

Agnieszka JAKUBOWSKA, Janusz WALCZAK

POLITECHNIKA ŚLĄSKA, WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY,
ul. Bolesława Krzywoustego 2, 44-100 Gliwice

Analiza zjawisk rezonansowych w szeregowym obwodzie RLC z superkondensatorem

Mgr inż. Agnieszka JAKUBOWSKA

Jest doktorantką w Instytucie Elektrotechniki i Informatyki Wydziału Elektrycznego Politechniki Śląskiej. Obecnie zajmuje się układami ułamkowego rzędu i ich zastosowaniami w elektrotechnice i elektronice oraz badaniami zjawisk związanych z wyższymi harmonicznymi i ich wpływem na działanie urządzeń elektrycznych. Jest współautorką 6 publikacji z tych dziedzin.



e-mail: Agnieszka.Jakubowska@polsl.pl

Prof. dr hab. inż. Janusz WALCZAK

Jest pracownikiem naukowo – dydaktycznym Instytutu Elektrotechniki i Informatyki Wydziału Elektrycznego Politechniki Śląskiej w Gliwicach. Zajmuje się głównie analizą i syntezą układów elektrycznych i elektronicznych oraz przetwarzaniem sygnałów. Jest autorem lub współautorem ponad 350 publikacji z tych dziedzin, 5 monografii i 5 podręczników akademickich.



e-mail: Janusz.Walczak@polsl.pl

Streszczenie

Artykuł dotyczy analizy warunków zajścia zjawiska rezonansu fazowego i amplitudowego dla szeregowego obwodu RLC z superkondensatorem. Zachowanie superkondensatorów różni się od klasycznych kondensatorów, dlatego ich modele matematyczne są bardziej skomplikowane, wykorzystują m.in. rachunek różniczkowo-całkowy ułamkowego rzędu. Do analizy i symulacji wybrano model oparty o bieguny i zera ułamkowego rzędu. Dobierając odpowiednio parametry obwodu rezonansowego R , L , R_s i C można uzyskać w obwodzie rezonans fazowy i amplitudowy.

Słowa kluczowe: superkondensator, rezonans fazowy, model superkondensatora oparty o bieguny i zera ułamkowego rzędu.

Analysis of resonance phenomena in a series RLC circuit with supercapacitor

Abstract

The phase and magnitude resonance phenomenon in a series RLC circuit with classic reactive components: the inductance L and the capacitance C is widely known in the circuit theory and thoroughly described. The subject of the paper is an analysis of phase resonance conditions in a series RLC circuit with supercapacitor. Supercapacitors differ from classic dielectric capacitors by the construction, behavior and their applications, described in Section 1. There have been created several kinds of mathematical and circuit models (Section 2). Among them, fractional order models demonstrate the best fit to the frequency characteristics as well as dynamic processes occurring in supercapacitors [3], [4] and [10]. The model based on fractional poles and zeros, defined by formulas (2) and (3), was chosen for analysis. The relations for the circuit impedance (10-13) and resonance frequency (14) were derived. They are illustrated in Figs. 2-11. The formula for resonance frequency is a transcendental equation, therefore it is possible to solve it for the investigated system only numerically. The resonance frequency in the examined series RLC circuit whose model is based on fractional poles and zeros depends on five parameters. The results were compared with those obtained from the analysis conducted in paper [6], where f_{re} depends on only three parameters. A more precise supercapacitor model enables more insightful analysis of phase and magnitude resonance phenomenon.

Keywords: supercapacitor, phase resonance, supercapacitor model based on fractional poles and zeros.

1. Wstęp

Superkondensatory są stosunkowo nowym wynalazkiem inżynierii elektrycznej, o około 50 – letniej historii badań i udoskonalen. Od lat 90. XX wieku, dzięki rozwojowi wielu dziedzin techniki, głównie materiałoznawstwa, stosowanie superkondensatorów w przemyśle upowszechnia się i zyskuje nowoczesne obszary zastosowań, m.in. w gromadzeniu i przekazywaniu energii elektrycznej w pojazdach o napędzie hybrydowym, w układach energoelektronicznych przekształtników energii, elektroenergetycznych systemach oszczędzania energii, energetyce odnawialnej

