

## KONCEPCJA I ZASTOSOWANIE SPECJALNYCH JEDNOWYMIAROWYCH ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Tadeusz CHYŻY, Monika MACKIEWICZ\*

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 E, 15-351 Białystok

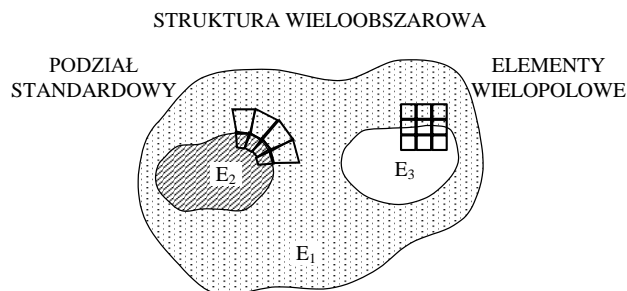
**Streszczenie:** W artykule została zaprezentowana koncepcja specjalnych elementów skończonych służących do analizy konstrukcji zawierających obszary o zmiennej sztywności. Elementy te określane są jako wielopolowe, a w referacie przedstawiono ich implementację w postaci najprostszyc elementów jednowymiarowych. Zastosowanie specjalnych elementów wielopolowych przyczynia się do zmniejszenia liczby niewiadomych, a tym samym przyspieszenia czasu obliczeń w porównaniu do standardowego rozwiązania MES. Podstawowym założeniem koncepcji elementów wielopolowych jest możliwość opisanie fragmentów konstrukcji o różniących się parametrach geometrycznych lub materiałowych jednym elementem. Macierz sztywności takiego elementu wyznaczana jest w sposób jawny poprzez sumowanie macierzy sztywności składowych podobszarów wchodzących w skład elementu skończonego. Obszar elementu skończonego jest więc dzielony na poszczególne podobszary, które mogą posiadać różne parametry geometryczno-szywnościowe. W celu potwierdzenia poprawności przyjętych założeń wykonano analizy porównawcze oraz wskazano potencjalny obszar zastosowań jednowymiarowych elementów specjalnych w analizie osiadania podłoża gruntowego.

*Słowa kluczowe:* MES, elementy wielopolowe, całkowanie w podprzestrzeniach.

### 1. Wprowadzenie

W praktyce modelowania konstrukcji Metodą Elementów Skończonych MES (Bathe, 1996; Zienkiewicz i in., 2005) niejednokrotnie zachodzi konieczność definiowania obszarów o znacznie różniącej się charakterystyce sztywnościowej (różnice w parametrach materiałowych lub wymiarowych). Standardowo różniące się podobszary są wydzielane i opisywane oddzielnie odpowiednimi elementami skończonymi. Takie podejście mimo, że jest naturalne dla MES, często może być jednak obliczeniowo kosztowne (duża liczba elementów skończonych), szczególnie dla materiałów o dużej niejednorodności.

Dlatego stwierdzono, że w uzasadnionych przypadkach obliczeniowych bardziej efektywnym rozwiązaniem może być zastosowanie elementów skończonych, które mogą opisywać różniące się podobszary analizowanego continuum. Opisywany problem przedstawiono na rysunku 1, gdzie pomiędzy podobszarami  $E_1$  i  $E_2$  zastosowano standardową dla MES-u dyskretyzację, natomiast pomiędzy podobszarami  $E_1$  i  $E_3$  zastosowano elementy wielopolowe obejmujące różniące się podobszary.



Rys. 1. Ilustracja koncepcji elementów wielopolowych

Koncepcja elementów wielopolowych zakłada, że obszar konstrukcji o różnych parametrach sztywnościowo-geometrycznych opisuje się pojedynczym elementem. W związku z tym, elementy te mogą być przydatne w analizach wymagających zamodelowania konstrukcji wykonanych z materiałów niejednorodnych, gąbczastych, spienionych czy przewarstwionych, materiałów z inkluzjami, domieszkami lub z uszkodzeniami wewnętrznymi, a także materiałów perforowanych, itp. Szczególnie dotyczy to modeli trójwymiarowych 3D, gdzie standardowe podejście prowadzi do dużej liczby elementów skończonych. Elementy wielopolowe pomagają wielokrotnie zmniejszyć liczbę niewiadomych, bez znaczącej utraty dokładności rozwiązania.

