

Dr inż. Krzysztof Śledziwski

Katedra Dróg i Mostów
Politechnika Lubelska
Nadbystrzycka 40, 20-618 Lublin, Polska
E-mail: k.sledziwski@pollub.pl

Badania doświadczalne i numeryczne zespolonych belek ciągłych z uwzględnieniem zarysowania płyty

Słowa kluczowe: *belka zespolona, badania eksperymentalne, modelowanie numeryczne, model betonu plastycznego ze zniszczeniem, Abaqus, obciążenie eksploatacyjne, trwałość*

Streszczenie: Praca prezentuje wyniki badań belek zespolonych, stanowiących modele reprezentatywnych elementów ustrojów nośnych obiektów technicznych (mostów) poddawanych zginaniu. Przyjęty rodzaj obciążenia oraz powstałych deformacji rozpatrywanego układu odpowiada warunkom eksploatacyjnym. Przedmiotem rozważań były belki zespolone typu stal-beton z łącznikami w postaci sworzni. Przeprowadzono badania eksperymentalne dźwigarów w skali zbliżonej do rzeczywistej pod obciążeniem statycznym odpowiadającym obciążeniu eksploatacyjnemu. Otrzymane wyniki posłużyły do budowy modelu numerycznego przy wykorzystaniu metody elementów skończonych. Do opisu betonu wykorzystano nieliniowy model betonu plastycznego ze zniszczeniem, natomiast do opisu stali przyjęto model ciała sprężysto-plastycznego. Przeanalizowano dwa sposoby połączenia płyty betonowej z belką stalową: połączenie ciągłe oraz połączenie punktowe wykorzystując sztywne łączniki. Następnie przeprowadzono walidację przygotowanego modelu numerycznego belki. Dokonano porównania wybranych właściwości eksploatacyjnych badanych ustrojów, w oparciu o przyjęte kryteria.

1. Wprowadzenie

Szczególne wymagania odnośnie teorii konstrukcji zespolonych jak i ich twórczego kształtowania powodują, że są to jedne z najbardziej interesujących rozwiązań ustrojów nośnych w technice budowlanej. Części składowe przekroju poprzecznego wykonane są z materiałów, o różnych modułach Younga, które współpracują ze sobą dzięki zastosowaniu łączników. Elementy te łączy się aby maksymalnie wykorzystać zarówno ich właściwości wytrzymałościowe jak i cechy eksploatacyjne, w odniesieniu do ich usytuowania w obiekcie.

Największe korzyści widzi się obecnie w zastosowaniu konstrukcji zespolonych typu stal-beton [24]. Są one głównie wykorzystywane przy budowie mostów, ale stosuje się je również w innych dziedzinach budownictwa, zwłaszcza w budownictwie przemysłowym [16].

Znaczenie samego zagadnienia zarysowania w kontekście zespolonych konstrukcji ciągłych jest wciąż tematem dyskusji. Pomimo, że bezpieczeństwo konstrukcji nie jest tu w żaden sposób zagrożone to jednak w znaczący sposób wpływa na jej trwałość. Pojawiające się rysy mogą być przyczyną uszkodzeń izolacji, a w dłuższej perspektywie czasu również korozji zbrojenia. Należy więc pamiętać, że trwałość konstrukcji stanowi jedno z podstawowych założeń w procesie jej projektowania i w istotny sposób wpływa na przyjęte rozwiązania konstrukcyjne oraz materiałowe [26]. Trwałość obiektu jest zachowana, jeżeli w założonym czasie konstrukcja spełnia swoje funkcje w zakresie nośności (stany graniczne nośności) i

użytkowości (stany graniczne związane z ograniczeniem rys, naprężeń i ugięć). Prawidłowe zaprojektowanie konstrukcji zapewnia spełnienie wymagań użytkowych co najmniej przez okres oczekiwanej trwałości. Przy czym wymagania w zakresie trwałości konstrukcji mostowych są szczególnie wysokie. Zgodnie z [26] mosty zaliczane są do kategorii (klasy) konstrukcji S5, co oznacza orientacyjny projektowany okres użytkowania wynoszący min. 100 lat.

Obecnie, w dążeniu do spełnienia coraz bardziej rygorystycznych kryteriów kształtowania trwałości, w fazie projektowania mostów zespolonych w stanie granicznym nośności i użyteczności należy uwzględnić zarysowanie betonu oraz jego zmianę sztywności między rysami [28]. Zarysowanie betonu ma wpływ na sztywność przekroju zespolonego i może doprowadzić do przeciążenia przekroju stalowego. Zmiana sztywności powoduje redystrybucję momentów zginających na długości belki ciągłej. Problem zachowania zespolonej konstrukcji z zarysowaną płytą betonową jest skomplikowany i nie do końca rozpoznany. Z tego powodu sztywność rozciąganego betonu w projektowaniu konstrukcji inżynierskich jest często pomijana. Podejście takie prowadzi do nieracjonalnej oceny nośności oraz użyteczności konstrukcji zespolonej co w konsekwencji przekłada się na zmniejszenie okresu użytkowania obiektu [36].

Problem ten występuje również w przypadku istniejących mostów stalowych, które często są poddawane zabiegom mającym na celu zwiększenie ich trwałości eksploatacyjnej [34]. Wzmacnianie lub modernizacja wielu drogowych mostów stalowych często polega na wymianie pomostu drewnianego na betonowy, współpracujący z rusztem lub dźwigarami głównymi. Również w mostach kolejowych z jezdnią ułożoną bezpośrednio na konstrukcji mamy do czynienia z dodaniem koryta balastowego w postaci betonowego pomostu, współpracującego z rusztem stalowym lub np. kratownicowymi dźwigarami głównymi. Wówczas część elementów zespolonych poddana jest naprężeniom rozciągającym, które powodują powstawanie zarysowań i w konsekwencji zmniejszenie żywotności konstrukcji [7].

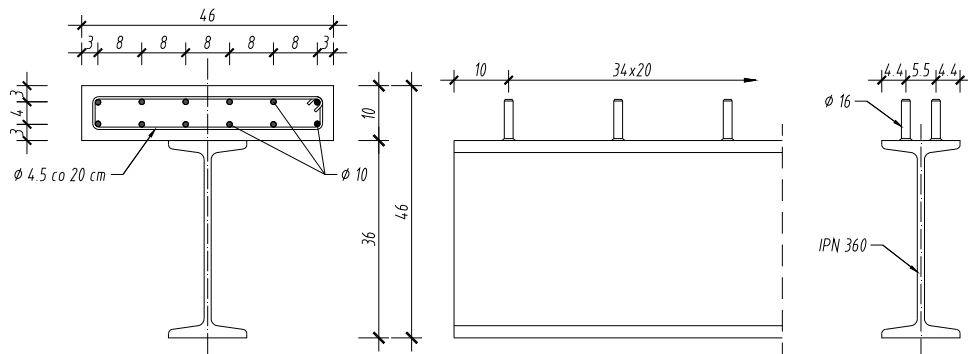
W związku z tym, w ostatnich latach nastąpił znaczący wzrost badań dotyczących zagadnień związanych z mechanicznym zachowaniem ciągłych belek zespolonych [2, 20], w kontekście kształtowania trwałości i niezawodności obiektu, w szczególności na etapie wymiarowania konstrukcji [41]. Badania te skupiały się z reguły na nośności granicznej całego przekroju zespolonego [13, 14] bądź też jego poszczególnych części [3, 10], zarysowaniu płyty betonowej [12, 17] i metodach kontroli rozwartości rys [32, 33], symptomach uszkodzeń [5], zastosowaniu sprężenia [6], a także podatności zespolenia [19, 35].

W odniesieniu do przytoczonych badań w niniejszej pracy określono wpływ betonu między rysami w rozciąganej płycie ciągłej belki zespolonej (tzw. usztywnienie przy rozciąganiu) na kwestię trwałości pracy konstrukcji w zakresie obciążeń eksploatacyjnych. W tym celu wykonano badania doświadczalne dźwigarów mostowych o zbliżonej skali do rzeczywistej [23] oraz badania numeryczne przy wykorzystaniu metody elementów skończonych.

2. Badania eksperymentalne belek zespolonych

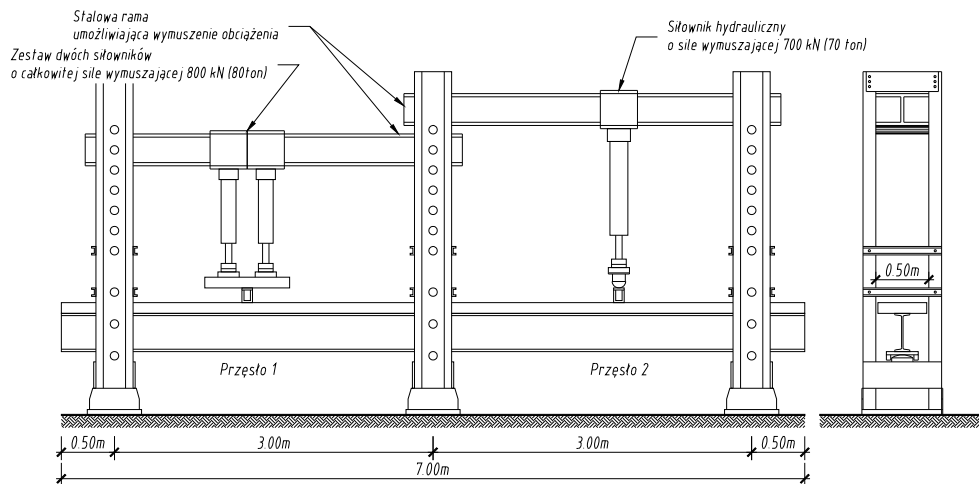
2.1. Elementy badawcze

Przedmiotem badań eksperymentalnych były zespolone belki ciągłe, dwuprzęsłowe o parametrach przedstawionych na Rys. 1. Długość całkowita każdego elementu badawczego wynosiła 7.00 m, w tym rozpiętości podporowe 2×3.00 m.



