

Równania ruchu belek obciążonych oscylatorem poruszającym się ze zmienną prędkością

JEL: R41 DOI: 10.24136/atest.2019.231
 Data zgłoszenia: 28.01.2020 Data akceptacji: 10.02.2020

Przedmiotem opracowania jest analiza dynamiczna belki swobodnie podpartej obciążonej ruchomym obciążeniem inercyjnym. W pracy omówiono belkę modelowaną jednym stopniem swobody oraz model belki Bernoulliego-Eulera o masie równomiernie rozłożonej. W obu przypadkach belka obciążona jest punktem materialnym lub oscylatorem poruszającym się ze zmienną prędkością. Równania ruchu rozważanych układów otrzymano metodą analityczną. Ze względu na charakter obciążenia w równaniach ruchu występuje pochodna materialna Renaudota. Ponadto omówiono drgania swobodne belek po zjechaniu z nich obciążenia.

Słowa kluczowe: ruchomy punkt materialny, ruchomy oscylator, belka modelowana jednym stopniem swobody, belka Bernoulliego-Eulera.

Wstęp

Zadania dotyczące obciążeń ruchomych na belkach i płytach mają szerokie zastosowanie w budownictwie, a szczególnie przy projektowaniu konstrukcji drogowych, kolejowych, mostowych oraz lotniskowych. W literaturze przedmiotu można znaleźć wiele prac poświęconych tematyce obciążeń ruchomych na belkach i płytach, np. [1-13]. Autorzy analizują zarówno ruchome obciążenia inercyjne, jak i obciążenia bezinercyjne. Prace te zawierają rozwiązania analityczne oraz rozwiązania z wykorzystaniem metod komputerowych. Obszerny przegląd literatury dotyczącej obciążeń ruchomych na belkach i płytach można znaleźć m.in. w pracach [1], [14-19].

W niniejszej pracy omówione zostaną zadania belki swobodnie podpartej obciążonej punktem materialnym oraz oscylatorem poruszającym się ruchem jednostajnie zmiennym. Przedstawione i przeanalizowane zostaną równania drgań układu belka – ruchome obciążenie w czterech przypadkach. W dwóch przypadkach belka modelowana będzie jednym stopniem swobody, a w dwóch kolejnych przypadkach przeanalizujemy belkę modelowaną jako układ ciągły. Ze względu na inercyjny charakter obciążenia w rozważaniach będziemy brać pod uwagę pochodną materialną Renaudota.

1. Pochodne materialne w przypadku ruchomych obciążeń inercyjnych na belkach

W przypadku drgań belki wywołanych ruchomym obciążeniem inercyjnym w równaniach ruchu układu belka – punkt materialny lub oscylator należy uwzględnić pochodną materialną (Renaudota) [1]. Jeśli obciążenie porusza się z prędkością jednostajnie zmienną:

$$v = v(t) = \frac{dx}{dt}, \quad a = a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$x = \int_0^t v(\tau) d\tau, \tag{1}$$

$$dx = v(t) dt, \quad dw = \frac{\partial w}{\partial t} dt + \frac{\partial w}{\partial x} dx,$$

$$w = w(x, t),$$

pierwsza i druga pochodna materialna mają postać:

$$\frac{dw}{dt} \Big|_{x=\int_0^t v(\tau) d\tau} = \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = v(t) = v_0 \pm at,$$

$$\frac{d^2w}{dt^2} \Big|_{x=\int_0^t v(\tau) d\tau} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \pm a \frac{\partial w}{\partial x}.$$

$$\tag{2}$$

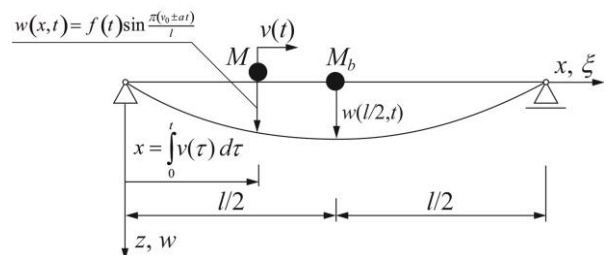
Powyższe wzory wykorzystamy w rozważaniach w dalszej części artykułu.