\* Autor odpowiedzialny za korespondencję. E-mail: m.mackiewicz@pb.edu.pl

Ponadto zastosowanie specjalnych elementów wielopolowych może być przydatne w obliczeniach konstrukcji wymagających uwzględnienia losowości (przypadkowości) w zakresie lokalizacji miejsc potencjalnego uszkodzenia, osłabienia, wzmocnienia czy inkluzji, jak również zakresu lub rodzaju tych zmian. W takich przypadkach często używa się kosztownych obliczeniowo procedur ponownego modelowania (rearanżacji) siatki podziału. Elementy wielopolowe mogą skutecznie eliminować taką potrzebę.

## 2. Podstawy teoretyczne – jednowymiarowy element wielopolowy

Koncepcja i podstawowe założenia metody elementów wielopolowych zostaną zaprezentowane oraz zweryfikowane na przykładzie elementu prętowego. Dla porównania standardowe wyprowadzenie macierzy sztywności pojedynczego elementu jednowymiarowego można znaleźć w pracy Łodygowski i Kąkol (1991).

Ilustrację koncepcji elementów wielopolowych w odniesieniu do elementów jednowymiarowych stanowi rysunek 2, na którym pokazano pręt o węzłach  $i$ - $j$  składający się z trzech pól składowych  $K_1, K_2, K_3$ . Wyznaczenie macierzy sztywności elementu skończonego  $K_e$  wykonuje się poprzez całkowanie w podprzedziałach (podobszarach), a następnie sumowanie częściowych macierzy sztywności z każdego podobszaru, co wyrażone jest wzorem:

$$K_e = K_1 + K_2 + K_3 + \dots = \int_{\xi_1}^{\xi_2} K_e^1(\xi) + \int_{\xi_2}^{\xi_3} K_e^2(\xi) + \int_{\xi_3}^{\xi_4} K_e^3(\xi) + \dots = \sum_{k=1}^n K_e^k \quad (1)$$

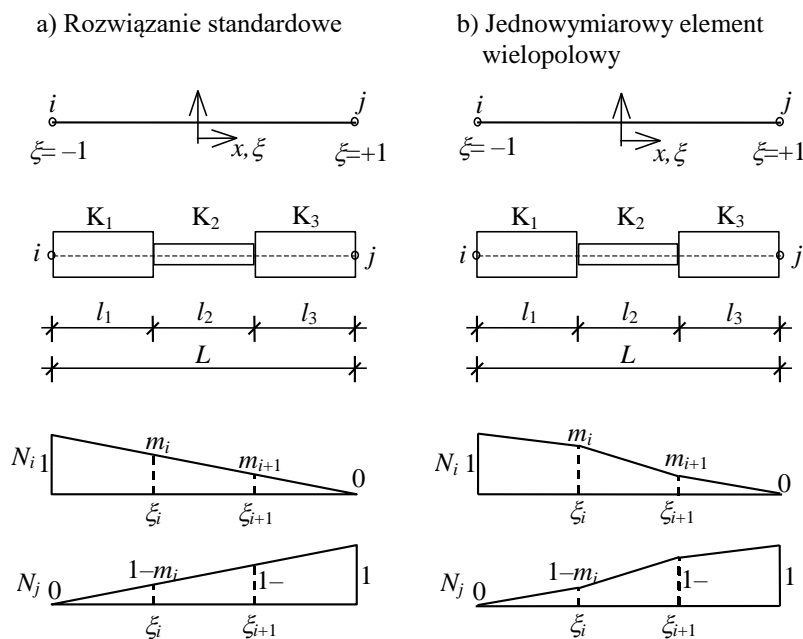
Standardowo przyjmuje się, że funkcje kształtu nie ulegają zmianie, czyli pozostają liniowe (rys. 2a). Jest to jednak uzasadnione tylko przy małych różnicach sztywności w poszczególnych podobszarach elementu skończonego, gdyż wpływ zmiany pola przemieszczeń na rozwiązanie jest niewielki. Przy dużych różnicach natomiast takie podejście prowadzi do dużych błędów obliczeniowych i modyfikacja pola przemieszczeń i odkształceń wewnątrz elementu skończonego jest niezbędna (Mackiewicz, 2012). Modyfikację pola przemieszczeń według koncepcji elementów wielopolowych przeprowadza się poprzez zastosowanie tzw. funkcji łamanej, określonej przez parametry  $m_i, m_{i+1}, \dots, m_n$  rozumiane jako wartości funkcji kształtu  $N_i$  na granicach poszczególnych pól składowych elementu wielopolowego (rys. 2b).