Rys. 1. Parametry badanej belki

Badane belki w odniesieniu do rzeczywistych konstrukcji mostów zespolonych były modelami w skali 1:2, stąd też grubość płyty przyjęto równą 10 cm. Natomiast pozostałe parametry geometryczne płyty żelbetowej (szerokość i długość) wynikały z ograniczeń w geometrii stendu badawczego (Rys. 2).



Rys. 2. Widok badanej belki na stanowisku pomiarowym

Zbrojenie podłużne płyty stanowiło 12 prętów gładkich $\phi 10$ mm ułożone w dwóch rzędach: górą i dołem, na całej długości po 6 prętów w rozstawie co 8 cm (stopień zbrojenia wynosił 2%). Natomiast zbrojenie poprzeczne stanowiły strzemiona z prętów $\phi 4.5$ mm ułożone w rozstawie co 20 cm.

Dźwigar stalowy (dwuteownik europejski typu IPN 360), połączono na całej długości z płytą betonową za pomocą dwóch rzędów łączników kołkowych. Łączniki o średnicy $\phi 16$ mm i wysokości 75 mm przyspawano do pasa górnego belki w rozstawie co 20 cm (Rys. 1). Taki sposób połączenia miał zapewnić niepodatność zespolenia w całym zakresie obciążenia.

2.2. Właściwości materiałów konstrukcyjnych

Dokładne dane materiałowe odnoszące się do zastosowanej stali uzyskano z atestów dostarczonych przez producentów (Tabela 1). Pręty zbrojeniowe wykonano ze stali B235, natomiast dwuteowniki ze stali S235.

Cechy mechaniczne betonu, z którego wykonano pasmo płyty elementów badawczych określono na podstawie próbek pobranych z zarobu w trakcie betonowania. Wytrzymałość na ściskanie wyznaczono zgodnie z [29] na próbkach sześciennych o boku 150 mm po 3, 7, 14 i 28 dniach od chwili wykonania, natomiast rozciąganie określono metodą przez

rozłupywanie zgodnie z [30] na walcach normowych o średnicy 150 mm i wysokości 300 mm.

Tabela 1. Cechy wytrzymałościowe stali

Gatunek stali	Granica plastyczności [MPa]	Wytrzymałość na rozciąganie [MPa]	Wydłużenie [%]	Moduł Younga [MPa]
S235	235	339÷423	39.6	2.10×10^5
B235		325÷406	40.1	

Podobnie jak w przypadku wytrzymałości na rozciąganie, wartość modułu sprężystości badanego betonu określono na walcach o średnicy 150 mm i wysokości 300 mm. Otrzymane wyniki badań betonu po 28 dniach przedstawiono w Tabeli 2.

Tabela 2. Wyniki badań betonu po 28 dniach

Wytrzymałość na ściskanie [MPa]		Wytrzymałość na rozciąganie [MPa]		Moduł Younga [MPa]	
Próbek	Średnia	Próbek	Średnia	Próbek	Średnia
70.24		3.77		43.41×10^3	
70.19	70.15	3.89	3.82	43.08×10^3	43.19×10^3
70.02		3.79		43.09×10^3	

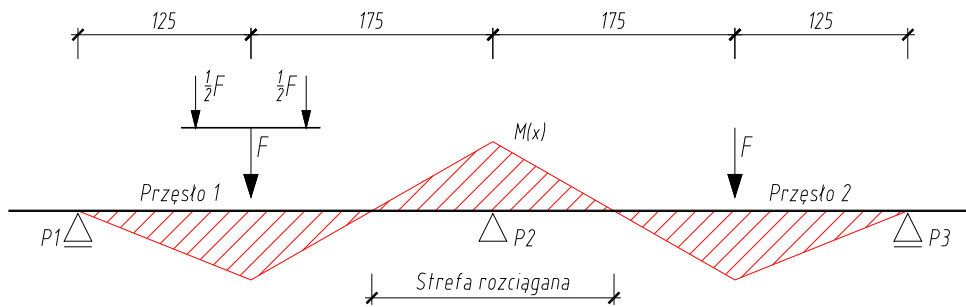
W trakcie badań numerycznych przyjęto, że wartość modułu sprężystości przy ściskaniu jest równa wartości modułu przy rozciąganiu [39]. Przyjęto również, że odkształcenia przy ściskaniu odpowiadające maksymalnej wytrzymałości na ściskanie wynoszą $\varepsilon_{ci}=0.0026$, zaś odkształcenie graniczne przy ściskaniu jest równe $\varepsilon_{cul}=0.0030$.

2.3. Realizacja obciążenia i mierzone wielkości

Badania belek przeprowadzono we współpracy z Politechniką Świętokrzyską i Ośrodkiem Badań Mostów, filia „Kielce” należącym do Instytutu Badawczego Dróg i Mostów.

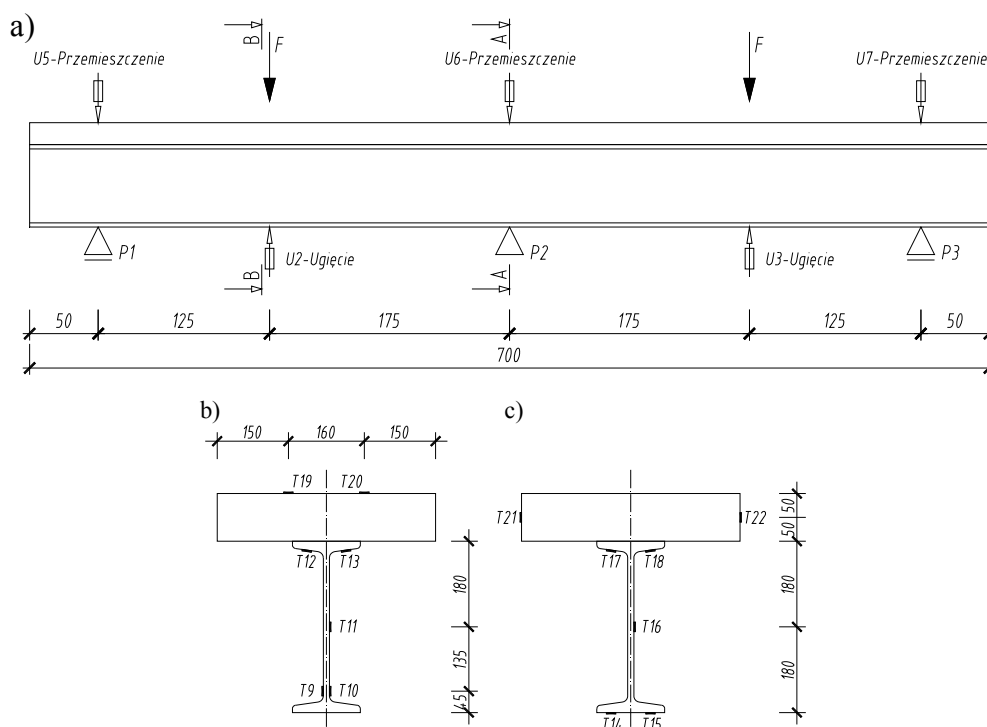
Elementy badawcze były umieszczone między słupkami stalowej ramy, które w przypadku zsunięcia się belki z któregoś łożyska zabezpieczyły ją przed przemieszczeniem się z pozycji centralnej (Rys. 2). Miejsce przyłożenia obciążeń zewnętrznych dobrano w taki sposób, aby wartości wywołanych momentów zginających, przęsłowych i podporowego były zbliżone do siebie oraz aby w elemencie badawczym występowały strefy momentów ujemnych powodujących rozciąganie górnych włókien płyty żelbetowej. Stąd też obciążenie w postaci dwóch sił skupionych zlokalizowano w odległości 175 cm z każdej strony podpory środkowej (Rys. 3).

Siły były przyłożone do górnej powierzchni płyty betonowej za pośrednictwem konstrukcji (belecza stalowa z podkładką) rozkładającej je na pasmo poprzeczne do osi belki o wymiarach 100 x 460 mm. Obciążenie wywołane w przęśle 1 za pomocą dwóch siłowników hydraulicznych, przekazywano dodatkowo za pomocą belki trawersowej.



Rys. 3. Schemat obciążenia badanych belek – rozkład momentów na długości belki

W czasie badań mierzono przemieszczenia dźwigara zespolonego, odkształcenia w belce stalowej i zespolonej płycie żelbetowej (w dwóch przekrojach: nad podporą, w strefie tzw. momentów ujemnych oraz w przęśle, w strefie tzw. momentów dodatnich). Dokonywano również pomiaru propagacji rys. Naprężenia w dźwigarze stalowym mierzono za pomocą tensometrów elektrooporowych, natomiast w płycie żelbetowej za pomocą tensometrów papierowych. Lokalizacja tensometrów została tak dobrana aby uzyskać odczyty pożądanych wielkości w punktach uznanych za niewrażliwe ze względu na kryteria eksploatacyjne – Rys. 4. Z powodu konstrukcji rozkładającej obciążenie na pasmo poprzeczne, na całą szerokość płyty, tensometry naklejono na powierzchniach bocznych płyty w przekroju przęsłowym. Z kolei w przypadku przekroju podporowego ze względu na sposób podparcia elementów badawczych zamontowano je na dole środnika, bezpośrednio nad dolną półką.



Rys. 4. Rozmieszczenie punktów pomiarowych: a) widok z boku, b) przekrój podporowy, c) przekrój przęsłowy

Belki obciążano stopniowo narastającymi siłami skupionymi w czterech pełnych cyklach obciążenie-odciążenie. Pierwszy cykl zawsze przeprowadzano w zakresie od 0 kN do pojawienia się pierwszej rysy (odpowiednio 120 i 230 kN). W następnych cyklach siłę zwiększano o około 200 kN, aż do osiągnięcia maksymalnego obciążenia założonego. Uzyskanie maksymalnej wartości w każdym cyklu odbywało się poprzez zwiększanie siły stopniowo, wprowadzając pośrednie wartości obciążenia. Prędkość przyrostu obciążenia

wynosiła średnio około 10 kN/minutę. Zakres obciążenia odpowiadał obciążeniu eksploatacyjnemu przyjętego układu (zakres pracy sprężystej).