wiatrowej i fotowoltaicznej oraz w zasilaniu urządzeń małej mocy, takich jak latarki, systemy UPS urządzeń elektronicznych i innych [1]. Charakteryzują się one bardzo dużą pojemnością elektryczną w porównaniu do tradycyjnych kondensatorów elektrolitycznych. Dodatkowo, do ich zalet można zaliczyć krótkie czasy ładowania i rozładowywania, co warunkuje ich zastosowanie jako zasobniki energii elektrycznej o dużej gęstości mocy. Zbudowane są z trzech głównych elementów: elektrod doprowadzających napięcie, pokrytych warstwą nanoporowatego materiału, elektrolitu wypełniającego wnętrze superkondensatora i membrany, jednocześnie separującej i przenoszącej ładunki. Niskie znamionowe napięcia pracy superkondensatorów wynikają ze zjawisk elektrochemicznych zachodzących w elektrolicie podczas pracy superkondensatora i są dużym ograniczeniem co do zakresu ich stosowania [2].

Specyficzna budowa superkondensatorów, ich zachowanie i warunki pracy spowodowały konieczność tworzenia nowych modeli obwodowych i matematycznych tych elementów.

Najdokładniejsze modele, obecnie bardzo często używane, wykorzystują teorię równań różniczkowych ułamkowego rzędu. W pracach [3] i [4] przedstawiono i zweryfikowano kilka reprezentatywnych modeli superkondensatorów tzw. rzędu ułamkowego, pod kątem ich charakterystyk częstotliwościowych i przebiegów ładowania oraz rozładowywania. Modele te powinny uwzględniać spektrum zjawisk zachodzących w superkondensatorach, takie, jak możliwość i warunki zajścia rezonansu fazowego i amplitudowego w układzie szeregowego połączenia elementów RLC. Przebadano też zjawisko oscylacji w obwodzie z dwoma elementami ułamkowego rzędu $L_\beta C_\alpha$. Odpowiednio dobierając rząd ułamkowy parametrów α i β , w takim obwodzie można uzyskać dodatnią i ujemną rezystancję, samą indukcyjność lub pojemność lub też stan zwarcia obwodu. Od wielu lat trwają też prace nad praktyczną realizacją kondensatorów ułamkowego rzędu. Kondensator rzędu połówkowego udało się otrzymać kilkoma metodami, m.in. zastępczym obwodem drabinkowej struktury RC, zmieniając chemiczne własności dielektryków (np. $\text{LiN}_2\text{H}_5\text{SO}_4$) lub stosując układy fraktalne [5]. Analiza prostego modelu szeregowego obwodu RLC z superkondensatorem ułamkowego rzędu pokazuje, że im jest on bardziej stratny (rząd α maleje), tym zachodzący rezonans bardziej odbiega od klasycznego rezonansu szeregowego RLC [6].

Artykuł ten dotyczy zagadnienia rezonansu fazowego obwodu szeregowego RLC z implementacją modelu superkondensatora opartego o bieguny i zera ułamkowego rzędu [3].

2. Modele superkondensatorów

Istnieje wiele opracowań dotyczących modelowania obwodowego superkondensatorów. Wiele z nich wynika bezpośrednio z obserwacji ich procesów dynamicznych, natomiast niektóre mają

swoje źródło w badaniach charakterystyk częstotliwościowych. Najogólniej można podzielić je na trzy sposoby modelowania:

- modele wykorzystujące rozbudowane gałęzie RC [1, 7],
- modele oparte o sztuczne sieci neuronowe (ANN) [8], oraz
- modele oparte o rachunek różniczkowo – całkowy ułamkowego rzędu [3, 4].

W ramach modeli tzw. ułamkowego rzędu powstało kilka ich postaci, różniących się między sobą stopniem złożoności i dokładnością opisu charakterystyk dynamicznych i częstotliwościowych superkondensatorów. Najprostszy model został zaproponowany przez Westerlund'a i Ekstama. Impedancję częstotliwościową tego modelu określa wzór:

$$Z(j\omega) = R_s + \frac{1}{(j\omega)^\alpha C}, \quad (1)$$

gdzie: R_s – szeregowo wewnętrzna rezystancja zastępcza (ESR), C – pojemność znamionowa, α – rząd układu.

Badanie zjawiska rezonansu fazowego przy implementacji powyższego modelu pokazało, że im współczynnik α jest bliższy jedności, tym bardziej zależności dla wybranych wielkości: częstotliwości rezonansowej f_{rez} , impedancji $Z(j\omega)$, jej modułu $|Z(j\omega)|$ oraz fazy $|\varphi(\omega)|$ przyjmują postać, jak dla rezonansu w klasycznym obwodzie szeregowym RLC [6]. Ponadto zależności wprowadzone w pracy [6] pokazują, że rezonans amplitudy zachodzi jednocześnie z rezonansem fazy w badanym układzie.

