowaniu operatora wartości oczekiwanej do bezpośrednio do równania (1) lub do jego zmodyfikowanej wersji (obliczanie korelacji). Równanie na wartość oczekiwaną ma wtedy postać:

$$\begin{cases} \frac{d\mu_X(t)}{dt} = a(t)\mu_X(t) + \mu_F(t) \\ \mu_X(0) = \mu_{X_0} \end{cases}, \tag{7}$$

Aby wyznaczyć korelację wymuszenia oraz odpowiedzi, należy zmodyfikować równanie (1) do postaci:

$$\begin{cases} F(t_1)\frac{dX(t_2)}{dt_2} = a(t_2)F(t_1)X(t_2) + F(t_1)F(t_2) \\ F(t_1)X(0) = F(t_1)X_0 \end{cases}, \tag{8}$$

a następnie zastosować operator wartości oczekiwanej:

$$\begin{cases} \frac{d\mathrm{R}_{FX}(t_1,t_2)}{dt_2} = a(t_2)\mathrm{R}_{FX}(t_1,t_2) + \mathrm{R}_F(t_1,t_2) \\ \mathrm{R}_{FX}(t_1,0) = \mu_F(t_1)\mu_{X_0} \end{cases}. \tag{9}$$

W podobny można wyznaczyć autokorelację odpowiedzi:

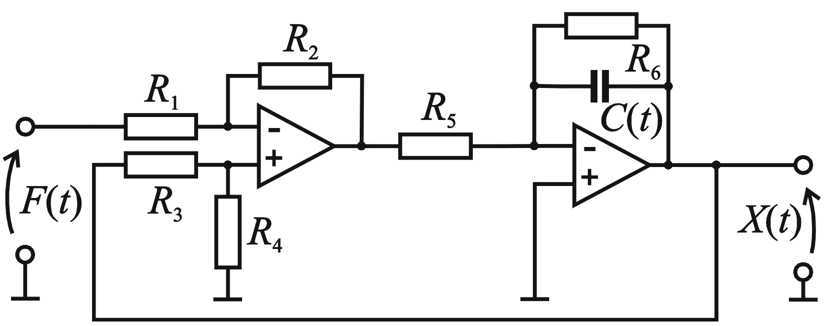
$$\begin{cases} \frac{d\mathrm{R}_X(t_1,t_2)}{dt_1} = a(t_1)\mathrm{R}_X(t_1,t_2) + \mathrm{R}_{FX}(t_1,t_2) \\ \mathrm{R}_X(0,t_2) = \mathrm{E}[X_0X(t_2)] \end{cases}. \tag{10}$$

Należy zauważyć, że warunek początkowy równania (10) nie jest znany. Można go wyznaczyć za pomocą pomocniczego równania [5]:

$$\begin{cases} \frac{d\mathrm{R}_X(t_1,t_2)}{dt_2} = a(t_2)\mathrm{R}_X(0,t_2) + \mathrm{R}_{FX}(0,t_2) \\ \mathrm{R}_X(0,0) = \mathrm{E}[X_0^2] \end{cases}. \tag{11}$$

3. PRZYKŁAD

Niech dany jest obwód pokazany na rys. 1:



Rys. 1. Przykładowy obwód

Pojemność $C(t)$ jest funkcją czasu. W takim wypadku równanie wiążące prąd kondensatora z jego napięciem określone jest następująco (prąd i napięcie jest procesem stochastycznym drugiego rzędu):

$$I_C(t) = C(t)\frac{dU_C(t)}{dt} + U_C(t)\frac{dC(t)}{dt}. \tag{12}$$

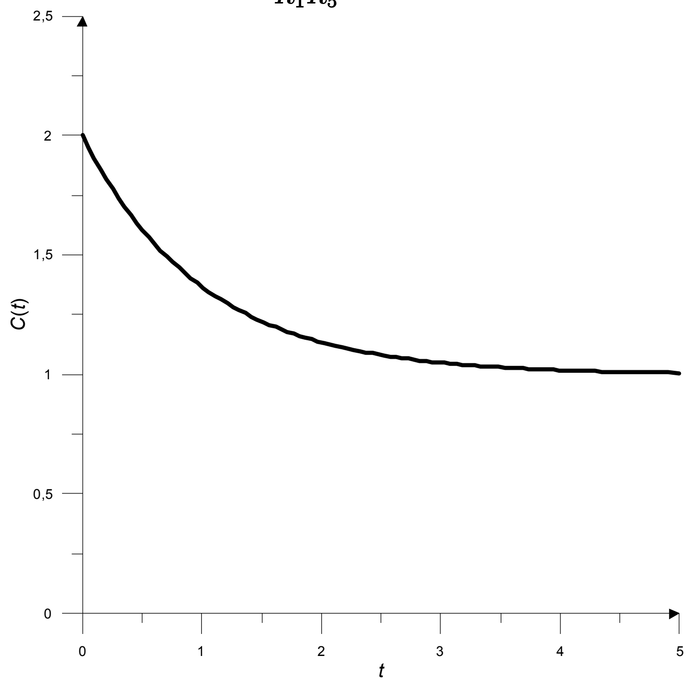
Uwzględniając strukturę obwodu z rys. 1 oraz równanie (12), wymuszenie $F(t)$ związane jest z odpowiedzią $X(t)$ następującym równaniem:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{1}{C(t)}\left(R_A + \frac{dC(t)}{dt}\right)X(t) + \frac{1}{C(t)}R_B F(t), \tag{13}$$

