

WYKORZYSTANIE METODY MONTE CARLO DO OKREŚLENIA NIEPEWNOŚCI POMIARU MOCY OPTYCZNEJ EMITERA PÓLPRZEWODNIKOWEGO

Mateusz PROROK¹, Jarosław MAKAL²

1. Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny, Katedra Elektroenergetyki, Fotoniki i Techniki Świetlnej
tel.: 85 746 94-37 e-mail: m.prorok@doktoranci.pb.edu.pl
2. Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny, Katedra Elektrotechniki Teoretycznej i Metrologii
tel.: 85 746 93-96 e-mail: j.makal@pb.edu.pl

Streszczenie: W artykule przedstawiono sposób wykorzystania metody Monte Carlo do określenia przedziału ufności pomiaru w przypadku wyznaczania wartości mocy optycznej emitera półprzewodnikowego. Na podstawie niewielkiej serii (3-30) pomiarów wartości mocy optycznej w układzie świetlno-optycznym przeprowadzono analizę niepewności wg GUM (Guide Uncertainty Measurement), określając wartość niepewności rozszerzonej. Następnie, wykorzystując silnik matematyczny, przeprowadzono procedurę generacji próbek pomiarowych i wyznaczono przedział rozszerzenia. Na zakończenie, porównano obie metody obliczeniowe i przedstawiono wpływające z niego wnioski.

Słowa kluczowe: metoda Monte Carlo, niepewność pomiaru, rozkład normalny, generacja wyników pomiarowych.

1. WSTĘP

Symulacja Monte Carlo, jako narzędzie statystyczne, jest szeroko wykorzystywane nawet do rozbudowanych problemów inżynierskich, jak również w metrologii pomiarowej jako koncepcja probabilistycznego opracowania wyniku pomiaru [1]. Algorytmy do obliczeń takich zagadnień technicznych bazują na generowaniu liczb pseudolosowych (próbek). Ważne jest, aby proces ich powstawania był przypadkowy, niepowtarzalny oraz wzajemnie niezależny. Dokładność wyników symulacji zależy od ilości wygenerowanych danych losowych, możliwych do zainicjowania w różnych aplikacjach [2].

2. METODYKA POMIARÓW

2.1. Realizacja układu pomiarowego

Pomiar natężenia oświetlenia najczęściej realizowany jest za pomocą luxomierza. Głowica takiego przyrządu pomiarowego wyposażona jest w odpowiednie filtry dopasowujące czułość spektralną do krzywej czułości oka ludzkiego $V(\lambda)$. Na wynik pomiarowy duży wpływ ma stopień dokładności dopasowania absorpcji widmowej detektora [3]. Wymaganą czułość spektralną czujnika można również zrealizować poprzez odpowiednio dobrany aparat matematyczny, pełniący analogiczną rolę.

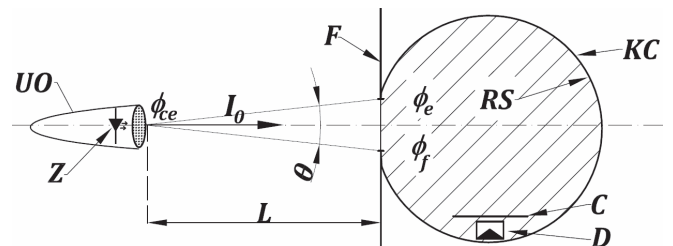
W analizowanym układzie pomiarowym wykorzystano spektrometr do pomiaru bezwzględnego rozkładu gęstości natężenia napromienienia [4]. Znajomość funkcji aproksymującej $V(\lambda)$, pozwala (po scałkowaniu) na obliczenie strumienia świetlnego (wzór 1) [5]. Analogicznie wyznaczenie mierzonej mocy optycznej polega na obliczeniu pola pod krzywą bezwzględnego rozkładu gęstości mocy w określonym przedziale (wzór 2).