2.4. Wyniki badań eksperymentalnych

Badano 2 belki zespolone. Wyniki rejestrowano w sposób ciągły w każdym cyklu, a powstałe rysy mierzono po osiągnięciu zamierzonej wartości obciążenia. Określono liczbę rys, kierunek ich rozwoju oraz zasięg występowania – parametry kluczowe z punktu widzenia analizy sztywności oraz szacowania ugięć i redystrybucji momentów zginających, zwłaszcza w zakresie sprężystym (obciążeń eksploatacyjnych), w układach ciągłych.

W dalszej części artykułu przedstawiono wyniki wybranych wielkości w formie graficznej oraz zestawień tabelarycznych. Oznaczenia podpór, punktów pomiarowych itp. przyjęto zgodnie z Rys. 3 i Rys. 4.

2.4.1. Propagacja rys w czasie

W czasie badań propagacji rys, wszystkich pomiarów dokonywano na każdym poziomie obciążenia. Zgodnie z wcześniejszymi założeniami, głównym obszarem obserwacji była strefa rozciągana. W celu uzyskania pełniejszego obrazu stanu zarysowania w belkach zespolonych wykonano również pomiary w obszarach ściskanych. W strefie podpory środkowej z powodu braku możliwości dostępu do płaszczyzn bocznych płyty na szerokości ~ 30 cm, pomiarów dokonywano odpowiednio na górnej powierzchni płyty bądź też w jej osi. Z kolei w strefach ściskanych, ze względu na zastosowane trawersy w miejscu przekazywania obciążenia, utrudniony był dostęp do powierzchni górnej płyty na pasie o szerokości 10 cm.

Tabela 3. Ilość rys w zależności od wartości obciążenia

Element badawczy	Belka B1				Belka B2			
	Siła [kN]							
Obciążenie wywołane 2 siłownikami	230	400	600	700	120	400	600	700
Obciążenie wywołane 1 siłownikiem	230	400	600	700	120	400	600	700
Moment zginający [kNm]								
Przęsło 1 (P1-P2)	119	207	309	361	63	207	309	361
Nad podporą P2	121	209	312	390	64	209	312	390
Przęsło 2 (P2-P3)	119	207	309	361	63	207	309	361
Ilość rys [szt.]								
Przęsło 1 (P1-P2)	-	-	1	1	-	-	1	1
Nad podporą P2	1*	6	8	9	1*	5	8	9
Przęsło 2 (P2-P3)	-	1	1	1	-	-	-	1

*¹) Rysa włoskowata

W Tabeli 3 przedstawiono zestawienie ilości rys w każdej badanej belce w zależności od wartości działającej siły i wywołanego momentu zginającego (przęsłowego i podporowego). Przy obliczaniu liczby rys brano pod uwagę jedynie rysy, które rozciągały się na co najmniej 50% szerokości płyty lub traktowano jako jedną rysę dwie krótsze, położone na przeciwległych krawędziach płyty, zlokalizowane w tym samym przekroju.

Pomimo, że końcowa ilość rys wszystkich belek była zbliżona do siebie to zaobserwowano, że za każdym razem sposób ich powstawania i rozwoju był inny. W przypadku belki B2 rysa inicjująca powstała przy obciążeniu odpowiadającym momentowi rysującemu, natomiast w belce B1 rysa powstała dopiero przy sile 230 kN, która wywołała moment zginający dwukrotnie większy.

W każdej belce zaobserwowano inną morfologię rys co jedynie potwierdziło, że mechanizm rysowania płyty jest bardzo złożony. Aczkolwiek w trakcie badań zaobserwowano, że rysy propagowały zawsze od krawędzi płyty w kierunku jej osi, jednak nie w każdej belce łączyły się z rysami postępującymi od drugiej strony. W trakcie badań zaobserwowano również, że po przyłożeniu maksymalnego obciążenia liczba rys nie ulegała zwiększeniu a jedynie następował wzrost ich rozwartości.

Z kolei w strefie tzw. momentów dodatnich układ rys był charakterystyczny dla ściskanej płyty. Wzdłuż osi podłużnej belki w obu kierunkach od miejsca przyłożenia obciążenia, powstała rysa, której długość wynosiła od 120 cm do 180 cm w zależności od belki. Taki obraz zarysowania potwierdza występowanie w płycie naprężeń rozciągających prostopadłych do osi zginanej belki.

Ostatnim badaniem związanym z propagacją rys w czasie, był pomiar ich rozstawu, którego dokonywano w osi płyty. W Tabeli 4 zestawiono pomierzone wartości średniego rozstawu rys, na zarysowanych odcinkach oraz podano średnią, obliczeniową odległość między rysami wyznaczoną zgodnie z [27].

Tabela 4. Średni rozstaw rys nad podporą pośrednią

Nr belki	Długość odcinka zarysowanego	Liczba rys [szt.]	Średni rozstaw rys [cm]	Teoretyczny średni rozstaw rys wyznaczony wg PN-EN [27]
	[cm]			[cm]
B1	104	9	10.8	16.6
B2	102	9	10.4	

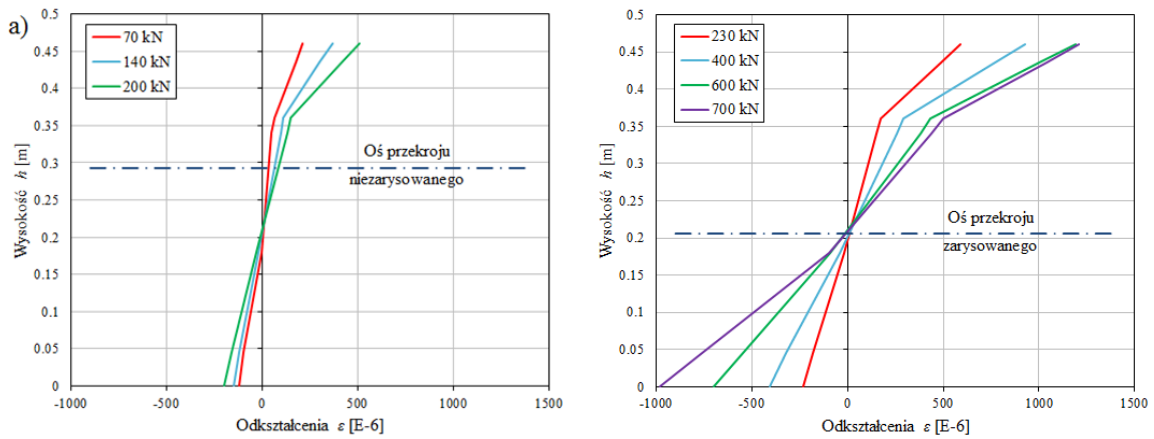
Końcowy rozstaw rys wynosił około 11 cm i był mniejszy niż rozstaw prętów poprzecznych – 20 cm. Oznacza to, że w belkach ciągłych na odcinku, w którym naprężenia przekraczały wytrzymałość betonu na rozciąganie, rysy nie były generowane przez każdy z poprzecznych prętów zbrojenia.

Można również zauważyć, że wartość średniego rozstawu rys wyznaczona zgodnie z zależnościami zawartymi w Eurokodach, jest o 35% ÷ 37% większa niż wartości pomierzone. Potwierdza to jedynie, że przedstawione w normie [28, 40] propozycje pozwalające obliczeniowo ująć zarysowanie płyty betonowej w strefie momentu ujemnego na trwałość konstrukcji wciąż wymagają dalszych uściśleń i weryfikacji doświadczalnych, zwłaszcza w kontekście belek ciągłych w warunkach eksploatacyjnych.

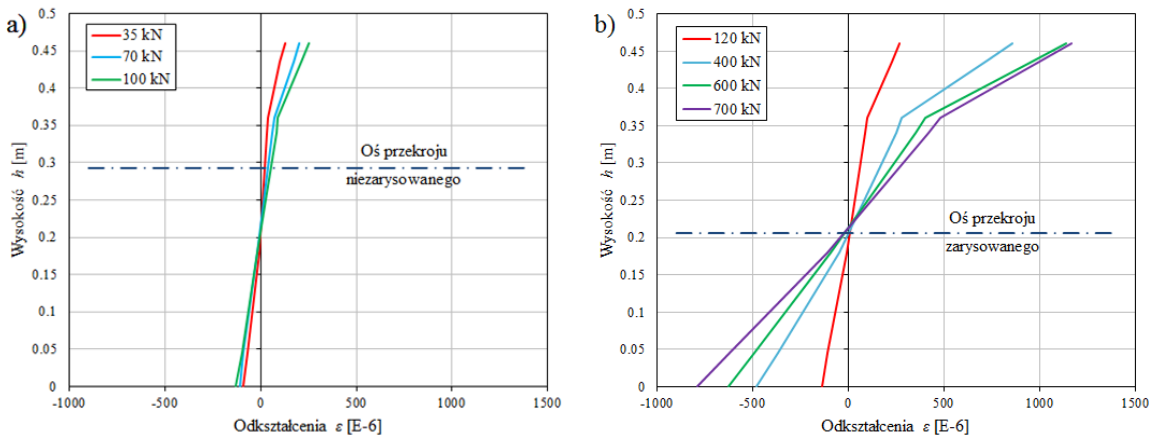
2.4.2. Wyniki odkształceń (naprężeń)

Czujniki tensometryczne, wykorzystane do kontroli zbieżności wyników, rozmieszczono symetrycznie względem osi dźwigara. Uzyskane wyniki przedstawiono w formie wykresów. W przypadku każdego badanego elementu wyznaczono średnią wartość odkształceń przy danej sile obciążającej.