2. Belka modelowana jednym stopniem swobody obciążona punktem materialnym poruszającym się ruchem jednostajnie zmiennym

Zanim omówimy równania ruchu drgającego układu składającego się z belki i oscylatora w ruchu jednostajnie zmiennym podamy zależności opisujące drgania najprostszego układu jakim jest belka modelowana jednym stopniem swobody obciążona punktem materialnym poruszającym się ruchem jednostajnie przyspieszonym lub opóźnionym.

Rozważmy zatem belkę swobodnie podpartą o długości l i sztywności na zginanie EJ . Belka obciążona jest punktem materialnym o masie M , poruszającym się ruchem jednostajnie zmiennym z prędkością $v(t) = v_0 \pm at$. Belka modelowana jest jednym stopniem swobody (rys. 1). Masa skupiona w środku rozpiętości przęśla jest równa $M_b = \frac{17}{35} \bar{m} l \approx \frac{\bar{m} l}{2}$. W analizowanym zadaniu

niewiadomą jest ugięcie środka belki $w\left(\frac{l}{2}, t\right)$ wywołane ruchem punktu materialnego. Zakładamy, że w układzie występuje tłumienie wiskotyczne według modelu reologicznego Kelvina–Voigta z siłą oporów ruchu $R = c \frac{dw}{dt}$.



Rys. 1. Belka modelowana jednym stopniem swobody obciążona punktem materialnym poruszającym się ze zmienną prędkością

Przeanalizujemy zarówno drgania wymuszone ruchomym obciążeniem, jak i drgania swobodne, gdy obciążenie znajduje się już poza belką.

2.1. Drgania wymuszone układu punkt materialny – belka modelowana jednym stopniem swobody

Przy powyższych założeniach oraz przyjmując ugięcie w postaci funkcji spełniającej warunki brzegowe

$$w(x, t) = f(t) \sin \frac{\pi \left(v_0 + \frac{at}{2} \right) t}{l}, \quad (3)$$

drgania wymuszone belki przy $x = \frac{l}{2}$ opisane są następującym równaniem

$$\begin{aligned} & \frac{2l^3}{\pi^4 EJ} \left\{ Mg - M \left[\ddot{f}(t) \sin \pi \xi + \right. \right. \\ & + 2\dot{f}(t) \frac{\pi(v_0 + at)}{l} \cos \pi \xi - f(t) \frac{\pi^2(v_0 + at)^2}{l^2} \sin \pi \xi + \\ & \left. \left. + f(t) \frac{\pi(v_0 + at)}{l} \cos \pi \xi \right] \sin \pi \xi + \right. \\ & \left. - \frac{2l^3}{\pi^4 EJ} [M_b \ddot{f}(t) + c \dot{f}(t)] = f(t), \right. \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie $\xi = \frac{(v_0 + at/2)t}{l}$.

Po wprowadzeniu następujących oznaczeń:

$\mu = \frac{M}{M_b}$ – bezwymiarowy współczynnik masy,

$f_1(\xi) = \frac{f(t)}{f_{st}}$, gdzie $f_{st} = \frac{2Mgl^3}{\pi^4 EJ}$,

$\gamma^2 = \frac{v_0^2 + 2al\xi}{l^2 \omega^2}$,

$\omega = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{48EJ}{ml^2}} \approx \frac{\pi\sqrt{2}}{2l^2} \sqrt{\frac{48EJ}{m}}$ – częstość kołowa drgań własnych belki o jednym stopniu swobody,

równanie drgań belki możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} & \gamma^2 \left(1 + \mu \sin^2 \pi \xi \right) \frac{d^2 f_1(\xi)}{d\xi^2} + \\ & + \left[\mu \pi \gamma^2 \sin 2\pi \xi \cos \pi \xi + \frac{c(v_0 + at)}{\omega^2 M_b l} \right] \frac{df_1(\xi)}{d\xi} + \\ & + \left[1 + \mu \pi \frac{\gamma}{\omega} \sin \pi \xi \cos \pi \xi + \right. \\ & \left. - \pi^2 \mu \gamma^2 \sin^2 \pi \xi \frac{\pi^2(v_0 + at)^2}{l^2} \right] f_1(\xi) = \sin \pi \xi. \end{aligned} \quad (5)$$

Równanie (5) jest równaniem różniczkowym liniowym o zmiennych współczynnikach, zatem ugięcie środka belki można wyznaczyć rozwiązując je numerycznie, np. korzystając z pakietu Wolframa „Mathematica”.