$$\phi_f = K_m \int_{360}^{830} \frac{b}{40} G(\lambda) V(\lambda) d\lambda \quad (1)$$

$$\phi_e = \int_{360}^{830} \frac{b}{40} G(\lambda) d\lambda \quad (2)$$

gdzie: K_m – równoważnik mocy, b – nastawna stała czasowa całkowania pomiaru (ms), $G(\lambda)$ – gęstość mocy optycznej, $V(\lambda)$ czułość widmowa oka ludzkiego, λ – długość fali (nm)

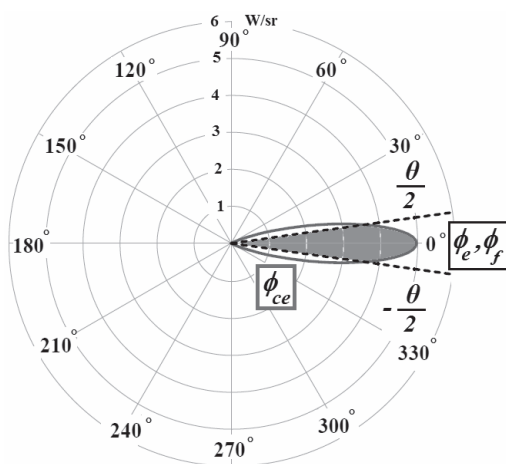
Analizowany układ świetlno-optyczny (rys.1) mierzy tylko promieniowanie emitowane w wąskim przedziale kątowym θ z powodu usytuowania źródła w pewnej odległości L od apertury detekcyjnej przyrządu (powierzchni wejściowej kuli całkującej).



Rys. 1. Schemat blokowy badanego układu pomiarowego gdzie: UO – układ kolimacyjny, Z – źródło, KC – kula całkująca, F – przysłona, C – przesłona, RS – warstwa odbijająca, I_0 – światłość osiowa emitera, L – odległość źródła od płaszczyzny pomiarowej, θ – kąt rozbieżności wiązki świetlnej docierającej do układu pomiarowego, D – detektor promieniowania
 ϕ_{ce} – całkowita moc optyczna źródła,
 ϕ_e, ϕ_f – mierzona moc promienista (strumień świetlny)

Niekorzystnym czynnikiem wpływającym na błąd pomiarowy w takim układzie odniesienia jest niejednorodna, pod względem zachowania stałości krzywej wskaźnikowej rozpraszania, wewnętrzna warstwa powierzchni kuli całkującej [6]. Dodatkowo, w zakresie barwy niebieskiej i nadfioletowej, wynik może być zawyżony w na skutek pasożytniczego oddziaływania zjawiska fotoluminescencji.

Odległość L emitera od powierzchni detekcyjnej ma decydujący wpływ na wartość mierzoną, która jest zależna od kąta θ akceptacji promieniowania. Rozsył przestrzenny mocy optycznej emitowanej z źródła półprzewodnikowego, wyposażonego w układ kolimacyjny, przedstawiono na rysunku 2. Fragment mierzonyj mocy promienistej ϕ_e docierającej do detektora ograniczono z premedytacją do ustalonego przedziału kąтового ($-\theta/2$ do $\theta/2$) zależnego od geometrii konstrukcji świetlnooptycznej.



Rys. 2. Skolimowany rozsył przestrzenny promieniowania z emitera półprzewodnikowego