Drugim z modeli ułamkowego rzędu jest tzw. model oparty o bieguny i zera ułamkowego rzędu określony wzorem [3]:

$$Z(j\omega) = R_s + k \frac{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^\alpha}{(j\omega)^\beta}, \quad (2)$$

gdzie: R_s – szeregowo wewnętrzna rezystancja zastępcza (ESR) superkondensatora, przyjmowana przy częstotliwości $f = 100$ Hz, k – odwrotność pojemności znamionowej $k = 1/C$, ω_0 – pulsacja, przy której zmienia się faza impedancji, α , β – parametry ułamkowe, odpowiadające za zmiany fazy impedancji.

W rzeczywistych układach parametr β jest bardzo bliski 1, ze względu na to, że mała wartość β (dążąca do 0) powodowałaby wzrost impedancji do nieskończoności, co w fizycznych układach nie jest możliwe [9]. Model ten również bywa zapisywany w postaci transmitancji [10]:

$$G(j\omega) = R_s + \frac{(T_1 + j\omega)^\alpha}{(T_2 j\omega)^\beta}, \quad (3)$$

gdzie: T_1 – parametr związany z maleniem pojemności wraz z częstotliwością, T_2 – parametr związany z odwrotnością pojemności.

Porównując równania (2) oraz (3) uzyskuje się:

$$\frac{k}{\omega_0^\alpha} = \frac{1}{T_2^\beta}, \quad (4)$$

więc:

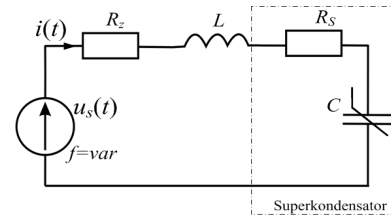
$$\omega_0 = T_1. \quad (5)$$

Istnieją również bardziej złożone modele superkondensatorów rzędu ułamkowego, które wywodzą się z badań nad ich charakterystykami częstotliwościowymi metodą elektrochemicznej spektroskopii impedancyjnej (EIS), takie, jak impedancja Warburga, ograniczona impedancja Warburga oraz funkcja Havriliak'a – Negami [3]. Do opisu superkondensatora wykorzystują od 4 do 9 parametrów, przy czym osiągają doskonale dopasowanie do szerokiego zakresu częstotliwości.

Model oparty o bieguny i zera ułamkowego rzędu dany wzorami (2) i (3) dobrze opisuje zachowanie superkondensatorów w przedziale $f = (50 \text{ mHz}, 100 \text{ Hz})$ i z uwagi na ich dużą pojemność, jest to na tyle szeroki zakres częstotliwości aby zaobserwować dla niego zjawisko rezonansu fazy w szeregowym obwodzie RLC z superkondensatorem.

3. Model układu

Model analizowanego obwodu w dziedzinie częstotliwości pokazany jest na rys. 1:



Rys. 1. Szeregowy obwód RLC z superkondensatorem
Fig. 1. Series RLC circuit with supercapacitor

Na schemacie z rys. 1 uwzględniono w źródle napięcia $u_s(t)$ zarówno składową stałą polaryzującą superkondensator u_0 oraz składową przemienną $u(t)$ o regulowanej częstotliwości. Zatem źródło napięcia zasilającego obwód RCL $u_s(t)$ przedstawia się zależnością:

$$u_s(t) = u_0 + u(t) = u_0 + \sqrt{2}|u| \sin(\omega t + \phi). \quad (6)$$

Analiza została przeprowadzona z użyciem modelu opartego o bieguny i zera ułamkowego rzędu, danego wzorem (2). Przyjmując powyższy model, całkowita impedancja szeregowego obwodu RLC $Z(j\omega)$, widziana z zacisków źródła, dana jest zależnością:

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + k \frac{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^\alpha}{(j\omega)^\beta}, \quad (7)$$

gdzie:

$$R = R_z + R_s. \quad (8)$$

Przekształcając wzór (7), ostatecznie otrzymujemy postać impedancji w postaci:

$$Z(j\omega) = \operatorname{Re}\{Z(j\omega)\} + j \cdot \operatorname{Im}\{Z(j\omega)\}, \quad (9)$$

jako:

$$Z(j\omega) = R + \frac{k}{\omega_0^\alpha} \frac{(\omega_0^2 + \omega^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{\omega^\beta} \cos\left(\alpha \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \frac{\pi}{2}\beta\right) + \left[\omega L + \frac{k}{\omega_0^\alpha} \frac{(\omega_0^2 + \omega^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{\omega^\beta} \sin\left(\alpha \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \frac{\pi}{2}\beta\right) \right]. \quad (10)$$