Macierz sztywności prętowego elementu wielopolowego jest wyznaczana w jawnej postaci, co zwiększa efektywność obliczeniową w stosunku do całkowania numerycznego. Wyrażenie (1) ilustruje fakt, że macierz elementu wielopolowego jest sumą macierzy składowych. Optymalnym rozwiązaniem jest więc wyznaczenie macierzy sztywności podobszaru w postaci sparametryzowanej, możliwej do powtórzenia i zastosowania we wszystkich podobszarach elementu. Uzyskuje się to poprzez przyjęcie ogólnych granic całkowania w postaci od  $\xi_i$  do  $\xi_{i+1}$  oraz wartości funkcji kształtu na początku i końcu podobszaru, odpowiednio  $m_i$  i  $m_{i+1}$  (rys. 2b).

Macierz sztywności pojedynczego pola składowego (podobszaru)  $K_e^k$  wyznaczana jest z następującego równania:

$$K_e^k = \int_{V_k} B_e^{kT} \cdot D_e^k \cdot B_e^k \cdot dV_k \quad (2)$$

gdzie:  $D_e^k$  jest macierzą materiałową podobszaru,  $D_e^k = [E_k]$ , a  $B_e^k$  jest macierzą odkształceń podobszaru  $k$ ,



Rys. 2. Element prętowy o zmiennych parametrach sztywnościowo-geometrycznych

$$\mathbf{B}_e^k = \mathbf{L} \cdot \mathbf{N}_e^k = \left[ \frac{d}{d\xi} \right] \cdot [N_i^k, N_j^k] = \left[ \frac{2(m_{i+1} - m_i)}{L(\xi_{i+1} - \xi_i)}, -\frac{2(m_{i+1} - m_i)}{L(\xi_{i+1} - \xi_i)} \right] \quad (3)$$

gdzie:  $\mathbf{L}$  jest macierzą operatorów różniczkowych, a  $\mathbf{N}_e^k$  jest macierzą funkcji kształtu wyrażoną w uogólnionych współrzędnych bezwymiarowych  $\xi$ ,

$$\mathbf{N}_e^k = [N_i^k, N_j^k] = \left[ \frac{m_{i+1} - m_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} (\xi - \xi_i) + m_i, 1 - N_i^k \right], \quad (4)$$

$$\xi \in \langle -1, +1 \rangle, \quad \xi = \frac{2}{L}x$$

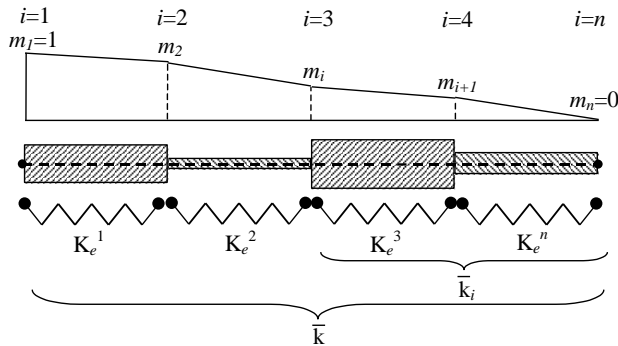
Po podstawieniu i wykonaniu przekształceń, z równania (2) jest uzyskiwana macierz sztywności pojedynczego pola składowego (podobszaru). Ostateczna postać macierzy sztywności pojedynczego pola składowego  $\mathbf{K}_e^k$  wyznaczona dla  $\xi \in \langle -1, 1 \rangle$  zapisana z użyciem parametrów:  $\xi_i, \xi_{i+1}, m_i$  i  $m_{i+1}$  jest następująca:

$$\mathbf{K}_e^k = \begin{bmatrix} \frac{2(\mathbf{EA})_k (m_{i+1} - m_i)^2}{L (\xi_{i+1} - \xi_i)} & -\frac{2(\mathbf{EA})_k (m_{i+1} - m_i)^2}{L (\xi_{i+1} - \xi_i)} \\ -\frac{2(\mathbf{EA})_k (m_{i+1} - m_i)^2}{L (\xi_{i+1} - \xi_i)} & \frac{2(\mathbf{EA})_k (m_{i+1} - m_i)^2}{L (\xi_{i+1} - \xi_i)} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

gdzie:  $A_k$  jest polem przekroju poprzecznego podobszaru  $k$ , a  $L$  jest długością całego elementu.

Wartości współczynników łamanych funkcji kształtu  $m_i$ , (rys. 2b) dopasowujących rozkład pola odkształceń wewnątrz elementu wielopolowego do zmian sztywności, wyprowadzono przy założeniu, że podobszary tworzą układ szeregowo połączonych sprężyn (rys. 3) o sztywnościach  $\mathbf{K}_e^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  ( $n$  jest liczbą pól składowych).



Rys. 3. Geometryczna interpretacja wyznaczania wartości łamanej linii funkcji kształtu

Wartości współczynników łamanych funkcji kształtu  $m_i$ , wyznacza się według następującego wzoru:

$$m_i = \frac{\bar{k}}{k_i} \quad (6)$$

gdzie  $\bar{k}$  jest sztywnością wypadkową całego zespołu sprężyn opisaną wzorem:

$$\bar{k} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mathbf{K}_e^k}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mathbf{E}_k \cdot A_k l_k}} \quad (7)$$

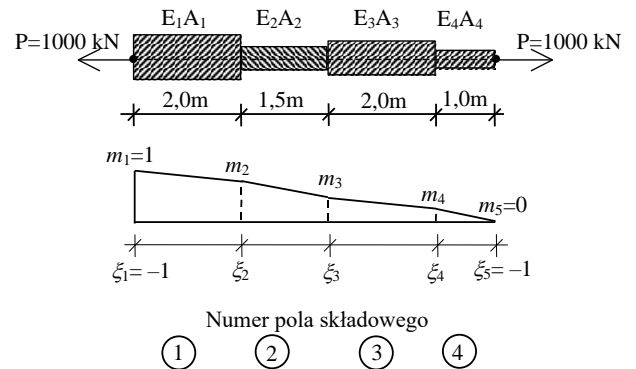
gdzie  $\bar{k}$  jest sztywnością wypadkową części układu sprężyn do punktu, w którym obliczana jest wartość  $m_i$ ; wartość  $\bar{k}$  wyznaczana jest ze wzoru:

$$\bar{k}_i = \frac{1}{\sum_{k=i}^n \frac{1}{\mathbf{K}_e^k}} = \frac{1}{\sum_{k=i}^n \frac{1}{\mathbf{E}_k \cdot A_k l_k}} \quad (8)$$

### 3. Wyniki analizy przykładowych zastosowań wielopolowych elementów skończonych

#### 3.1 Pręt rozciągany z czterema obszarami o różnicowanej sztywności

W przykładzie obliczeniowym wyznaczono przemieszczenie rozciąganego fragmentu konstrukcji zaprezentowanego na rysunku 4. Przeprowadzono obliczenia bez modyfikacji pola przemieszczeń (liniowe funkcje kształtu) oraz z zastosowaniem łamanych funkcji kształtu. Jako rozwiązanie oczekiwane (referencyjne) przyjęto wynik z obliczeń MES przeprowadzonych przy standardowym podziale rozciąganego fragmentu konstrukcji na 4 oddzielne elementy skończone o stałych sztywnościach  $E_i A_i$ .