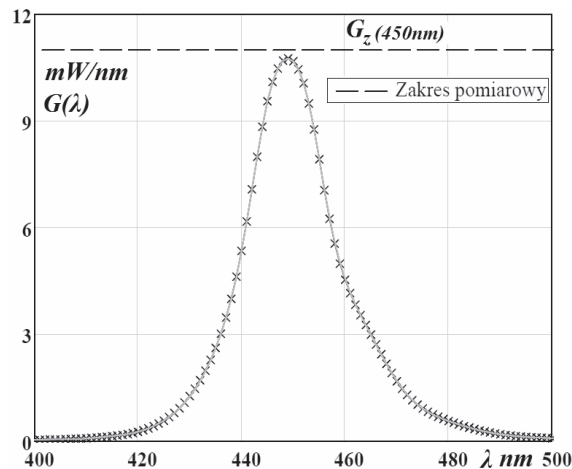
2.2. Proces pomiarowy

Wykonano serię pomiarów ($N = 5$) wartości mocy promienistej ϕ_e w stałych odstępach czasu ($t = 90$ s), przy wcześniejszym wprowadzeniu układu w stan równowagi termodynamicznej pomiędzy źródłem Z , a otoczeniem zewnętrznym. Wartością stabilizowaną była moc optyczna (strumień świetlny), poprzez utrzymanie prądu zasilającego o wartości (900 ± 2) mA. Otrzymana rodzina charakterystyk spektralnych szeregu pomiarów została dopasowana w taki sposób, że maksymalna wartość gęstości spektralnej dla fali 450 nm znajduje się poniżej punktu nasycenia detektora gdzie $G_z(450nm)$ określa maksymalny zakres pomiarowy (rys.3). Występują nieznaczne rozbieżności kształtu widm pomiędzy poszczególnymi pomiarami spektralnymi, jednak nie są one widoczne w prezentowanej skali i pokrywają się wzajemnie. Wielkością mierzoną była scałkowana numerycznie wartość charakterystyki widmowej, zestawiona w tabeli 1.

Tabela 1. Zestawienie wyników pomiarowych

Pomiar nr	ϕ_e (mW)	ϕ_f (lm)
ϕ_1	252,193	6,441
ϕ_2	252,240	6,390
ϕ_3	252,472	6,437
ϕ_4	252,071	6,414
ϕ_5	252,149	6,410

gdzie: ϕ_N – wartość N -tego pomiaru w serii.



Rys. 3. Bezwzględny rozkład gęstości mocy optycznej LED-a

Wartości wyników różnią się nieznacznie, lecz zaobserwowana rozbieżność pomiarów wynika z wpływu czynników losowych uczestniczących w procesie pomiarowym (tj. szum matrycy CCD, niestabilność prądu zasilającego, temperatura otoczenia, niestabilna odległość geometryczna L).

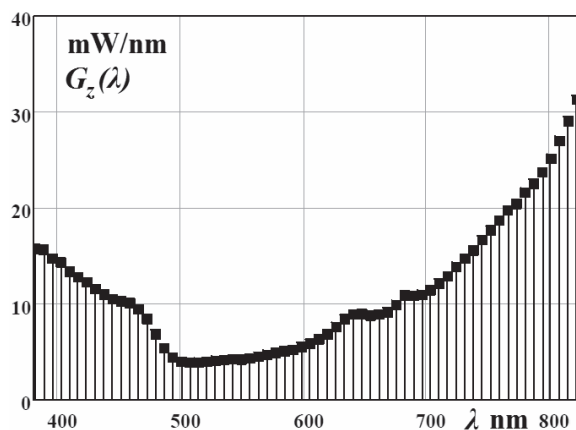
3. WYZNACZENIE NIEPEWNOŚCI POMIARU

Oszacowanie niepewności standardowej pomiaru metodą typu A przeprowadzono na podstawie obliczeń średniej wartości mocy z pięciu pomiarów (wzór 3) oraz wartości odchylenia standardowego eksperymentalnego, wykorzystując zależność (4).

$$\bar{\phi}_e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi_N \quad (3)$$

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\phi_N - \bar{\phi}_e)^2}{N(N-1)}} \quad (4)$$

Błąd graniczny pomiaru, z wykorzystaniem modułu przetwarzania cyfrowego, zdeterminowany jest niedokładnością reprezentacji sygnału analogowego dla skończonej elementarnej rozdzielczości dyskretnej. Wartość maksymalna gęstości spektralnej niesionego sygnału pomiarowego nie może przekraczać progu nasycenia $G_z(\lambda)$.



Rys. 4. Wartości progu nasycenia detektora dla całego zakresu przyrządu pomiarowego

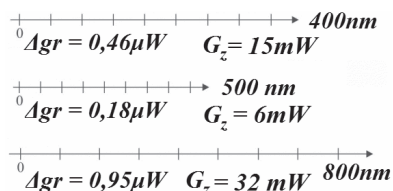
Wielkości pomiarowe rozkładu mocy promienistej muszą bezwzględnie znajdować się poniżej krzywej nasycenia detektora (rys.4).