Moduł i faza impedancji szeregowego obwodu RLC z superkondensatorem dane są jako:

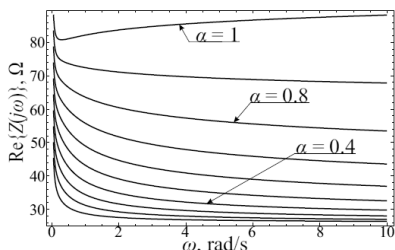
$$|Z(j\omega)| = \left(R^2 + (\omega L)^2 + \frac{k^2(\omega_0^2 + \omega^2)^\alpha}{\omega^\beta} + \frac{k}{\omega_0^\alpha} \frac{(\omega_0^2 + \omega^2)^\frac{\alpha}{2}}{\omega^\beta} [2R \cos(\delta) + 2\omega L \sin(\delta)] \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

gdzie:

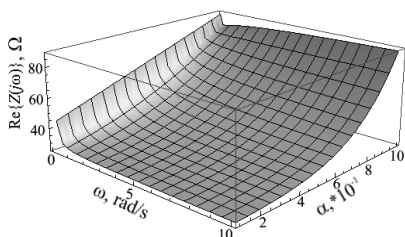
$$\delta = \alpha \cdot \arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \frac{\pi}{2} \beta, \quad (12)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega L + \frac{k}{\omega_0^\alpha} \frac{(\omega_0^2 + \omega^2)^\frac{\alpha}{2}}{\omega^\beta} \sin\left(\alpha \cdot \arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \frac{\pi}{2} \beta\right)}{R + \frac{k}{\omega_0^\alpha} \frac{(\omega_0^2 + \omega^2)^\frac{\alpha}{2}}{\omega^\beta} \cos\left(\alpha \cdot \arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \frac{\pi}{2} \beta\right)}. \quad (13)$$

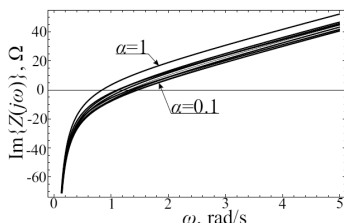
Wyprowadzone zależności impedancji dla szeregowego układu RLC z superkondensatorem zasymulowano i zilustrowano na wykresach pokazanych na rys. 2 - 9, w postaci funkcji jednej zmiennej – pulsacji $f(\omega)$ z zadany parametrem α oraz jako funkcji dwóch zmiennych $f(\alpha, \omega)$.



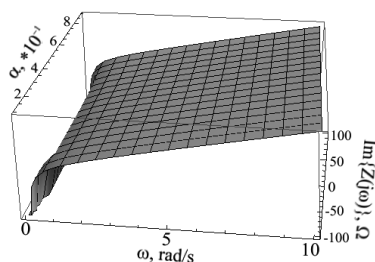
Rys. 2. Wykres funkcji $\text{Re}\{Z(j\omega)\}$ na podstawie wzoru (10) dla $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$
 Fig. 2. Graph of the function $\text{Re}\{Z(j\omega)\}$ based on formula (10) for $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$



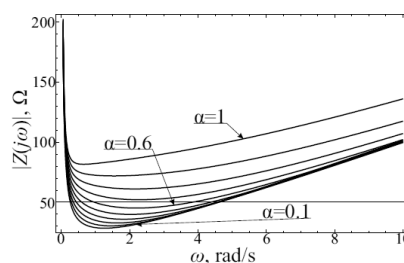
Rys. 3. Wykres funkcji $\text{Re}\{Z(j\omega)\}$ na podstawie wzoru (10) dla $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$
 Fig. 3. Graph of the function $\text{Re}\{Z(j\omega)\}$ based on the formula (10) for $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$



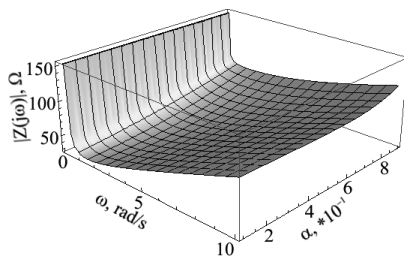
Rys. 4. Wykres funkcji $\text{Im}\{Z(j\omega)\}$ na podstawie wzoru (10) dla $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$
 Fig. 4. Graph of the function $\text{Im}\{Z(j\omega)\}$ based on formula (10) for $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$