Rys. 4. Rozciągany pojedynczy element skończony o zmiennej sztywności

Do obliczeń przyjęto, że moduł Younga jest stały we wszystkich podobszarach i wynosi  $E = 30 \text{ GPa} = 3000 \text{ kN/cm}^2$ . Pole przekroju poprzecznego elementu jest zmienne i w poszczególnych podobszarach wynosi odpowiednio:  $A_1 = 100 \text{ cm}^2$ ,  $A_2 = 50 \text{ cm}^2$ ,  $A_3 = 80 \text{ cm}^2$  i  $A_4 = 40 \text{ cm}^2$ . Długości podobszarów według rysunku 4.

Wartości współczynników łamanych funkcji kształtu ( $m_1$  do  $m_4$ ) wyznaczono według wzorów (6), (7) i (8). W nawiasach podano wartości funkcji kształtu przy rozkładzie liniowym.

- $m_1 = 1,00$  – początek funkcji kształtu,
- $m_2 = \frac{\bar{k}}{k_2} = \frac{300}{375} = \frac{4}{5} = 0,80$  (bez modyfikacji  $m_2 = \frac{9}{13}$ ),
- $m_3 = \frac{\bar{k}}{k_3} = \frac{300}{600} = \frac{1}{2} = 0,50$  (bez modyfikacji  $m_3 = \frac{6}{13}$ ),
- $m_4 = \frac{\bar{k}}{k_4} = \frac{300}{1200} = \frac{1}{4} = 0,25$  (bez modyfikacji  $m_4 = \frac{2}{13}$ ),

$m_4 = 0,0$  – koniec funkcji kształtu,  
gdzie:

$$\bar{k} = \frac{1}{\sum_{k=1}^4 \frac{1}{K_e^k}} = \frac{1}{\frac{1}{K_e^1} + \frac{1}{K_e^2} + \frac{1}{K_e^3} + \frac{1}{K_e^4}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\frac{3000 \text{ kN/cm}^2 \cdot 100 \text{ cm}^2}{200 \text{ cm}}} + \frac{1}{\frac{3000 \text{ kN/cm}^2 \cdot 50 \text{ cm}^2}{150 \text{ cm}}} + \frac{1}{\frac{3000 \text{ kN/cm}^2 \cdot 80 \text{ cm}^2}{200 \text{ cm}}} + \frac{1}{\frac{3000 \text{ kN/cm}^2 \cdot 40 \text{ cm}^2}{100 \text{ cm}}}} = 300 \text{ kN/cm}$$

$$\bar{k}_2 = \frac{1}{\sum_{k=2}^4 \frac{1}{K_e^k}} = \frac{1}{\frac{1}{K_e^2} + \frac{1}{K_e^3} + \frac{1}{K_e^4}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{3000 \text{ kN/cm}^2 \cdot 50 \text{ cm}^2}{150 \text{ cm}}} + \frac{1}{\frac{3000 \text{ kN/cm}^2 \cdot 80 \text{ cm}^2}{200 \text{ cm}}} + \frac{1}{\frac{3000 \text{ kN/cm}^2 \cdot 40 \text{ cm}^2}{100 \text{ cm}}}} = 375 \text{ kN/cm}$$

$$\bar{k}_3 = \frac{1}{\sum_{k=3}^4 \frac{1}{K_e^k}} = \frac{1}{\frac{1}{K_e^3} + \frac{1}{K_e^4}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{3000 \text{ kN/cm}^2 \cdot 80 \text{ cm}^2}{200 \text{ cm}}} + \frac{1}{\frac{3000 \text{ kN/cm}^2 \cdot 40 \text{ cm}^2}{100 \text{ cm}}}} = 600 \text{ kN/cm}$$

$$\bar{k}_4 = \frac{1}{\sum_{k=4}^4 \frac{1}{K_e^k}} = \frac{1}{\frac{1}{K_e^4}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{3000 \text{ kN/cm}^2 \cdot 40 \text{ cm}^2}{100 \text{ cm}}}} = 1200 \text{ kN/cm}$$