Błąd wynikający ze wskazań przyrządu jest wg producenta spektrometri StellarNet.Inc tożsamy z błędem kwantyzacji sygnału przez wbudowany w urządzenie zintegrowany przetwornik analogowo-cyfrowy. Tym samym spodziewany błąd graniczny $\Delta_{gr}(\lambda)$ pomiaru dla badanego źródła monochromatycznego w przypadku dyskretnej długości fali pomiarowej obliczono z zależności (5).

$$\Delta_{gr}(\lambda) = 2 \frac{G_z(\lambda)}{2^{16}} \quad (5)$$

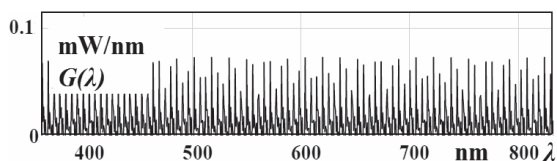
Wartość graniczna tego błędu wynika z cyfrowego procesu przetwarzania sygnału poprzez przetwornik A/C (o rozdzielczości 16 bitów) oraz względnej czułości detektora krzemowego matrycy CCD. Wartość ta zależna jest również od długości fali, ponieważ zakres pomiarowy $G_z(\lambda)$ matrycy światłoczułej zmienia się wraz z obszarem mierzonego spektrum promieniowania (rys.5). Wówczas najkorzystniejsze pasmo pracy przyrządu pomiarowego, biorąc pod uwagę dokładność, przypada dla $\lambda = 500$ nm.

W wyniku nieliniowości widmowej czujnika, poprzez zwiększenie przedziału obserwacji, powieleniu ulega również błąd graniczny, szczególnie niekorzystny dla fal z bliskiej podczerwieni (800 nm) oraz barwy niebieskiej.



Rys. 5. Wartość błędu granicznego w zależności od długości fali promieniowania monochromatycznego

Podczas pomiaru występuje szum biały matrycy CCD (rys.6), ponieważ znajduje się ona w temperaturze wyższej od zera bezwzględnego [4,5]. Przyjęto rozkład jednostajny wartości tego szumu, które zmieniają się dynamicznie dla każdej chwili czasu i wpływają na dokładność pojedynczego wyniku pomiaru.



Rys. 6. Graficzna reprezentacja szumu matrycy CCD

W przypadku emitera półprzewodnikowego (źródło quasi-monochromatyczne), którego widmo emisji leży w szerokim spektrum z przedziału ($\lambda_1 - \lambda_2$), jako oszacowanie błędu granicznego przyjęto sumę algebraiczną wszystkich elementarnych wartości błędów dyskretnych leżących w całym paśmie promieniowania badanego źródła światła, tj. 410 nm – 500 nm (wzór 6).

$$\Delta_{gp}(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{\lambda_1}^{\lambda_2} [\Delta_{gr}(\lambda)] \quad (6)$$

Wartość standardowej niepewności typu B została obliczona korzystając z zależności (7). Niepewność standardowa całkowita jest złożeniem niepewności typu A i niepewności typu B (8).

$$u_B = \frac{\Delta_{gp}(\lambda_1, \lambda_2)}{\sqrt{3}} \quad (7)$$

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \quad (8)$$

Tablica 2. Zestawienie obliczonej wartości średniej i wartości niepewności pomiarowych

Obliczenia	(mW)
średnia z serii pomiarów	252,2250
niepewność stand. typu A	0,0677
niepewność stand. typu B	0,0242
niepewność stand. całkowita	0,0719
niepewność rozszerzona ($k_p = 2,7765 \approx 2,8$ i $p = 95\%$)	0,1997
	$\sigma \approx 0,1$

Wykorzystując procedurę testowania hipotez statystycznych t-Studenta oszacowano ($\pm 2\sigma$) przedział niepewności rozszerzonej analizowanej serii pomiarów na poziomie ufności $p = 95\%$ (tabela 2) [1]. W przypadku złożenia rozkładu t-Studenta z rozkładem jednostajnym (wzór 7 oraz wzór 8) otrzymuje się rozkład tzw. płasko-normalny, dla którego opisywana metoda wyznaczenia współczynnika rozszerzenia jest nieuzasadniona. Z uwagi na prawie trzykrotną różnicę pomiędzy wartościami niepewności typu B i typu A, przyjęto arbitralnie $k_p = 2,8$ według tablic t-Studenta dla ($N-1$) stopni swobody. Ostatecznie wynik pomiaru zapisano następująco (9).