Podane powyżej równania w postaci wymiarowej (4) i w postaci bezwymiarowej (5) obowiązują w przypadku, gdy ruchomy punkt materialny znajduje się na belce. Od momentu zjazdu obciążenia z belki mamy do czynienia z drganiami swobodnymi.

2.2. Drgania swobodne układu punkt materialny – belka modelowana jednym stopniem swobody

Po zjeździe obciążenia z konstrukcji zmienia się charakter drgań. Belka wykonuje drgania swobodne opisane jednorodnym równaniem różniczkowym

$$\ddot{\tilde{f}}(t) + \frac{c}{M_b} \dot{\tilde{f}}(t) + \omega^2 \tilde{f}(t) = 0. \quad (6)$$

Rozwiązanie równania (6) we współrzędnych bezwymiarowych ma postać

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\xi) = e^{-h \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2al\xi}}{a}} & \left[C_1 \cos \left(\tilde{\omega} \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2al\xi}}{a} \right) + \right. \\ & \left. + C_2 \sin \left(\tilde{\omega} \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2al\xi}}{a} \right) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie:

$$h = \frac{c}{2M_b},$$

$$\zeta = \frac{h}{\omega} \cdot 100\%,$$

$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - h^2} = \omega \sqrt{1 - \zeta^2}$ – częstość drgań swobodnych tłumionych,

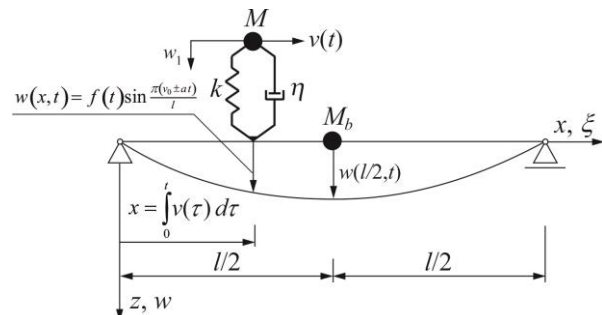
ζ – liczba tłumienia.

Stałe całkowania w wyrażeniu (7) można wyznaczyć analitycznie korzystając z warunków początkowych w chwili zjazdu obciążenia z przęsła:

$$f(1) = \tilde{f}(1), \quad \dot{f}(1) = \dot{\tilde{f}}(1). \quad (8)$$

3. Belka modelowana jednym stopniem swobody obciążona oscylatorem poruszającym się ruchem jednostajnie zmiennym

W kolejnym zadaniu przeanalizujemy układ składający się z oscylatora jednomasowego poruszającego się ruchem jednostajnie zmiennym po belce modelowanej jednym stopniem swobody (rys. 2).



Rys. 2. Belka modelowana jednym stopniem swobody obciążona oscylatorem jednomasowym poruszającym się ze zmienną prędkością

Rozważamy taką samą belkę jak w punkcie 2, natomiast obciążenie stanowi teraz lepkosprężysty, liniowy oscylator jednomasowy o masie M [kg], stałej sprężynowej k [N/m] i lepkości η [Ns/m]. Tak jak wcześniej obciążenie porusza się ruchem jednostajnie zmiennym z prędkością $v(t) = v_0 \pm at$. Drgania punktu materialnego o masie M opisuje współrzędna w_1 [m]. Dodatkowo zakładamy, że w chwili $t = 0$ ugięcie statyczne punktu materialnego M wynosi $w_{os}^{st} = \frac{Mg}{k}$, zatem jego drgania na belce odbywają się dookoła położenia równowagi statycznej i są wymuszone kinematycznie przez drgania niestacjonarne belki.

3.1. Drgania wymuszone układu oscylator jednomasowy – belka modelowana jednym stopniem swobody

Drgania wymuszone układu składającego się z belki i przemieszczającego się po niej oscylatora opisane są dwoma równaniami ruchu. Jeśli przyjmiemy funkcję ugięcia belki w postaci spełniającej warunki brzegowe zadania, daną wzorem (3), to równania ruchu układu oscylator – belka mają postać

$$M \frac{d^2 w_1}{dt^2} + \eta \left\{ \frac{dw_1}{dt} - \left[\frac{df}{dt} \sin \pi \xi + f \frac{\pi(v_0 + at)}{l} \cos \pi \xi \right] \right\} + k [w_1 - f \sin \pi \xi] = 0, \quad (9)$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{c}{M_b} \frac{df}{dt} + \frac{\pi^4 EJ}{2M_b l} f = \frac{M}{M_b} \left(g - \frac{d^2 w_1}{dt^2} \right),$$

gdzie dynamiczne ugięcie oscylatora $w_1 = w_1 \left(v_0 t \pm \frac{at^2}{2}, t \right)$,

$f = f(t)$, natomiast ξ opisane jest takim samym wzorem jak w równaniu (4).