Tab. 1. Wartości parametrów dla poszczególnych pól składowych

1	2	3	4
$E = 3000 \text{ kN/cm}^2$	$E = 3000 \text{ kN/cm}^2$	$E = 3000 \text{ kN/cm}^2$	$E = 3000 \text{ kN/cm}^2$
$A_1 = 100 \text{ cm}^2$	$A_2 = 50 \text{ cm}^2$	$A_3 = 80 \text{ cm}^2$	$A_4 = 40 \text{ cm}^2$
$\zeta_1 = -1,0$	$\zeta_2 = -5/13$	$\zeta_3 = +1/13$	$\zeta_4 = +9/13$
$\zeta_2 = -5/13$	$\zeta_3 = +1/13$	$\zeta_4 = +9/13$	$\zeta_5 = +1,0$
Wartości funkcji kształtu $m_i$ z modyfikacją pola odkształceń – łamane funkcje kształtu			
$m_1 = 1,00$	$m_2 = 4/5$	$m_3 = 1/2$	$m_4 = 1/4$
$m_2 = 4/5$	$m_3 = 1/2$	$m_4 = 1/4$	$m_5 = 0,00$
Wartości funkcji kształtu $m_i$ bez modyfikacji pola odkształceń – liniowe funkcje kształtu			
$m_1 = 1,00$	$m_2 = 9/13$	$m_3 = 6/13$	$m_4 = 2/13$
$m_2 = 9/13$	$m_3 = 6/13$	$m_4 = 2/13$	$m_5 = 0,00$

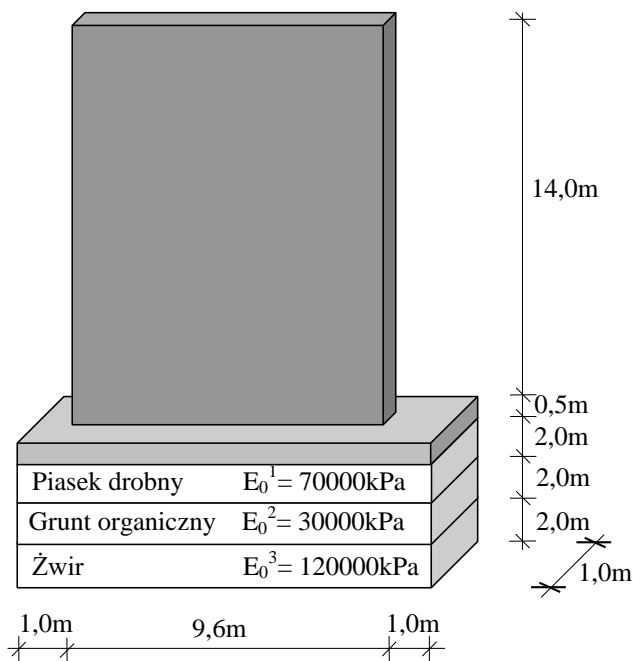
Tab. 2. Porównanie wartości przemieszczeń rozciąganego elementu pokazanego na rysunku 4

Metoda rozwiązania	Wartość przemieszczenia [cm]	Liczba zastosowanych elementów
Rozwiązanie dokładne MES	3,3333	4
Elementy wielopolowe z modyfikacją pola odkształceń	3,3333	1
Elementy wielopolowe bez modyfikacji pola odkształceń	2,9649	1

Wartości przyjętych założeń i wyznaczone wartości współczynników dla poszczególnych pól składowych zestawiono w tabeli 1. Natomiast w tabeli 2 zaprezentowano otrzymane wyniki przemieszczeń dla rozciąganego fragmentu konstrukcji.