$$\hat{\phi}_e = (252,23 \pm 0,20) mW \text{ dla } k_p = 2,8 \text{ i } p = 95\% \quad (9)$$

4. SILNIK MATEMATYCZNY DO GENEROWANIA LOSOWYCH WARTOŚCI WYNIKÓW

Algorytm matematyczny generuje losowo wartości wyników pomiarowych na podstawie znajomości rozkładów prawdopodobieństwa oraz szerokości przedziałów niepewności standardowych, zachowując zadaną gęstość prawdopodobieństwa poszczególnych prób.

Nieznany wynik dokładny leży w wąskim przedziale, określonym poprzez złożenie rozkładu normalnego (rozzut wyników serii pomiarów) oraz rozkładu jednostajnego (błąd granicznego przyrządu pomiarowego).

W celu losowego wygenerowania wyników dużej serii pomiarów, utworzono macierz M o 265 kolumnach oraz n wierszach (n – założona liczba pomiarów generowanych numerycznie) (wzór 10). Poszczególne składowe elementy macierzy x przyjmowały losowe wartości w określonym przedziale o jednostajnym rozkładzie prawdopodobieństwa. Utworzone zostały one poprzez dostępną funkcję $rnd()$ w środowisku matematycznym *Mathcad*.

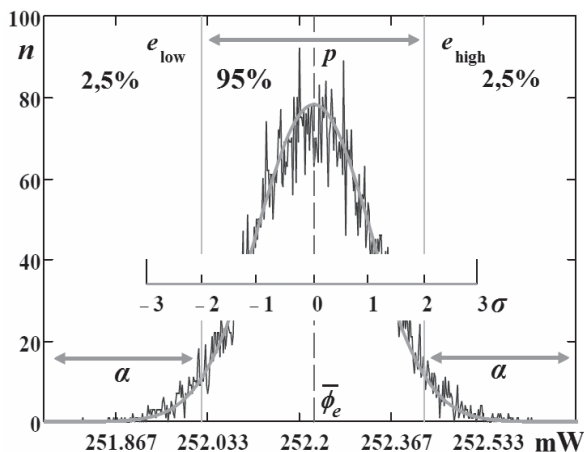
$$M^{n \times 256} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \dots & x_{1,256} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & \dots & x_{2,256} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & \dots & x_{3,256} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & x_{n,3} & \dots & x_{n,256} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$x \in <0, 1>$

Suma wartości wszystkich elementów dowolnego wiersza macierzy M przyjmuje wartości z przedziału od 0 do 256, jednak rozkład prawdopodobieństwa wartości tych sum będzie już rozkładem zbliżonym do rozkładu normalnego (przy liczbie wierszy $n > 10$). Im większa liczba wierszy macierzy M , tym funkcja rozkładu prawdopodobieństwa wartości wspomnianych sum silniej aproksymuje się do idealnego rozkładu normalnego. Założoną dokładność odwzorowania (wartość 256 próbek elementarnych) można zwiększyć, jednak przekłada się to znacząco na czas trwania realizacji algorytmu numerycznego. Dokonano losowego generowania wyników pomiarowych w pobliżu znanej średniej^(K) wraz z założonym odchyleniem $\sigma = 0,1$. Wynikowy model charakteryzował się złożeniem członu rozkładu normalnego^(H) i jednostajnego^(J) wyrażonych w równaniu poprzez sumę algebraiczną (11).