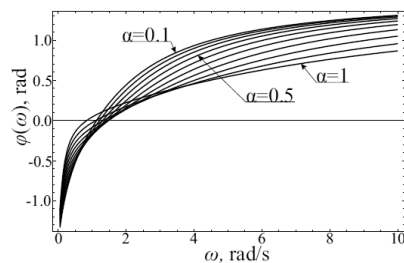
Rys. 5. Wykres funkcji $\text{Im}\{Z(j\omega)\}$ na podstawie wzoru (10) dla $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$
 Fig. 5. Graph of the function $\text{Im}\{Z(j\omega)\}$ based on formula (10) for $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$



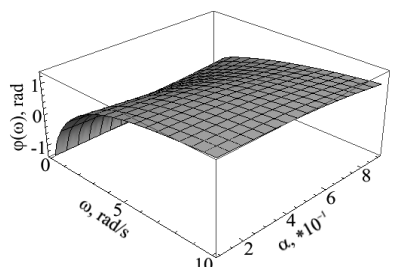
Rys. 6. Wykres funkcji $|Z(j\omega)|$ na podstawie wzoru (11) dla $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$
 Fig. 6. Graph of the function $|Z(j\omega)|$ based on formula (11) for $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$



Rys. 7. Wykres funkcji $|Z(j\omega)|$ na podstawie wzoru (11) dla $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$
 Fig. 7. Graph of the function $|Z(j\omega)|$ based on formula (11) for $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$



Rys. 8. Wykres funkcji $\varphi(\omega)$ na podstawie wzoru (13) dla $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$
 Fig. 8. Graph of the function $\varphi(\omega)$ based on formula (13) for $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$



Rys. 9. Wykres funkcji $\varphi(\omega)$ na podstawie wzoru (13) dla $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$
 Fig. 9. Graph of the function $\varphi(\omega)$ based on formula (13) for $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$

Symulacje zostały przeprowadzone dla rzeczywistych parametrów szeregowego obwodu RLC; cewki o indukcyjności $L = 10$ H, szeregowej rezystancji $R_Z = 1$ Ω , oraz superkondensatora firmy Panasonic o pojemności znamionowej $C = 0,047$ F i współczynnikach: $\beta = 0,92$, $\omega_0 = 0,1958$, $k = 10,87$ [10].

4. Rezonans fazowy

Pulsacja rezonansowa dla omawianego obwodu RLC z superkondensatorem wyznaczana jest z ogólnego warunku rezonansu fazowego $\text{Im}\{Z(j\omega)\} = 0$. Wynosi ona:

$$\omega_{rez} = -\frac{k}{\omega_0^\alpha L} \frac{(\omega_0^2 + (\omega_{rez})^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{(\omega_{rez})^\beta} \cdot \sin\left(\alpha \cdot \arctg\left(\frac{\omega_{rez}}{\omega_0}\right) - \frac{\pi}{2} \beta\right) \quad (14)$$

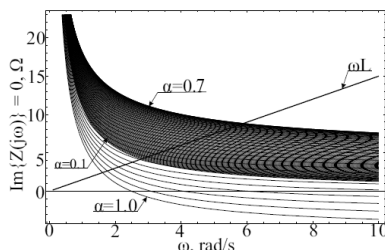
Widać, że wyznaczenie pulsacji rezonansowej ω_{rez} w postaci jawnej na podstawie wzoru (14) nie jest możliwe, gdyż równanie (14) jest równaniem przestępnym. Jej wartości można znaleźć numerycznie, szukając punktu przecięcia dwóch funkcji:

$$f_1(\omega) = \omega L, \quad (15)$$

oraz:

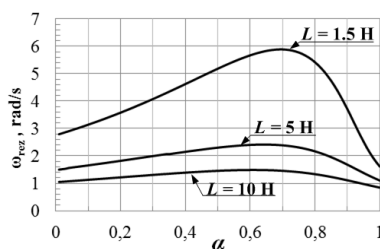
$$f_2(\omega) = -\frac{k}{\omega_0^\alpha} \frac{(\omega_0^2 + \omega^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{\omega^\beta} \cdot \sin\left(\alpha \cdot \arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \frac{\pi}{2} \beta\right), \quad (16)$$

co ilustruje rys. 11.