Pierwsze z równań (9) jest równaniem oscylatora jednomasowego. Drugie natomiast jest równaniem belki o jednym stopniu swobody z punktem materialnym w środku rozpiętości przęsła, czyli

przy $x = \frac{l}{2}$. Równania (9) z niewiadomymi $w_1 \left(v_0 t \pm \frac{at^2}{2}, t \right)$

i $f = f(t)$ są ze sobą sprzężone i należy rozwiązać je numerycznie. Obowiązują one w przypadku, gdy ruchomy oscylator przejeżdża przez belkę. Po zjeździe obciążenia z belki zarówno belka jak i oscylator wykonują drgania swobodne.

3.2. Drgania swobodne układu oscylator jednomasowy – belka modelowana jednym stopniem swobody

Od chwili, w której oscylator zjechał z belki równania ruchu oscylatora i belki mają postać

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{w}_1}{dt^2} + 2\tilde{h} \frac{d\tilde{w}_1}{dt} + \omega_{os}^2 \tilde{w}_1 &= 0, \\ \frac{d^2 \tilde{f}}{dt^2} + 2h \frac{d\tilde{f}}{dt} + \omega^2 \tilde{f} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

W równaniu oscylatora przyjęto oznaczenia $2\tilde{h} = \frac{\eta}{M}$, $\omega_{os}^2 = \frac{k}{M}$,

a w równaniu belki $2h = \frac{c}{M_b}$, $\omega^2 = \frac{\pi^4 EJ}{2M_b l}$.

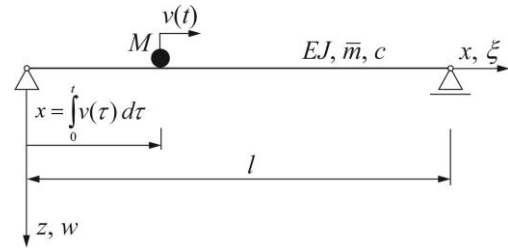
Układ równań (10) rozwiązujemy korzystając z czterech warunków początkowych na ugięcie i pochodną ugięcia belki i oscylatora w chwili, w której oscylator zjeżdża z belki.

4. Belka Bernoulliego-Eulera obciążona punktem materialnym poruszającym się ruchem jednostajnie zmiennym

Blizszy rzeczywistości od schematu belki o jednym stopniu swobody, omówionego w poprzednich punktach, jest model, w którym masa belki jest równomiernie rozłożona.

Rozważmy zatem belkę Bernoulliego-Eulera o równomiernie rozłożonej masie \bar{m} [kg/m]. Belka ma długość l i jest swobodnie podparta na końcach. Jej sztywności na zginanie wynosi EJ . Po przęśle porusza się z prędkością $v(t) = v_0 \pm at$, bez możliwości oderwania od belki, punkt materialny o masie M (rys. 3). Ugięcie belki opisuje współrzędna $w(x, t)$. W układzie występuje tłumienie

wiskotyczne według modelu reologicznego Kelvina–Voigta, gdzie siła oporów ruchu $R = c \frac{dw}{dt}$.



Rys. 3. Belka Bernoulliego-Eulera obciążona punktem materialnym poruszającym się ze zmienną prędkością

4.1. Drgania wymuszone układu punkt materialny – belka Bernoulliego-Eulera

W tym przypadku drgania opisane są równaniem ruchu w następującej postaci

$$\begin{aligned} EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} &= \\ = M \left(g - \frac{d^2 w}{dt^2} \right) \delta \left[x - \left(v_0 \pm \frac{at}{2} \right) t \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Ponieważ obciążenie jest masowe, to w powyższym równaniu $\frac{d^2 w}{dt^2}$ jest pochodną materialną opisaną drugim ze wzorów (2).