gdzie:

$$R_A = \frac{(R_1+R_2)R_4}{R_1R_5(R_3+R_4)} + \frac{1}{R_6}, \tag{14}$$

$$R_B = \frac{R_2}{R_1R_5}. \tag{15}$$



Rys. 2. Funkcja $C(t)$

Dla uproszczenia niech:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1, R_6 = \infty, \tag{16}$$

$$C(t) = 1 + \exp(-t), \frac{dC(t)}{dt} = -\exp(-t), \tag{17}$$

$$F(t) = N(t), X_0 = 0, \tag{18}$$

$$G(t)=\int_0^t \frac{1-\exp(-\tau)}{1+\exp(-\tau)}d\tau = 2\ln(1+\exp(-t))+t-2\ln(2), \tag{19}$$

dla t>0. Proces $N(t)$ jest białym szumem o funkcji autokorelacji równej:

$$\mathrm{R}_N(t_1,t_2)=\delta(t_1-t_2). \tag{20}$$

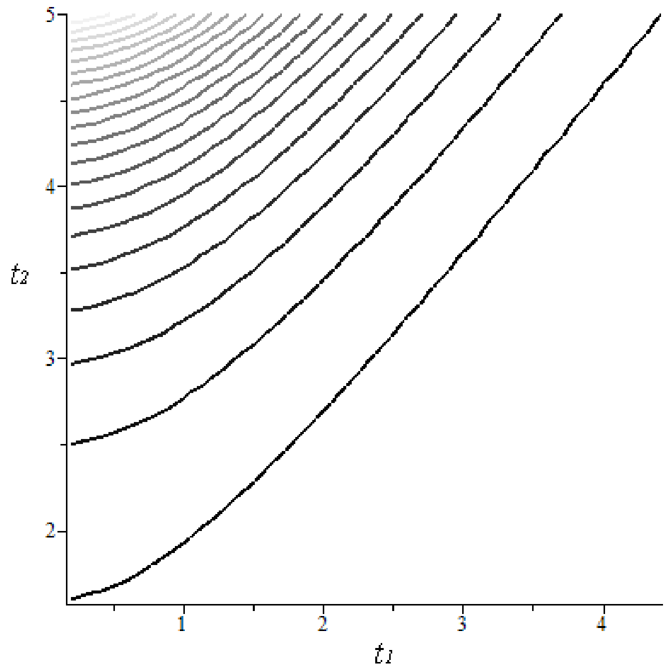
Stosując jedną z omówionych w rozdziale 2 metod można wyznaczyć:

– wartość oczekiwaną odpowiedzi:

$$\mu_X(t)=0, \tag{21}$$

– korelację wymuszenia oraz odpowiedzi:

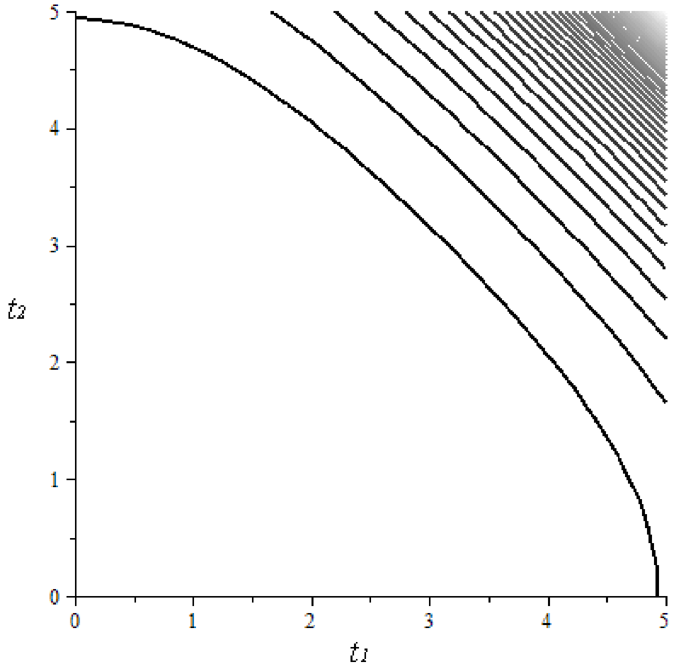
$$\mathrm{R}_{FX}(t_1,t_2)=\exp(G(t_2)-G(t_1))(\mathbf{1}(t_2-t_1)-1+\mathbf{1}(t_1)), \tag{22}$$