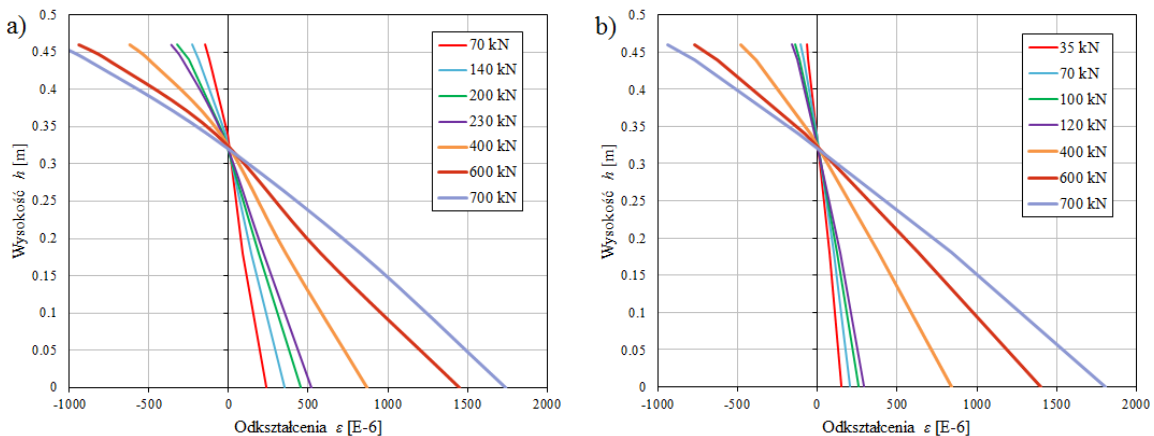
Wyniki odkształceń potwierdzają dobrą zbieżność między poszczególnymi elementami badawczymi (Rys. 5, Rys. 6, Rys. 7). Wszystkie belki w trakcie badań, przy zastosowanych wartościach obciążeń eksploatacyjnych pracowały w pełnym zakresie sprężystym – maksymalne wartości odkształceń nie przekroczyły 1800E-6. Otrzymane pomiary wartości odkształceń pozwoliły również na określenie rzeczywistego położenia osi obojętnej.



Rys. 5. Rozkład odkształceń w przekroju podporowym belki B1: a) przed zarysowaniem, b) po zarysowaniu



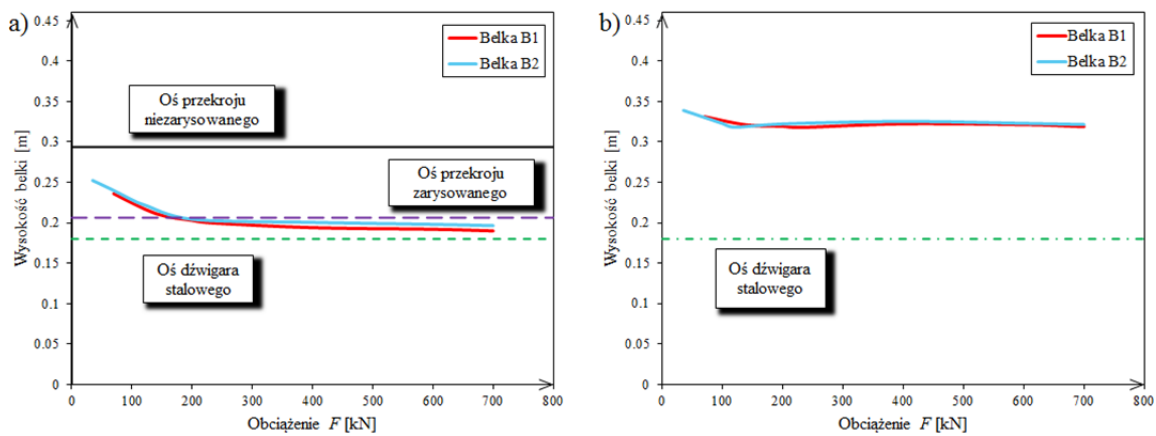
Rys. 6. Rozkład odkształceń w przekroju podporowym belki B2: a) przed zarysowaniem, b) po zarysowaniu



Rys. 7. Rozkład odkształceń w przekroju przęsłowym: a) belka B1, b) belka B2

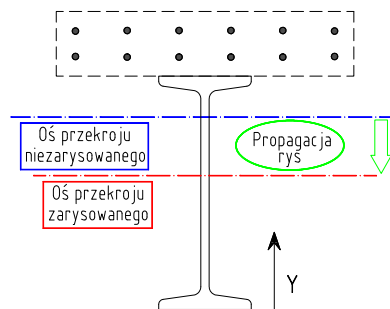
We wszystkich badanych belkach w przekroju przęsłowym, w początkowych fazach obciążenia (siły 70 kN do 230 kN w belce B1 i siły od 35 kN do 120 kN w belce B2) nastąpiło stopniowe obniżenie położenia osi obojętnej a następnie jej stabilizacja na poziomie około 320 mm. Z kolei w przypadku przekroju podporowego obniżenie położenia osi obojętnej nastąpiło w całym zakresie przyjętego obciążenia. Przy niskich wartościach

przyłożonych sił zjawisko to postępowało szybko natomiast po osiągnięciu siły wywołującej zarysowanie płyty zaobserwowano, że przesunięcie osi obojętnej w kierunku osi przekroju zarysowanego zaczęło postępować stopniowo (Rys. 8).



Rys. 8. Zmiana położenia osi obojętnej: a) przekrój A-A, b) przekrój B-B

Rzeczywiste położenie osi obojętnej przekroju zespolonego znajduje się więc między wyznaczonymi osiami przekroju nie zarysowanego oraz zarysowanego. W momencie pojawiania się nowych rys, oś obojętna przesuwa się ku osi obojętnej przekroju z ustabilizowanym zarysowaniem (Rys. 9).



Rys. 9. Wpływ zarysowania płyty na zmianę położenia osi obojętnej w przekroju podporowym

Wykorzystując pomierzone wielkości odkształceń w przekroju określono lokalną krzywiznę badanych elementów, co w konsekwencji pozwoliło ustalić sztywność przekroju.

W analizie zachowania stalowo-betonowych belek zespolonych możemy posługiwać się jedynie sztywnością chwilową. Wynika to w szczególności ze zmieniających się w trakcie eksploatacji właściwości betonu w zależności od stopnia jego wyężenia oraz podatności więzów łączących część stalową i betonową.

Wychodząc ze znanej zależności między sztywnością chwilową B a krzywizną χ :

$$\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{B}, \quad (1)$$

gdzie:

ρ – promień krzywizny,

i relacji, które zachodzą między momentem zginającym M a naprężeniem σ :

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{J}, \quad (2)$$

gdzie:

J – geometryczny moment bezwładności efektywnego przekroju zespolonego, oraz naprężeniem σ a odkształceniem ε :

$$\sigma = \varepsilon \cdot E, \quad (3)$$

gdzie:

E – moduł sprężystości podłużnej, wartość krzywizny lokalnej wyznaczono z:

$$\chi = \frac{\varepsilon}{y}, \quad (4)$$

gdzie:

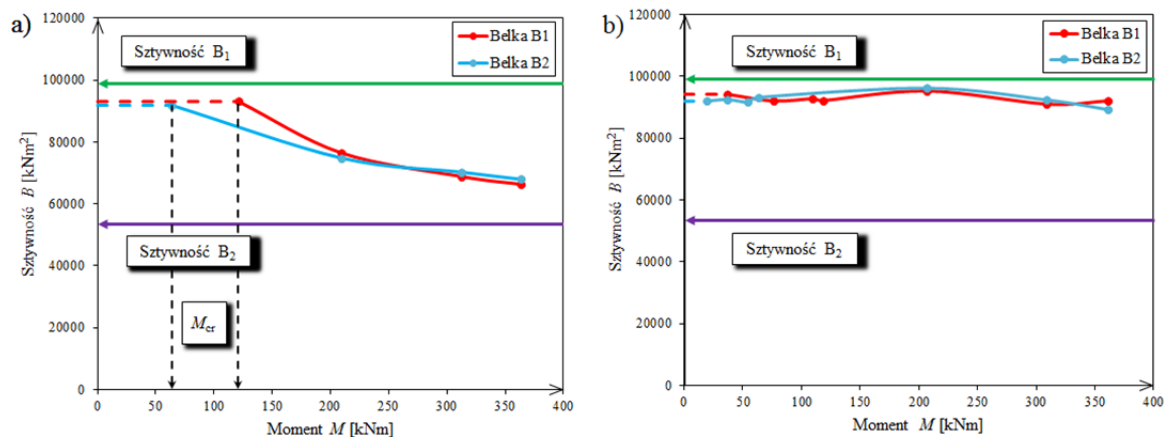
ε – odkształcenia danych włókien przekroju,

y – odległość miejsca pomiaru odkształceń od osi obojętnej przekroju.

Sąd też lokalną sztywność (chwilową) belki oszacowano jako:

$$B = \frac{M}{\chi}, \quad (5)$$

którą pokazano w funkcji momentu zginającego na Rys. 10.



Rys. 10. Sztywność chwilowa badanych elementów: a) przekrój podporowy, b) przekrój przęsłowy

Oprócz rzeczywistych, zmierzonych wartości, na wykresach naniesiono również wartości obliczone przy założeniu, że sztywność:

- jest równa sztywności zastępczego przekroju stalowego, w którym przekrój betonowy został zastąpiony ekwiwalentnym przekrojem stalowym (B_1),
- jest równa sztywności równoważnego przekroju stalowego (kształtownika i zbrojenia płyty betonowej) (B_2).