Zadanie można rozwiązać metodą rozdzielenia zmiennych Fouriera, zakładając rozwiązanie w postaci nieskończonego szeregu, spełniającego warunki brzegowe belki i zerowe warunki początkowe

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (12)$$

Jeśli dodatkowo uwzględnimy wyrażenie na pochodną materialną, to otrzymamy następujące równanie ruchu belki obciążonej punktem materialnym poruszającym się ruchem jednostajnie zmiennym

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \bar{m} \ddot{q}_n + c \dot{q}_n + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 EJ q_n \right\} \sin \frac{n\pi x}{l} &= \\ = M \left\{ g - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ddot{q}_n \sin \frac{n\pi x}{l} + \dot{q}_n 2v \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} + \right. \right. & \\ \left. \left. + q_n \frac{n\pi}{l} \left(-v^2 \frac{n\pi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \pm a \cos \frac{n\pi x}{l} \right) \right] \right\} & \\ \cdot \delta \left[x - \left(v_0 \pm \frac{at}{2} \right) t \right]. & \end{aligned} \quad (13)$$

Równanie ruchu (13) obowiązuje w przypadku, gdy ruchomy punkt materialny znajduje się na belce. Po zjeździe obciążenia z belki należy rozważać drgania swobodne, opisane innym równaniem, podanym w punkcie 4.2.

4.2. Drgania swobodne układu oscylator jednomasowy – belka Bernoulliego-Eulera

Drgania swobodne analizowanej w tym punkcie belki opisane są następującym równaniem jednorodnym

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \quad (14)$$

Jeśli założymy, że rozwiązanie jest w postaci nieskończonego szeregu, spełniającego warunki brzegowe belki

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{q}_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (15)$$

to równanie (14) możemy przekształcić w następujące

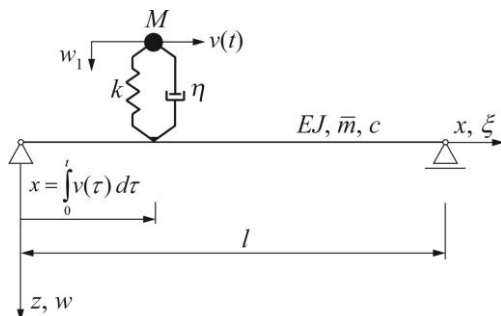
$$\ddot{\tilde{q}}_n + 2h\dot{\tilde{q}}_n + \omega_n^2 \tilde{q}_n = 0, \quad (16)$$

gdzie $2h = \frac{c}{\bar{m}}$, $\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \frac{EJ}{\bar{m}}$.

Równanie (16) rozwiązujemy przy warunkach początkowych na ugięcie i pochodną ugięcia w chwili zjazdu punktu materialnego z belki.

5. Belka Bernoulliego-Eulera obciążona oscylatorem poruszającym się ruchem jednostajnie zmiennym

Kolejnym schematem jest belka o równomiernie rozłożonej masie obciążona oscylatorem lepkosprężystym będącym w ruchu jednostajnie zmiennym (rys. 4). Oznaczenia dotyczące belki oraz oscylatora są takie same jak w poprzednich punktach pracy.



Rys. 4. Belka Bernoulliego-Eulera obciążona oscylatorem lepkosprężystym poruszającym się ze zmienną prędkością

5.1. Drgania wymuszone układu oscylator jednomasowy – belka Bernoulliego-Eulera

W przypadku zadania pokazanego na rysunku 4 równania ruchu oscylatora oraz belki mają następującą postać:

$$M \frac{d^2 w_1}{dt^2} + \eta \left(\frac{dw_1}{dt} - \frac{dw}{dt} \right) + k(w_1 - w) = 0, \quad (17)$$

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} =$$

$$= M \left(g - \frac{d^2 w_1}{dt^2} \right) \delta \left[x - \left(v_0 \pm \frac{at}{2} \right) t \right],$$

gdzie $\delta \left[x - \left(v_0 \pm \frac{at}{2} \right) t \right]$ jest deltą Diraca.