### 3.2 Obliczenie wartości osiadania uwarstwionego podłoża gruntowego

Metoda jednowymiarowych specjalnych elementów skończonych została zaimplementowana w obliczeniach osiadania podłoża gruntowego (Chyży i Mackiewicz, 2013a, 2013b). Dotyczy to przede wszystkim obliczeń związanych z podłożem uwarstwowym, gdzie poszczególne warstwy różnią się od siebie miąższością i sztywnością. Jednym z przykładów może być analiza podłoża warstwowego zalegającego pod budynkiem, dla którego obliczono wartości osiadań. Przyjęto do obliczeń ławę fundamentową o wymiarach  $11,6 \times 0,5 \times 1,0$  m oraz opartą na niej ścianę żelbetową o wymiarach  $9,6 \times 14 \times 0,15$  m (rys. 5). Wartość obciążenia  $q$  stanowi obciążenie stropów poszczególnych kondygnacji, z uwzględnieniem ciężaru własnego ściany i ławy fundamentowej.



Rys. 5. Model obliczeniowy osiadania gruntu

W wariantcie I obliczeń przyjęto model podłoża sprężystego według hipotezy Winklera (Wiłun, 2005) w odniesieniu do podłoża warstwowego. Założono, że osiadanie podłoża  $s$  jest proporcjonalne do działającego obciążenia  $q$ , według zależności:

$$s = \frac{q}{k_z} \quad (9)$$

gdzie:  $q$  jest obciążeniem, a  $k_z$  współczynnikiem podatności.

Wartość współczynnika podatności  $k_z$  gruntu

jednorodnego do głębokości  $z$  wyznaczana jest według wzoru:

$$k_z = \frac{E_0}{\omega B(1-\nu^2)} \quad (10)$$

Współczynnik  $k_z$  w przypadku podłoża warstwowego jest sumą współczynników podatności poszczególnych warstw gruntu  $k_{z_i}$ . W odniesieniu do pojedynczej warstwy i współczynnik ten wyznacza się z zależności:

$$k_z^i = \frac{E_0^i}{\Delta\omega_i B(1-\nu^2)}; \quad \Delta\omega_i = \omega_i - \omega_{i-1}. \quad (11)$$

gdzie:  $E_0$  jest modułem odkształcenia gruntu,  $E_0^i$  jest modułem odkształcenia poszczególnych warstw gruntu,  $B$  jest szerokością obciążonego obszaru,  $\nu$  jest współczynnikiem bocznej rozszerzalności gruntu, a  $\Delta\omega_i$  ( $\omega_i$ ) jest współczynnikiem wpływu, zależnym od kształtu obciążonego obszaru (fundamentu), dobieranym z tablic i nomogramów (Wiłun, 2005).

Wyznaczona wartość osiadania podłoża uwarstwowego pod ławą fundamentową jest sumą osiadań wszystkich 3 warstw:

$$s_1 = \frac{q \cdot \Delta\omega_1 \cdot B \cdot (1-\nu^2)}{E_0^1} = \frac{189,19 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,86 \cdot 1,0 \text{ m} \cdot (1-0,3^2)}{70000 \text{ kPa}} = 2,115 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$s_2 = \frac{q \cdot \Delta\omega_2 \cdot B \cdot (1-\nu^2)}{E_0^2} = \frac{189,19 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,337 \cdot 1,0 \text{ m} \cdot (1-0,3^2)}{30000 \text{ kPa}} = 1,934 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$s_3 = \frac{q \cdot \Delta\omega_3 \cdot B \cdot (1-\nu^2)}{E_0^3} = \frac{189,19 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,259 \cdot 1,0 \text{ m} \cdot (1-0,3^2)}{120000 \text{ kPa}} = 3,716 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

– osiadanie  $s = s_1 + s_2 + s_3 = 0,00442 \text{ m} = 4,42 \text{ mm}$ .

W wariantcie II natomiast wykonano obliczenia z zastosowaniem opracowanych jednowymiarowych wielopolowych elementów skończonych wykorzystanych w autorskim systemie analizy konstrukcji ORCAN (<http://kmb.pb.edu.pl/dydaktyka/tchyzy/orcan.html>) (Chyży i in., 2014). Aby wyznaczyć wartość osiadania należy zastosować zastępczy moduł sprężystości  $E_{z_i}$  poszczególnych warstw dostosowany do modelu Winklera według wzoru:

$$E_z^i = \frac{E_0^i h_i}{\Delta\omega_i B(1-\nu^2)}; \quad \Delta\omega_i = \omega_i - \omega_{i-1}. \quad (12)$$

gdzie:  $h_i$  jest grubością (miąższością) poszczególnych warstw, zaś pozostałe oznaczenia jak we wzorach (10)

i (11).