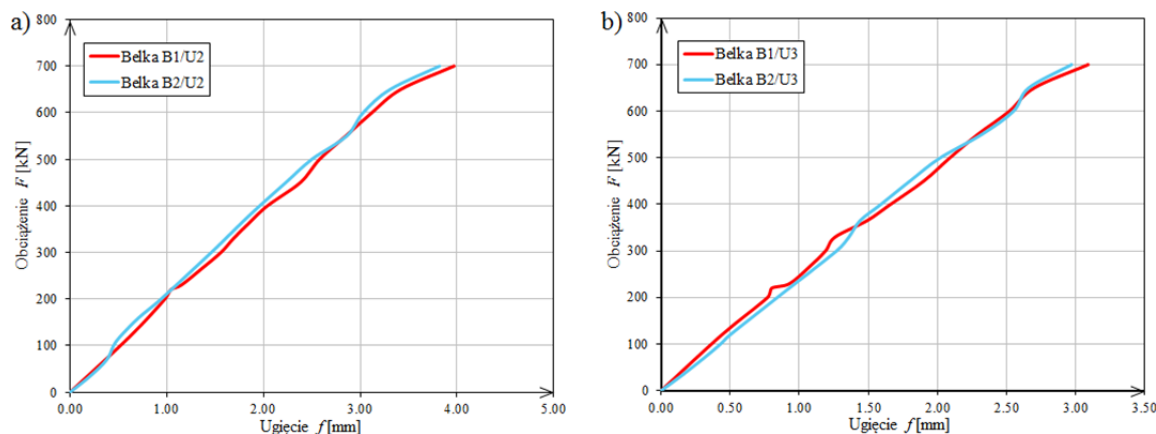
Analiza uzyskanych rezultatów wskazuje, że w zakresie odkształceń sprężystych (stan eksploatacyjny rozpatrywanego układu) wpływ nieliniowości związku $\sigma - \varepsilon$ betonu na sztywność przekrojów zespolonych ze ścisnącą płytą betonową jest nieznaczny (przy 2-procentowym stopniu uzbrojenia płyty, który występował w badanych elementach wpływ ten jest pomijalny) i tym samym nie powodują redystrybucji momentów zginających w belce ciąglej.

W przypadku przekrojów z płytą rozciąganą do chwili powstania pierwszej rysy lokalna krzywizna (sztywność) belki jest w przybliżeniu równa sztywności „pełnego przekroju” zespolonego, tj. sztywności z uwzględnieniem współpracy płyty betonowej i zbrojenia. Wyraźny spadek sztywności zaobserwowano wraz z pojawieniem się pierwszej rysy

(gwałtowny wzrost krzywizny). Względna sztywność belki w stosunku do przekroju stalowego zmniejszała się wraz ze wzrostem wyężenia belek.

2.4.3. Wyniki ugięć (przemieszczeń)

Ugięcia belek mierzono w dwóch punktach, w miejscu przyłożenia obciążenia zewnętrznego. Ponadto w osi podłużnej belki, nad każdą podporą dokonywano odczytu przemieszczeń pionowych. Porównanie średnich wartości uzyskanych ugięć każdej badanej belki w funkcji przyłożonej siły przedstawiono na Rys. 11.



Rys. 11. Ugięcie belek w miejscu przyłożenia obciążenia: a) przęsło 1, b) przęsło 2

Na podstawie analizy przemieszczeń dźwigara stalowego stwierdzono, iż ścieżki równowagi statycznej wykazywały wyraźnie liniowe zachowanie w zakresie obciążenia eksploatacyjnego. Dodatkowo w trakcie badań zaobserwowano, że powstawanie kolejnych rys powoduje występowanie zaburzenia lokalnych krzywizn i gwałtowne ich zmiany.

Przeprowadzone badania doświadczalne dowiodły, że na skutek współdziałania betonu rozciąganego ze zbrojeniem na odcinkach między rysami, średnia sztywność na odcinku zarysowanym przyjmuje wartość pośrednią między sztywnością obliczoną z uwzględnieniem betonu i stali a sztywnością przekroju obliczonego z całkowitym pominięciem współpracy betonu. Zaobserwowano również znacznie szybsze przyrosty ugięć niż przed zarysowaniem. Oznacza to, że pomijanie tego zjawiska w dotychczasowej praktyce projektowej powodowało znaczne zaniżenie teoretycznej trwałości i obliczeniowej sztywności konstrukcji mostu.

Właściwe ujęcie zarysowania w projektowaniu jest istotne zwłaszcza w przypadku podniesienia wykonawczego, ale problem ten dotyczy także pewnych sprawdzeń w stanie granicznym nośności. Przykładem jest analiza zmęczeniowa [8, 9]. Ponadto efekt usztywnienia przy rozciąganiu, powodując przesunięcie w górę osi bezwładności w pełni zarysowanego przekroju podporowego belki zespolonej w klasie czwartej, może powodować obniżenie niezawodności konstrukcji poprzez zmiany układu naprężeń w środku i problemy ze statecznością smukłego środka.

3. Model numeryczny badanej belki zespolonej

Poprawne modelowanie dźwigarów zespolonych [14] poddanych oddziaływaniom eksploatacyjnym, w których płyta betonowa jest rozciągana stanowi zadanie trudne i do tego bardziej złożone niż w przypadku płyty ściśkanej [31]. Wynika to w dużej mierze z problematyczności w szacowaniu sztywności żelbetowej części elementu rozciąganego, w tym dotyczących określenia współpracy rozciąganego betonu ze zbrojeniem [37]. W analizie dotyczy to przede wszystkim oszacowania:

- momentu inicjującego proces zarysowania,
- zmian sztywności przy zwiększającym się wyężeniu przekroju.

Dodatkowym problemem, w analizie numerycznej takiego modelu jest sposób wprowadzania zespolenia części stalowej i betonowej przekroju oraz opis mechanizmu uszkodzenia rozciąganej płyty betonowej [15, 42].

Ze względu na złożoność rozpatrywanych zagadnień dotyczących przede wszystkim mechaniki betonu [11], a związanych z nieliniowością problemu, wszystkie zadania obliczeniowe, zostały rozwiązane w programie Abaqus [1], który pozwala na uwzględnienie wszystkich nieliniowych efektów (przyrostowo-iteracyjną metodą Newtona-Raphsona) wpływających zarówno jakościowo, jaki i ilościowo na wyniki. Istnieje kilka podstawowych źródeł nieliniowości, między innymi nieliniowość fizyczna, geometryczna czy wynikająca ze zmiennych w procesie warunków brzegowych. W pracy skupiono się głównie na nieliniowości fizycznej opisującej beton. Wszystkie symulacje numeryczne, jakie zostały przeprowadzone, uwzględniają ponadto nieliniowości geometryczne związane z dużymi deformacjami. Została również wzięta pod uwagę nieliniowość warunków brzegowych związana w szczególności z kontaktem.

3.1. Założenia do modelu numerycznego

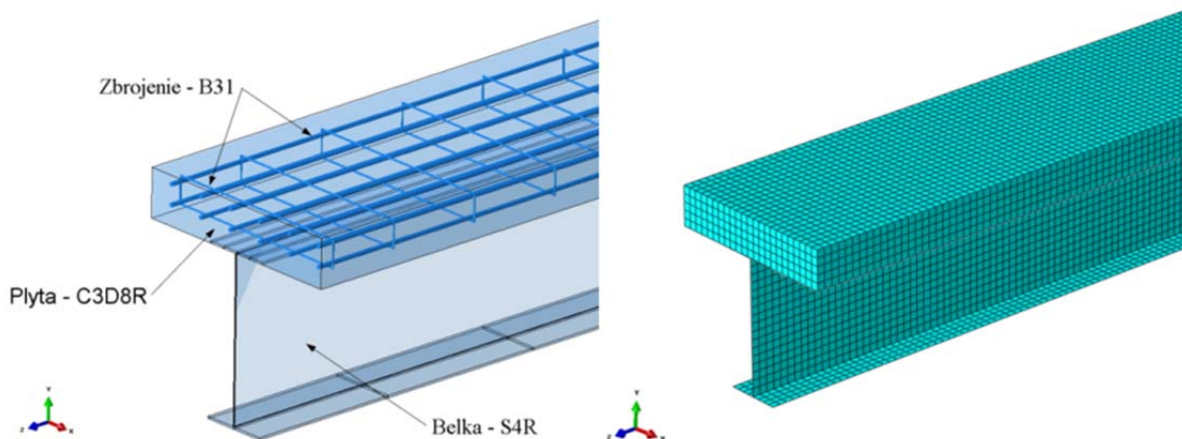
Uproszczenia są nierozłącznie związane z każdym modelem obliczeniowym, a zwłaszcza numerycznym, aproksymującym rzeczywistą konstrukcję. Stąd też w obliczeniach numerycznych przyjęto następujące założenia:

- zastosowano model betonu plastycznego ze zniszczeniem CDP (Concrete Damage Plasticity),
- beton zbrojony przenosi naprężenia rozciągające także po zarysowaniu [37],
- stal spełnia wymagania materiału liniowo – sprężysto – plastycznego,
- zbrojenie (pręty podłużne i strzemiona) zamodelowano w sposób dyskretny, wprowadzając je jako elementy osadzone typu *embedded* w płycie belki będącej elementem typu *host*,
- zastosowano takie samo obciążenie jak podczas badań eksperymentalnych (dwie siły skupione, które przyłożono do węzłów siatki na płycie).

3.2. Modele geometryczne

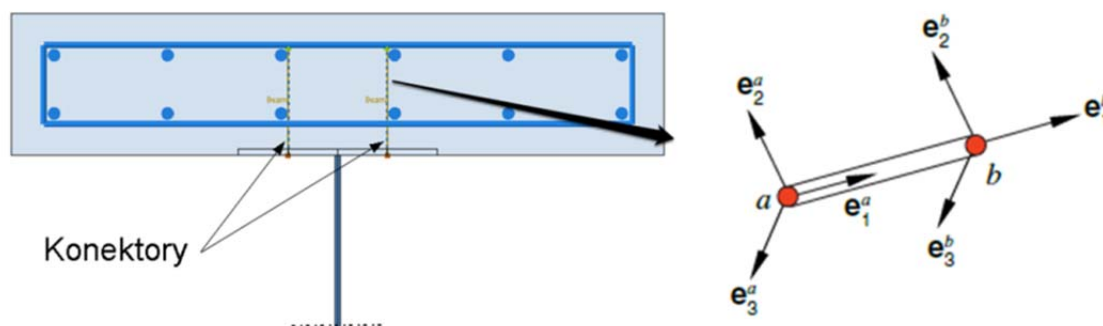
Ze względu na specyfikę modelowanej konstrukcji, która składa się z dwóch różnych materiałów o wyraźnie innej geometrii, do modelu wprowadzono odmienne rodzaje elementów skończonych, najlepiej opisujące składowe belki. Stąd też poszczególne części zamodelowano za pomocą (Rys. 12):

- ośmiowęzłowych elementów bryłowych o zredukowanym całkowaniu (C3D8R): płyta betonowa,
- czterowęzłowych elementów powłokowych o zredukowanym całkowaniu (S4R): dwuteownik walcowany,
- dwuwęzłowych liniowych elementów belkowych (B31): pręty zbrojenia głównego oraz strzemiona.