Rys. 3. Funkcja korelacji wzajemnej wymuszenia i odpowiedzi układu

– autokorelację odpowiedzi:

$$\mathrm{R}_X(t_1,t_2)=\exp(G(t_1)+G(t_2))\Bigg(\left(\frac{8}{((1+\exp(-t_1))^2}-\frac{16}{3(1+\exp(-t_1))^3}\right)$$
$$(\mathbf{1}(t_1)-\mathbf{1}(t_1-t_2))-\left(\frac{8}{((1+\exp(-t_2))^2}-\frac{16}{3(1+\exp(-t_2))^3}\right)$$
$$\mathbf{1}(t_1-t_2)-\frac{4}{3}\mathbf{1}(t_1)+\frac{4}{3}\mathbf{1}(-t_2)\frac{-1-3\exp(-t_2)+3\exp(-2t_2)+\exp(-3t_2)}{(1+\exp(-t_2))^3}\Bigg). \tag{23}$$



Rys. 4. Funkcja autokorelacji odpowiedzi układu

4. PODSUMOWANIE

W artykule opisano metodę wyznaczania wartości oczekiwanych oraz funkcji korelacji procesów w liniowych układach deterministycznych o zmiennych w czasie parametrach LTV, przy wymuszeniu będącym procesem stochastycznym. Rozważono układy pierwszego rzędu w których odpowiedź układu (rozwiązanie) modelu deterministycznego dane jest w postaci analitycznej. Rozwiązanie analityczne wykorzystano do znalezienia momentów odpowiedzi układu modelu losowego.

LITERATURA

[1] Kadlecova E., Kubasek R., Kolarova E.: *RL Circuits Modeling with Noisy Parameters*, Conf. on Applied Electronics, Pilsen 6-7 Sept. 2006, pp. 217-220.

[2] Kolarova E.: *An Application of Stochastic Integral Equations to Electrical Networks*, Acta Electrotechnica et Informatica, Vol. 8, No. 3, 2008, pp. 14–17.

[3] Kolarova E.: *Modeling RL Electrical Circuits by Stochastic Differential Equations*, Int. Conf. EUROCON, November 22–24, Belgrade, Serbia 2005, pp. 1236–1238.

[4] Kolarova E.: *Statistical Estimates of Stochastic Solutions of RL Electrical Circuit*, IEEE Int. Conf. of Industrial Technology, ICIT 2006, pp. 2546–2550.

[5] Mazurkiewicz S., Walczak J.: *Linear dynamical systems of the n-th order in random conditions*. Computional Problems of Electrical Engineering, Ukraine 2014 (w druku).

[6] Pugacev V. S., Sinicin I. N.: *Stochastic Differential Systems*, Science, Moscow 1985 (in Russian).

[7] Skowronek K.: *Obwody elektryczne w ujęciu stochastycznym*, Monografia. Wyd. Pol. Pozn., Poznań 2011.

[8] Skowronek K.: *Linia o losowej indukcyjności*, materiały konferencyjne XXXVI IC-SPET 2013, pp. 25-26.

[9] Socha L.: *Równania momentów w stochastycznych układach dynamicznych*, PWN, Warszawa 1993.

[10] Soong T. T.: *Random Differential Equations in Science and Engineering,* Math. in Science and Eng., Vol. 103, Academic Press, New York 1973.

[11] Swiesznikow A. A.: *Podstawowe metody funkcji losowych,* WNT, Warszawa 1965.

[12] Walczak J., Mazurkiewicz S.: *Random models of coupled inductors,* Monograph: "Computer Applications in Electrical Engineering 2014", (w druku).

PROPERTIES OF THE LTV FILTER OF THE FIRST ORDER

In this article the first and the second order moments for random models of LTV filter were determined. It was determined expected value and correlation function of the response of the filter. The results have been illustrated by examples.