Wzory (17) przedstawiają układ równań różniczkowych z niewiadomym ugięciem belki $w(x, t)$ oraz nieznanym przemieszczeniem pionowym $w_1(x, t)$ punktu materialnego M w oscylatorze. Pierwsze z równań jest równaniem oscylatora, natomiast drugie jest równaniem drgań belki o nieskończenie wielu stopniach swobody. Prawa strona tego równania jest naciskiem lepkosprężystego oscylatora jednomasowego. Pochodna ugięcia belki $\frac{dw}{dt}$ występująca w powyższym układzie równań jest pochodną materialną opisaną wzorami (2).

Zadanie można rozwiązać rozdzielając zmienne, a następnie stosując metodę ortogonalizacyjną Bubnowa-Galerkina. Funkcję ugięcia belki przyjmujemy wtedy w postaci nieskończonego szeregu spełniającego warunki brzegowe zadania:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (18)$$

Ostatecznie po przekształceniach otrzymujemy nieskończony układ różniczkowych równań ruchu o zmiennych współczynnikach. Równania są ze sobą sprzężone, a niewiadomymi są $q_n(t)$ oraz $w_1(x, t)$. Ze względu na zmienne współczynniki w różniczkowych równaniach ruchu analizowanego układu zadanie rozwiązuje się stosując całkowanie numeryczne.

Równania ruchu (17) są ważne w przypadku, gdy ruchomy oscylator znajduje się na belce. Od momentu zjazdu oscylatora z belki mamy do czynienia z drganiami swobodnymi.

5.2. Drgania swobodne układu oscylator jednomasowy – belka Bernoulliego-Eulera

Po zjeździe oscylatora z belki zmienia się charakter drgań. Belka i oscylator wykonują drgania swobodne opisane jednorodnymi równaniami różniczkowymi:

$$M \frac{d^2 w_1}{dt^2} + \eta \frac{dw_1}{dt} + k w_1 = 0, \quad (19)$$

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Układ równań można rozwiązać jak wcześniej, przyjmując rozwiązanie w postaci nieskończonego szeregu, analogicznego do zapisanego wzorem (9):

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{q}_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (20)$$

Po prostych przekształceniach otrzymuje się układ równań z niewiadomymi funkcjami $\tilde{w}_1(x, t)$ oraz $\tilde{q}_n(t)$:

$$\frac{d^2 \tilde{w}_1(t)}{dt^2} + 2\tilde{h} \frac{d\tilde{w}_1(t)}{dt} + \omega_{os}^2 \tilde{w}_1(t) = 0, \quad (21)$$

$$\frac{d^2 \tilde{q}_n(t)}{dt^2} + 2h \frac{d\tilde{q}_n(t)}{dt} + \omega_n^2 \tilde{q}_n(t) = 0,$$

gdzie: $2\tilde{h} = \frac{\eta}{M}$, $\omega_{os}^2 = \frac{k}{M}$, $2h = \frac{c}{\bar{m}}$, $\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \frac{EJ}{\bar{m}}$.

Cztery stałe całkowania wyznaczamy z czterech warunków początkowych na ugięcie i pochodną ugięcia belki i oscylatora w chwili, w której oscylator zjeżdża z belki.

Podsumowanie

W pracy przedstawiono równania ruchu podstawowych modeli mających zastosowanie przy wstępnych analizach obiektów inżynierskich poddanych działaniu obciążeń ruchomych. We wszystkich omówionych zadaniach obciążenie jest masowe. Ze względu na inercyjny charakter obciążenia w rozważaniach należało uwzględnić pochodną materialną Renaudota. Ze względu na zmienną w czasie prędkość obciążenia rozwiązania zadań ulegają dodatkowej komplikacji, szczególnie jeśli w opisie wprowadzi się współrzędne bezwymiarowe. Równania ruchu rozważanych konstrukcji omówiono zarówno w przypadku obciążenia znajdującego się na belce i poza belką.

Bibliografia:

1. Szcześniak W., Wybrane zagadnienia z dynamiki płyt, OWP, Warszawa 2000.
2. Fryba L., Vibration of solids and structures under moving loads. Thomas Telford, 1999.