Rys. 12. Model MES i dyskretyzacja analizowanej belki

Zespolenie płyty betonowej z górną półką belki stalowej zróżnicowano, w zależności od rozkładu momentów zginających na długości belki (Rys. 3). Stąd też w strefie rozciąganej zespolenie zamodelowano jako połączenie dyskretne odwzorowujące występowanie w elementach poddanych badaniom laboratoryjnym sztywnych łączników. Wykorzystano do tego specjalne elementy, tzw. konektory, które pozwalają połączyć w sposób dyskretny (punkt do punktu), fizycznie ze sobą dwa różne odkształcalne elementy przy tym odwzorowując typ złączy i zachowanie łączników. Użyty typ połączenia *beam* zapewnił sztywne połączenie (o nieskończonej sztywności na zginanie i ścinanie) między dwoma węzłami, z których jeden był węzłem siatki górnej półki stalowej a drugi węzłem siatki płyty betonowej (Rys. 13). Dodatkowo zdefiniowano powierzchnie kontaktowe między półką górną belki stalowej i płytą betonową, przyjmując współczynnik tarcia równy $\mu=0.5$ [15].



Rys. 13. Widok zamodelowanego połączenia typu: *beam*

Z kolei w strefach momentów dodatnich gdzie płyta była ściskana uwzględniono pełne zespolenie górnej powierzchni belki stalowej z dolną powierzchnią płyty żelbetowej za pomocą połączenia „ciągłego” (typu *tie*).

3.3. Modele materiałowe

W celu odwzorowania w analizach numerycznych zachowania belek poddanych obciążeniom eksploatacyjnym, konieczne było opisanie zależności naprężenie-odkształcenie betonu ściskanego i rozciąganego [38] oraz stali.

W modelowaniu betonu wykorzystano model betonu plastycznego ze zniszczeniem CDP (Concrete Damage Plasticity), służący do kompleksowego modelowania betonu zarówno w strefie ściskania, jak i rozciągania, w złożonym stanie naprężenia [1, 4]. Model ten zawiera kombinację niestowarzyszonej plastyczności ze wzmocnieniem oraz skalarnego izotropowego zniszczenia sprężystego do określania nieodwracalnych zmian powstałych

podczas procesu cyklicznego obciążania i odciążania (Rys. 14). Model CDP opiera się na plastyczno-kruchym modelu degradacyjnym stworzonym przez Lublinerera oraz zespół [21, 25] i udoskonalanym później przez Lee i Fenves'a [18].

Aby opisać model betonu CDP należało określić kilka parametrów materiałowych. Część z nich otrzymano z badań wytrzymałościowych (Tabela 2), a część wynikała z założeń teoretycznych. Model CDP opisują [1]:

- β – kąt tarcia wewnętrznego betonu; kąt nachylenia asymptoty hiperbolicznej powierzchni Druckera-Pragera (jako powierzchni potencjału plastycznego) do osi hydrostatycznej, mierzony w płaszczyźnie południkowej; zgodnie z [4] parametr ten przyjmuje się w przypadku betonów zwykłych najczęściej równy 36° ,
- ϵ – mimośrodowość potencjału plastycznego; niewielka dodatnia wartość, która charakteryzuje prędkość zbliżania się hiperboli potencjału plastycznego do jego asymptoty; wyznaczana jako iloraz wytrzymałości betonu na rozciąganie do wytrzymałości na ściskanie,
- f – liczba określająca iloraz granicznego naprężenia ściskającego w stanie dwuosiowym do granicznego naprężenia ściskającego w stanie jednoosiowym; parametr ten określa się na podstawie krzywej Kupfera,
- K_c – parametr określający kształt powierzchni potencjału plastycznego na płaszczyźnie dewiatorowej; kształt powierzchni granicznej w płaszczyźnie dewiatorowej nie jest okręgiem, ale zależy od trzeciego niezmiennika stanu naprężenia; zgodnie z [1] parametr ten przyjmuje się z reguły jako równy 0.666,
- μ – parametr wiskotyczny, który pozwala niewiele przekroczyć powierzchnię potencjału plastycznego w niektórych, wystarczająco małych krokach zadania (służy do regularyzacji równań konstytutywnych); idea regulacji wiskoplastycznej polega na takim doborze parametru ($\mu > 0$), aby stosunek kroku czasowego zadania do wartości μ dążył do nieskończoności.

Pozostałe parametry definiujące model CDP zostały zidentyfikowane z jednoosiowych badań ściskanego betonu. Z tych badań określono wzmocnienie izotropowe podczas ściskania, izotropowe osłabienie oraz izotropowe zniszczenie podczas rozciągania.

Model CDP wykorzystuje koncepcje izotropowego zniszczenia sprężystego w połączeniu z izotropową plastycznością przy rozciąganiu i ściskaniu. Zawiera kombinacje niestowarzyszonej plastyczności ze wzmocnieniem oraz skalarnego izotropowego zniszczenia sprężystego do określania nieodwracalnych zmian powstałych podczas procesu obciążenia. Powierzchnia płynięcia modelu w obszarze dwuosiowego ściskania jest reprezentowana przez klasyczny warunek plastyczności Druckera-Pragera.

W modelu CDP zakłada się, że dwa główne mechanizmy zniszczenia to zarysowanie wskutek rozciągania i zmiżdżenie betonu wskutek ściskania. Rozwój powierzchni płynięcia jest opisany przez dwie zmienne wartości $\bar{\epsilon}_c^{pl}$ i $\bar{\epsilon}_t^{pl}$ związane z mechanizmami zniszczenia, a dokładniej z przyrostami efektywnych odkształceń plastycznych przy ściskaniu i rozciąganiu (Rys. 14):

$$\bar{\epsilon}_c^{pl} = \bar{\epsilon}_c^{in} - \frac{d_c}{(1-d_c)} \cdot \frac{\sigma_c}{E_0}, \quad (6)$$

$$\bar{\epsilon}_t^{pl} = \bar{\epsilon}_t^{ck} - \frac{d_t}{(1-d_t)} \cdot \frac{\sigma_t}{E_0}, \quad (7)$$

gdzie:

$\bar{\epsilon}_c^{in}$ – odkształcenia niesprężyste betonu ściskanego,

$\bar{\epsilon}_t^{ck}$ – odkształcenia rysujące,

σ_c – naprężenia ściskające w betonie,

σ_t – naprężenia rozciągające w betonie,

E_0 – początkowy moduł sprężystości betonu niezniszczonego.

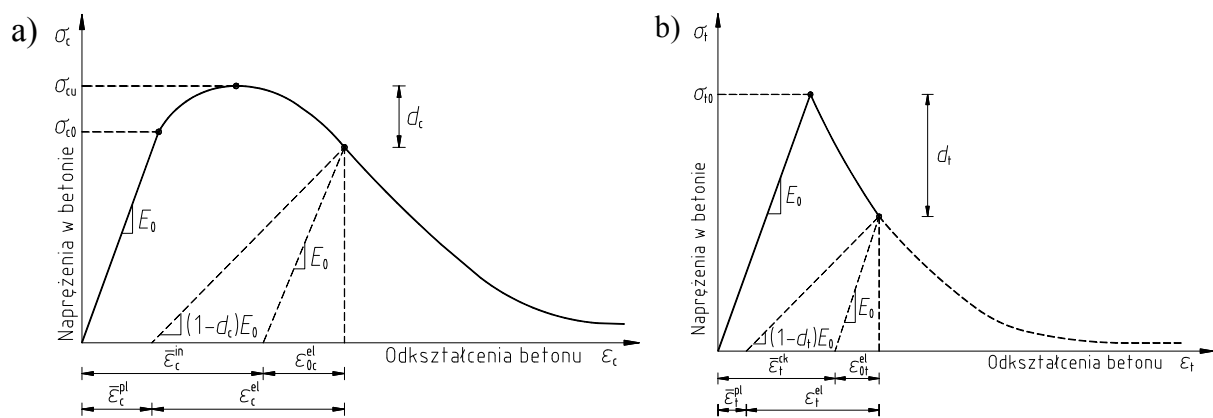
Zmienne te kontrolują rozwój powierzchni płynięcia, jak również rozwój degradacji sztywności sprężystej materiału. Proces redukcji sztywności materiału zwany degradacją sprężystą rozpoczyna się w wypadku osiągnięcia przez ścieżkę naprężenia powierzchni plastyczności. Degradacja sprężysta betonu jest określona przez dwie zmienne skalarnej degradacji sztywności d_c (ściskanie):

$$d_c = d_c(\bar{\varepsilon}_c^{pl}, f_i) \text{ gdy } 0 \leq d_c \leq 1, \quad (8)$$

i d_t (rozciąganie):

$$d_t = d_t(\bar{\varepsilon}_t^{pl}, f_i) \text{ gdy } 0 \leq d_t \leq 1, \quad (9)$$

będące niemalejącymi funkcjami odkształceń plastycznych (Rys. 14). Zmienne degradacji przyjmują wartość od 0 w przypadku materiału niezniszczonego, do 1, co odpowiada z kolei całkowitej utracie zdolności w przenoszeniu naprężeń.



Rys. 14. Prawa fizyczne betonu: a) ściskanie, b) rozciąganie

Stal z kolei zamodelowano jako ciało liniowo – sprężysto – plastyczne o parametrach uplastycznienia określonych w Tabeli 1. W trakcie badań laboratoryjnych, w przyjętym zakresie obciążeń eksploatacyjnych nie nastąpiła utrata stateczności geometrycznej dodatkowo wstępne analizy zachowania elementu badawczego wykazały, że nie ma potrzeby definiować plastycznego wzmocnienia materiału.

Oprócz tego model ciała sprężysto-plastycznego dobrze odwzorowuje zachowanie się zwykłej stali i jest najczęściej wykorzystywany w klasycznej teorii plastyczności oraz przy obliczaniu nośności granicznej.