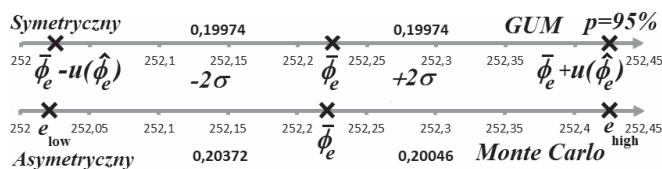
$$\phi_e(n) = \underbrace{\left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{256} x_{[n,i]} \right) - 128}{4,545} \right] \cdot \sigma}_H + \frac{\bar{\phi}_e}{K} + \underbrace{2\sqrt{3} \left(x_{[n,1]} - \frac{1}{2} \right) u_B}_J \quad (11)$$

Wyniki w postaci graficznej przedstawiono na rysunku 7. Określenie przedziału niepewności dla zadanego poziomu ufności $p = 95\%$ sprowadza się do posortowania częstości powtarzalności liczb w kolejności rosnącej (histogram). Ograniczono dwustronnie rozkład funkcji gęstości prawdopodobieństwa zakresem wyznaczonym przez kwantyle rzędu α i $\alpha + p$ (5% poziom istotności). Następnie obliczono wartość przedziału rozszerzenia, którego granice wynoszą ($e_{low} = 252,02$ mW, $e_{high} = 252,43$ mW), co stanowi ekwiwalentny obszar niepewności pomiarowej.



Rys. 7. Histogram wyników wygenerowanych numerycznie

Porównanie metody Monte Carlo dla $n = 10\,000$ w oszacowaniu przedziału niepewności względem rozkładu t-Studenta dla $N = 5$ pomiarów przedstawia ilustracja (rys.8).



Rys. 8. Zakresy przedziału niepewności obu metod obliczeniowych

5. WNIOSKI KOŃCOWE

Metoda Monte Carlo [7] znajduje zastosowanie do wyznaczania wyniku pomiaru oraz wartości przedziału niepewności na podstawie propagacji rozkładów wielkości wejściowych poprzez matematyczny model pomiaru wielkości mierzonej.

W opisanym przypadku zastosowano generator liczb losowych zaimplementowany w programie *Mathcad*. Przedstawiono uzyskany wynik w postaci histogramu względem gęstości prawdopodobieństwa wygenerowanych sztucznie serii danych pomiarowych.

Niestety, analizowana struktura matematyczna nie pozwala na zwiększenie liczby wartości pomiarów. Jednak wykorzystana metoda Monte Carlo umożliwia badanie zachowania modelu doświadczalnego, a tym samym w przybliżeniu i samego pomiaru. Uwzględniając również permanentną obecność oddziaływań przypadkowych scharakteryzowanych przez ściśle określone rozkłady prawdopodobieństwa zmiennych wejściowych.

6. BIBLIOGRAFIA

1. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, International Organization for Standardization, 1995.
2. Leśniewicz M.: Sprzętowa generacja losowych ciągów binarnych, WAT, Warszawa, 2009.
3. Fryc I.: Korekcja widmowa detektorów stosowanych w głowicach fotometrycznych, Przegląd Elektrotechniczny, 7/1997, s. 191 - 195.
4. Dybczyński W.: Miernictwo promieniowania optycznego, Wydawnictwo PB, Białystok, 1996.
5. Raport CIE 1989: The Measurement of Luminous Flux.
6. Tabaka P.: Analiza rozkładu przestrzennego światła odbitego od wybranych materiałów, Łódź, 2007.
7. Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the Guide to the expression of uncertainty in measurement – Propagation of distributions using a Monte Carlo method. BIPM JCGM 101:2008.

UTILIZATION OF MONTE CARLO METHOD FOR DETERMINING THE UNCERTAINTY OF SEMI-CONDUCTOR EMITTER'S OPTICAL POWER MEASUREMENT

Monte Carlo method, as the statistic device is widely used even in complex engineering problems and metrology, the algorithms used to evaluate these technical issues base on set of pseudorandom numbers. This paper contains of the way to use Monte Carlo method to generate any number of measurements. Basing on small series of optical power measurements (3-30) in the optical light system, the GUM (Guide Uncertainty Measurement) analysis was performed to estimate extended uncertainty range. Calculated parameter, connected with the final measurement result, specifying measurements scatter is boundary value for procedure initialization in mathematical engine. The method's usefulness is especially noticeable in case of artificial widening measurements number, which preserve their characteristic normal distribution (the Gauss distribution) in the continuous probability distribution.

Keywords: Monte Carlo method, measurement uncertainty, normal distribution, measurements generation.