3. Bajer C.I., Dyniewicz B., Numerical analysis of vibrations of structures under moving inertial load, Springer, Berlin 2012.
4. Ataman M., Drgania belek i płyt poprzecznie niejednorodnych na podłożach odkształcalnych wymuszone obciążeniami ruchomymi, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2010.
5. Ataman M., Analiza drgań nawierzchni i podtorza pod wpływem obciążeń ruchomych z dużymi prędkościami, 2019, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, ISBN 978-83-7814-905-7, 143 s.
6. Bogacz R., Nowakowski S., On the stability of a Timoshenko beam on an elastic foundation under a moving spring-mass system. *Acta Mechanica*, 61 1986 pp.117-127.
7. Bogacz R., Rozenbajgier Z., Stacjonarne drgania belki spoczywającej na półprzestrzeni lepko-sprężystej wywołane ruchomym obciążeniem, *Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej. Mechanika*, z. 63, Warszawa 1979, str. 45-70.
8. Gardzińska R., Analiza przemieszczeń płyty Kirchhoffa wywołanych złożonym obciążeniem inercyjnym w ruchu jednostajnie zmiennym, Ukrainian-Polish seminar "Theoretical Foundations In Civil Engineering", Dnepropetrovsk'95, Warszawa 1995, str.195-204.
9. Gulajev V.I., Melkin V.M., Yakovenko E.V.: The dynamics of a beam on an elastic base under a moving force and moment (Timoshenko Model), *International Applied Mechanics*, Vol.36, No 12, 2000, pp.1650-1656.
10. Kączkowski Z.: Vibration of a beam under a moving load. *Proceedings of Vibration Problems*, Vol. 4, no. 4, Warsaw 1963, pp. 357-373.
11. Szcześniak W., Gryglicki M., Drgania belki sprężystej modelowanej jednym stopniem swobody pod inercyjnym obciążeniem ruchomym oscylatorem o zmiennej prędkości, *Polish-Ukrainian Transactions "Theoretical Foundations of Civil Engineering"*, Vol. 22, Warsaw 2014 pp. 1-17.
12. Śniady P., Dynamic response of a Timoshenko beam to a moving force. *Journal of Applied Mechanics*, 75(2), 024503-1,-024503-4, 2008.
13. Wiśniakowski P., Belka Timoshenki na podłożach sprężystych obciążona ruchomymi oscylatorami – równania zagadnienia. *Theoretical Foundations of Civil Engineering – XII. Polish-Ukrainian Transactions*, Vol. I, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2007, pp. 451-460.
14. Beskou, N.D., Theodorakopoulos, D.D., Dynamic effects of moving loads on road pavements: a review, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 31(4), 2011, pp. 547–567 <https://doi.org/10.1016/j.jsoildyn.2010.11.002>.
15. Kerr A.D., Continuously supported beams and plates subjected to moving loads – a survey, *SM Archives*, 6 (1981), pp. 401-449.
16. Laura, P. A. A., Maurizi, M. J., Rossi, R. E., A survey of studies dealing with Timoshenko beams, *The Shock and Vibration Digest*, 22(11), pp. 3-10, 1990, <https://doi.org/10.1177/058310249002201102>.
17. Szcześniak W., Inercyjne obciążenia na belkach i płytach. *Przeгляд podstawowych pozycji literatury, „Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo”* 1990, z. 112, Warszawa, str. 7-75.
18. Szcześniak W., Problemy ruchomych obciążeń w Polsce. *Przeгляд podstawowych pozycji literatury, „Theoretical Foundations in Civil Engineering – Ukrainian-Polish Seminar”, Dnepropetrovsk* 1993.
19. Szcześniak W., Ataman M., *Przeгляд publikacji polskich autorów z zakresu obciążeń ruchomych na konstrukcjach inżynierskich, Autobusy* 12/2018, str. 667-674, JEL: L91 DOI: 10.24136/atest.2018.475.

Equations of motion of beams loaded with an oscillator moving at a variable speed

The subject of the study is dynamic analysis of a simply supported beam loaded with a moving inertial load. The paper discusses a beam modeled with one degree of freedom and a Bernoulli-Euler beam model with uniformly distributed mass. In both cases, the beam is loaded with a particle or oscillator moving at a variable speed. The equations of motion of the oscillator and the beam were derived by the analytical method. Due to the nature of the load, the Renaudot material derivative appears in the equations of motion of the analyzed systems. In addition, free vibrations of beams after rolling off the load were discussed.

Keywords: moving particle, moving oscillator, beam modeled with one degree of freedom, Bernoulli-Euler beam.

Autorzy:

dr inż. **Magdalena Ataman** – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej
 prof. dr hab. inż. **Wacław Szcześniak** – Politechnika Lubelska, Wydział Budownictwa i Architektury