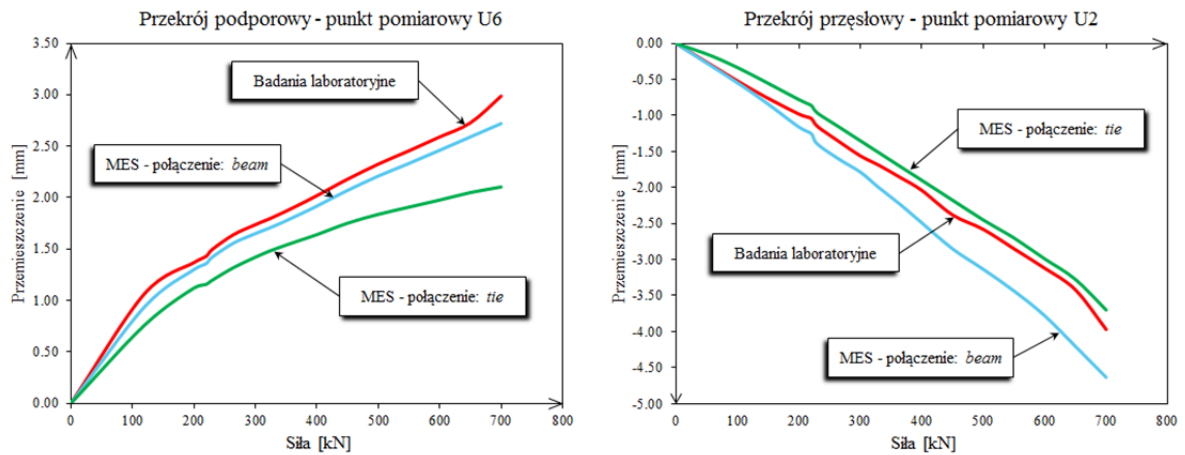
Problemy związane z uzyskaniem zbieżności rozwiązania spowodowane nieliniowością modelu materiału rozwiązano za pomocą stabilizacji wiskotycznej. Zmniejszono również rozmiar przyrostu obciążenia ($0.01 \div 1E-12$) oraz zwiększono maksymalną liczbę kroków obciążenia (max 12000) podczas rozwiązywania zadania z wykorzystaniem podejścia Newtona-Raphsona. Doboru parametru μ , dokonano iteracyjnie po analizie jak duży ma on wpływ na otrzymane wyniki zadania. Ostatecznie przyjęto $\mu=0.0001$ co pozwoliło rozwiązać zadanie w ponad 1200 przyrostach obciążenia utworzonych w około 4000 iteracji. Z analizy zachowania elementu badawczego wynika, że taka wartość parametru wiskotycznego pozwala na zachowanie kompromisu między wielkością obliczeniową zadania a dokładnością otrzymanych wyników.

3.4. Wyniki analiz numerycznych

Poprawność założeń modelu MES zweryfikowano zestawiając w formie graficznej na wykresach określone parametry eksploatacyjne otrzymane z analiz numerycznych z wynikami

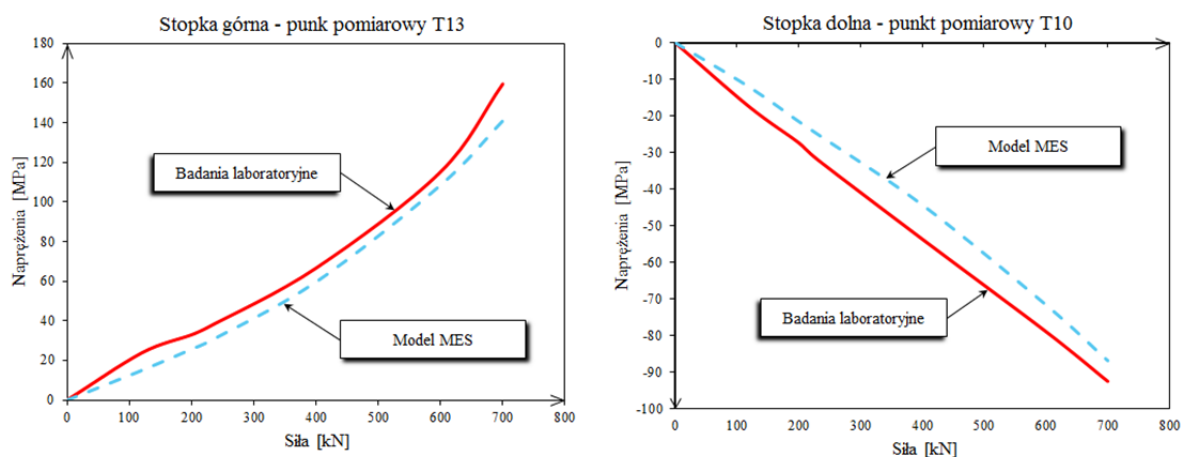
3.4.2. Analiza przemieszczeń i rozkładu naprężeń normalnych

Weryfikację modelu numerycznego przeprowadzono opierając się o zestawienie uzyskanych przemieszczeń badanych belek i modelu numerycznego (Rys. 17), a także rozkładu naprężeń w badanych belkach i modelu numerycznym (Rys. 18, Rys. 19).

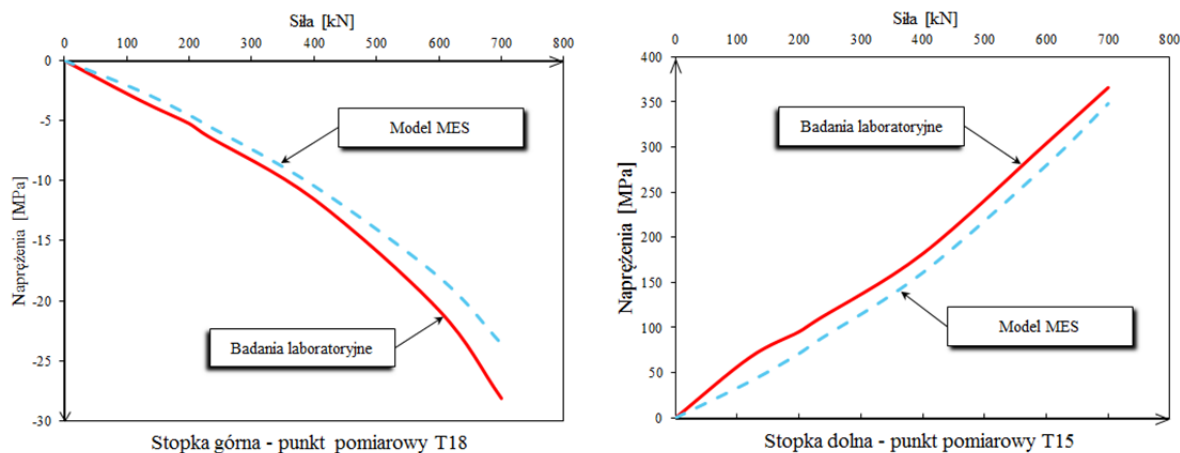


Rys. 17. Porównanie przemieszczeń pionowych belki pomierzonych i obliczonych przy różnym sposobie modelowania zespolenia

Na przedstawionym wykresie widać również, że różnica między sztywnością belki w eksperymencie i sztywnością modelu numerycznego jest zbliżona do siebie. Potwierdza to prawidłowy dobór w modelu betonu zmiennych degradacji d (w szczególności d_t). Ponadto wskazuje, że w przypadku belek ciągłych w których mamy strefy z płytą rozciąganą dobre odwzorowanie daje zespolenie przy wykorzystaniu połączenia punktowego płyty betonowej z dźwigarem stalowym, a więc model zespolenia odwzorowujący wiernie rzeczywiste zespolenie. Natomiast w strefach, w których płyta betonowa jest ściskana, lepsze odwzorowanie zachowania badanej belki można uzyskać stosując pełne zespolenie za pomocą połączenie „ciągłego” [15].



Rys. 18. Porównanie wielkości naprężeń belki stalowej w przekroju podporowym – połączenie dyskretne



Rys. 19. Porównanie wielkości naprężeń belki stalowej w przekroju przęsłowym – połączenie „ciągłe”

Analiza porównawcza wskazuje również, na dobrą zgodność otrzymanych wyników badań eksperymentalnych i numerycznych a także ogólną zgodność modelu obliczeniowego z założeniami dotyczącymi hipotez wytrzymałościowych materiału oraz przyjętymi kryteriami trwałości.

Zbudowany model numeryczny może stanowić więc bardzo efektywne narzędzie, pozwalające modelować konstrukcje mostów zespolonych, zarówno drogowych jak i kolejowych bliższe rzeczywistości, co w znacznym stopniu może usprawnić proces projektowania. Dodatkowo też umożliwia poszukiwania nowatorskich rozwiązań konstrukcyjnych tym bardziej, że w najbliższej przyszłości należy spodziewać się pojawienia w budownictwie nowych form konstrukcji zespolonych z dużym udziałem betonu w przekroju zespolonym gdzie zagadnienie modelowania zarysowania i jego wpływu na trwałość oraz właściwości eksploatacyjne będzie bardzo istotne.

4. Podsumowanie

Obecnie na etapie wymiarowania konstrukcji zespolonych statycznie niewyznaczalnych nie uwzględnia się wpływu sztywności betonu rozciąganego (zarysowanego). Można powiedzieć, że jest to wielka rozrzutność, która w konsekwencji wpływa na błędne oszacowanie trwałości konstrukcji. Przeprowadzone badania doświadczalne oraz symulacje komputerowe dowiodły, że uwzględnienie sztywności betonu na odcinkach między rysami jest nie tylko nowoczesnym ale również bliskim rzeczywistości podejściem do oceny użyteczności konstrukcji. Rzeczywista sztywność przekrojów zespolonych jest o około 10% większa od obliczanej zgodnie z obecną praktyką inżynierską [22]. Z tego wynika, że trwałość wybudowanych do tej pory mostów zespolonych o ciągłych układach statycznych jest zaniżona. Daje to w efekcie niepotrzebne zwiększone zużycie stali konstrukcyjnej i zbrojeniowej.