Rys. 10. Graficzny sposób szukania pulsacji rezonansowej ω_{rez} układu RLC
Fig. 10. Graphical way of finding the resonance frequency ω_{rez} in an RLC circuit

Dla analizowanego szeregowego obwodu RLC z superkondensatorem, wyznaczono numerycznie wartości pulsacji rezonansowej dla współczynnika $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$, oraz przedstawiono je na wykresie na rysunku 12. Sprawdzono także kształt krzywej rezonansowej dla kilku wybranych wartości indukcyjności L obwodu.



Rys. 11. Wykres wyznaczonej pulsacji rezonansowej ω_{rez} dla $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$
Fig. 11. Graph of the determined resonance frequency ω_{rez} for $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$

Z wykresu na rys. 11 można odczytać maksimum pulsacji (częstotliwości) rezonansowej, które przesuwają się w stronę wyższych wartości, im indukcyjność obwodu L jest mniejsza. Maksimum pulsacji rezonansowej przypada na wartość współczynnika – rzędu ułamkowego superkondensatora $\alpha = 0,7$.

W artykule będącym rozszerzeniem niniejszego abstraktu oprócz opisanych powyżej w skrócie wyników przeprowadzono analizę rezonansu amplitudowego w rozpatrywanym układzie. Porównano wyniki analizy właściwości rezonansowych układu z rysunku 1 dla modelu superkondensatora opisanego wzorem (1) [6] i wzorem (2).

5. Podsumowanie

Artykuł prezentuje analizę warunków zajścia rezonansu fazowego w szeregowym obwodzie RLC z superkondensatorem. Wzięto w nim pod uwagę model matematyczny rzędu ułamkowego, tzw. model oparty o bieguny i zera ułamkowego rzędu [3, 10]. Z analizy wynika, że częstotliwość rezonansowa tego obwodu zależy aż od pięciu parametrów: indukcyjności L , parametru związanego z odwrotnością pojemności znamionowej k , pulsacji, przy której zmienia się faza impedancji (region Warburga) ω_0 , oraz rzędów ułamkowych α i β . Poza tym, ma ona postać przestępną, przez co nie jest możliwe wyznaczenie jej analitycznie. Odpowiednio dobierając wartości elementów L , C oraz α , można uzyskać maksimum częstotliwości rezonansowej, które jak widać na rys. 11, nie przypada dla wartości $\alpha = 1$, czyli idealnego, bezstratnego superkondensatora.

6. Literatura

- [1] Zhang Y.: Study of supercapacitor in the application of power electronics, Journal WSEAS Transactions on CAS, Volume 8, Issue 6, 2009, pp. 508-517.
- [2] Wang Y.: Modeling of ultracapacitor short – term and long – term dynamic behavior – MS thesis, The University of Akron, 2008.
- [3] Martin R., Quintana J., Ramos A., Nuez I.: Modeling electro-chemical double layer capacitor, from classical to fractional impedance, The 14th IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference, Ajaccio, 4-7 May, 2008, pp.61-66.
- [4] Dzieliński A., Sarwas G., Sierociuk D.: Comparison and validation of integer and fractional order ultracapacitor mod-els, Advances in Difference Equations, Springer Open Journal, June 2011.
- [5] Radwan A.G., Salama K.N.: Passive and active elements using fractional $L\beta C\alpha$ circuit, IEEE Transactions on CAS, Volume 58, No. 10, pp. 2388- 2397.
- [6] Walczak J., Jakubowska A.: Phase resonance in RLC circuit with ultracapacitor, XXXVI IC – SPETO 2013, Ustroń, 22-25 May, 2013 (w druku).
- [7] Shi L., Crow M.L.: Comparison of ultracapacitor electric circuit models, Proceedings of IEEE Power and Energy Society General Meeting, Pittsburgh, USA, 2008, pp.1–6.
- [8] Marie-Francoise J.N., Gualous H., Berthon A.: Supercapacitor thermal- and electrical-behaviour modeling using ANN, IEE Proc.- Electr. Power Applications, Vol 153, No.2, 2006.
- [9] Dzieliński A., Sierociuk D., Sarwas G.: Ultracapacitor parameters identification based on fractional order model, Proceedings of European Control Conference 2009, Budapest, Hungary, ECC'2009, 23-26 August, 2009.
- [10] Sarwas G.: Modelowanie superkondensatorów przy użyciu rachunku różniczkowego ułamkowego rzędu, Prace Instytutu Elektrotechniki, Zeszyt 239, 2008, str.17 – 28.

otrzymano / received: 11.07.2013

przyjęto do druku / accepted: 02.09.2013

artykuł recenzowany / revised paper