Otrzymane wyniki badań, pozwalają sformułować następujące wnioski końcowe:

- Rzeczywiste położenie osi obojętnej przekroju zespolonego znajduje się między wyznaczonymi osiami przekroju nie zarysowanego oraz zarysowanego. W momencie pojawiania się nowych rys, oś obojętka przesuwa się ku osi obojętnej przekroju z ustabilizowanym zarysowaniem. Rozstaw rys zależy od rozkładu odkształceń w strefie rozciąganej, na który znaczący wpływ ma położenie osi obojętnej.
- Sztywność belek zespolonych z płytą rozciągną do chwili zarysowania jest praktycznie stała i w przybliżeniu równa sztywności obliczonej przy założeniu pełnej

współodkształcalności części stalowej i betonowej. Wyraźny spadek sztywności zaobserwowano wraz z pojawieniem się pierwszej rysy. Zmiany sztywności w przekroju z płytą ściskaną w zakresie odkształceń sprężystych (w zakresie obciążeń eksploatacyjnych) przy wzrastającym obciążeniu są niewielkie i tym samym nie powodują redystrybucji momentów zginających w belce ciągłej.

- Szczegółowa analiza belek zespolonych stalowo-betonowych z płytą rozciąganą (z określeniem pełnej ścieżki równowagi statycznej) możliwa jest do przeprowadzenia przy zastosowaniu metody elementów skończonych i algorytmów nieliniowej statyki. Badania określające cechy materiałowe, z których wykonano poszczególne elementy belek są niezbędne do ich prawidłowego zamodelowania.
- Właściwy opis betonu rozciąganego, uwzględniający jego zachowanie po zarysowaniu, ma duży wpływ na zgodność wyników analiz numerycznych z wynikami badań empirycznych. Wprowadzenie do analizy parametru uszkodzenia betonu przy rozciąganiu d_t umożliwia analizę zarysowania płyty na każdym poziomie obciążenia belki.
- Jednym z istotnych zagadnień modelowania zespolonej belki stalowo-betonowej jest przyjęcie modelu zespolenia – sposobu połączenia płyty betonowej z dźwigarem stalowym. Zastosowany sposób modelowania numerycznego betonowej płyty rozciąganej oraz jej połączenia z belką stalową pozwala w sposób precyzyjny określić poziom deformacji i uszkodzenia płyty rozciąganej na każdym poziomie obciążenia belki zespolonej. W przypadku belek ciągłych zachodzi konieczność różnicowania modelowania zespolenia części stalowej i betonowej, w zależności od rozkładu momentów zginających na długości belki.

Podziękowania: Autor pragnie podziękować firmie Gotowski Budownictwo Komunikacyjne i Przemysłowe Sp. z o.o. za nieodpłatne udostępnienie materiałów do badań. Badania laboratoryjne były współfinansowane w ramach środków statutowych Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego nr S-50/B/2012 oraz Młodej Kadry 2013.

Literatura

1. Abaqus User's Manual. Version 6.12, USA: Dassault Systèmes Simulia Corp, 2012.
2. Bavan M., Baharom S., Mutalib A.A., Osman S.A. Numerical prediction of composite beam subjected to combined negative bending and axial tension. *Journal of Engineering Science and Technology* 2013; 8(4): 428-447.
3. Biegus A., Lorenc W.: Development of shear connections in steel-concrete composite structures. *Civil and Environmental Engineering Reports* 2014, 15(4): 23–32.
4. Chen W.F. *Plasticity in reinforced concrete*. NYC: McGraw-Hill Book Company, 1982.
5. Chen S., Jia Y. Required and available moment redistribution of continuous steel–concrete composite beams. *Journal of Constructional Steel Research* 2008; 64(2): 167–175.
6. Chen S., Jia Y., Wang X. Experimental study of moment redistribution and load carrying capacity of externally prestressed continuous composite beams. *Structural Engineering and Mechanics* 2009; 31(5): 605–619.
7. Czudek H., Wysokowski A. *Twałość mostów drogowych*. Warszawa: Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, 2005.
8. Fan J., Nie J., Li Q., Wang H. Long-term behavior of composite beams under positive and negative bending. I: Experimental study. *Journal of Structural Engineering* 2010; 136(7): 849-857.

9. Fan J., Nie J., Li Q., Wang H. Long-term behavior of composite beams under positive and negative bending. II: Analytical. *Journal of Structural Engineering* 2010; 136(7): 858-865.
10. Gara F., Ranzi G., Leoni G. Design Expressions for the Effective Width of Composite Steel-Concrete Members. IABSE Symposium Report, IABSE Madrid Symposium: Engineering for Progress, Nature and People 2014; 161–168.
11. Godycki - Cwirko T. *Mechanika betonu*. Warszawa: Arkady, 1980.
12. Gómez Navarro M., Lebet J.-P. Concrete cracking in composite bridges: tests, models and design proposals. *Structural Engineering International* 2001; 11(3): 184-190.
13. He J., Liu Y., Chen A., Yoda T. Experimental study on inelastic mechanical behaviour of composite girders under hogging moment. *Journal of Constructional Steel Research* 2010; 66: 37–52.
14. Hernández H., Bonilla J., Rodríguez G. Study of the behavior of composite beams made of concrete and steel by using numerical simulation. *Revista ingeniería de construcción* 2014; 29(1): 5–21.
15. Jankowiak I., Madaj A. Stalowo-betonowy dźwigar zespolony z rozciąganą płytą betonową. *Inżynieria i Budownictwo* 2011; 12: 667–671.
16. Johnson R. P. *Composite Structures of Steel and Concrete: Beams, Slabs, Columns, and Frames for Buildings*. Malden: Third Edition, Blackwell Publishing, 2008.
17. Lebet J.-P., Gómez Navarro M.G. Influence of Concrete Cracking on Composite Bridge Behaviour. *Composite Construction in Steel and Concrete V* 2006: 77-86.
18. Lee J., Fenves G.L. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures. *Journal of Engineering Mechanics* 1998; 124(8): 892-900.
19. Lin W., Yoda T. Experimental and numerical study on mechanical behavior of composite girders under hogging moment. *Advanced Steel Construction an International Journal*. 2013; 9(4): 280–304.
20. Lin W., Yoda T., Taniguchi N., He Y. Mechanical Performance of Steel-Concrete Composite Beams Subjected to a Hogging Moment. *Journal of Structural Engineering* 2014; 140(1): 04013031/1-04013031/11.
21. Lubliner J., Oliver J., Oller S., Onate E. A plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures* 1989; 25(3): 299–326.
22. Łagoda M., Śledziewski K. Analiza mostowej konstrukcji stalowo-betonowej z płytą rozciąganą. *Materiały Budowlane* 2014; 4: 55-58.
23. Łagoda M., Śledziewski K. Praca stalowo-betonowej belki zespolonej z uwzględnieniem zarysowania płyty. *Budownictwo i Architektura* 2014; 13(2): 265-274.
24. Nakamura S., Momiyama Y., Hosaka T., Homma K. New technologies of steel/concrete composite bridges. *Journal of Constructional Steel Research* 2002; 58(1): 99-130.
25. Oller S., Onate E., Oliver J., Lubliner J. Finite element nonlinear analysis of concrete structures using a „Plastic-Damage model”. *Engineering Fracture Mechanics* 1990; 35(1/2/3): 219-231.
26. EN 1990:2002, Eurocode: Basic of structural design.
27. EN 1992-1-1:2004, Eurocode 2: Design of concrete structures, Part 1–1: General rules and rules for buildings.
28. EN 1994-2:2005, Eurocode 4: Design of composite steel and concrete structures, Part 2: General rules and rules for bridges.
29. EN 12390-3:2009, Testing hardened concrete, Part 3: Compressive strength of test specimens.

30. EN 12390-6:2009, Testing hardened concrete, Część 6: Tensile splitting strength of test specimens.
31. Prakash A., Anandavalli N., Madheswaran C.K., Rajasankar J., Laksh-manan N. Three Dimensional FE Model of Stud Connected Steel-Concrete Composite Girders Subjected to Monotonic Loading. *International Journal of Mechanics and Applications* 2011; 1(1): 1–11.
32. Ryu H.-K., Chang S.-U., Kim Y.-J., Kim B.-S. Crack control of a steel and concrete composite plate girder with prefabricated slabs under hogging moments. *Engineering Structures* 2005; 27(11):1613-1624.
33. Ryu H.-K., Kim Y.-J., Chang S.-P. Crack Control of a Continuous Composite Two-girder Bridge with Prefabricated Slabs under Static and Fatigue Loads. *Engineering Structures* 2007; 29(6): 851-864.
34. Sen R., Liby L., Mullins G. Strengthening steel bridge sections using CFRP laminates. *Composites Part B: Engineering* 2001; 32(4): 309-322.
35. Shin H.-S. Influence of tensile behaviour of slab on the structural behaviour of shear connection in composite beam subjected to hogging moment. *International Journal of Engineering Research and Development* 2015; 11(9): 6-15.
36. Szcześniak W., Karaś S. Trwałość obiektów mostowych. *Logistyka* 2015; 4: 5965-5973.
37. Śledziwski K. Praca stalowo-betonowej belki zespolonej z uwzględnieniem zarysowania płyty. Praca doktorska. Lublin: Politechnika Lubelska, 2016.
38. Tejchman J., Bobiński J. Continuous and Discontinuous Modelling of Fracture in Concrete Using FEM. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
39. Ugural A. C., Fenster S. K. Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity. Fifth Edition. New Jersey: Prentice Hall, 2011.
40. Vayas I., Iliopoulos A. Design of Steel-Concrete Composite Bridges to Eurocodes. Boca Raton: CRC Press, 2014.
41. Woyciechowski P., Adamczewski G. Kształtowanie trwałości betonowych konstrukcji mostowych. Warszawa: Wydawnictwo Polskiej Izby Inżynierów Budownictwa, 2014.
42. Wróblewski T., Pełka-Sawenko A., Abramowicz M., Berczyński S. Modeling and analysis of free vibration of steel-concrete composite beams by finite element method. *Advances in Manufacturing Science and Technology* 2012; 36(4): 85–96.