Obliczone wartości zastępczego modułu sprężystości oraz sumaryczna wartość osiadania są następujące:

$$E_z^1 = \frac{E_0^1 \cdot h_1}{\Delta\omega_1 \cdot B \cdot (1-\nu^2)} = \frac{70000 \text{ kPa} \cdot 2\text{m}}{0,86 \cdot 1\text{m} \cdot (1-0,3^2)} = 178890,88 \text{ kPa}$$

$$E_z^2 = \frac{E_0^2 \cdot h_2}{\Delta\omega_2 \cdot B \cdot (1-\nu^2)} = \frac{30000 \text{ kPa} \cdot 2\text{m}}{0,337 \cdot 1\text{m} \cdot (1-0,3^2)} = 195650,05 \text{ kPa}$$

$$E_z^3 = \frac{E_0^3 \cdot h_3}{\Delta\omega_3 \cdot B \cdot (1-\nu^2)} = \frac{120000 \text{ kPa} \cdot 2\text{m}}{0,259 \cdot 1\text{m} \cdot (1-0,3^2)} = 1018286,73 \text{ kPa}$$

– osiadanie  $s = 0,00442 \text{ m} = 4,42 \text{ mm}$ .

#### 4. Podsumowanie

Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, iż zastosowanie specjalnych jednowymiarowych elementów skończonych w obliczeniach układów konstrukcyjnych o zmiennych parametrach sztywnościowo-geometrycznych pozwala uzyskać wyniki, które są zgodne z rozwiązaniem oczekiwanym. W pierwszym przedstawionym przykładzie jako rozwiązanie oczekiwane przyjęto rozwiązanie według standardowego podziału MES na 4 oddzielne elementy o różnej sztywności. Wyniki zaprezentowane w tabeli 2 potwierdzają fakt, że stosowanie elementów całkowanych w podobozarach bez modyfikacji pola odkształceń wewnątrz elementu prowadzi do błędnych wyników. Natomiast dopasowanie pola odkształceń poprzez zastosowanie łamanych funkcji kształtu umożliwia uzyskanie rozwiązania oczekiwanego przy jednoczesnym zastosowaniu mniejszej liczby elementów skończonych.

W drugim przykładzie jako rozwiązanie oczekiwane przyjęto wyniki osiadania obliczone według modelu Winklera. Uzyskana wartość osiadania podłoża gruntowego z zastosowaniem jednowymiarowych elementów wielopolowych jest z nim zgodna. Model Winklera został uznany jako najbardziej zbliżony do jednowymiarowego elementu wielopolowego, stanowiącego sprężynę o skokowo zmiennej sztywności i dopasowującym się polu odkształceń wewnątrz tego elementu. Ocena przydatności praktycznej modelu Winklera oraz ograniczenia jego stosowania nie były przedmiotem tego artykułu. Zaprezentowane wyniki osiadania podłoża warstwowego potwierdzają możliwość wyznaczania wartości osiadania podłoża gruntowego z zastosowaniem jednowymiarowych elementów wielopolowych.

#### Literatura

- Bathe K.J. (1996). Finite Element Procedures. *Prentice Hall, Englewood Cliffs*, New York.
- Chyży T., Mackiewicz M. (2013a). Liniowe elementy skończone o zmiennej sztywności w modelowaniu podłoża gruntowego pod budynkiem. *Budownictwo i Inżynieria Środowiska*, Vol. 4, nr 1, 7-12.
- Chyży T., Mackiewicz M. (2013b). Method of embankment modeling using one-dimensional layered finite elements. W: *Building Structures in Theory and Practice*, Biała Podlaska, 167-175.
- Chyży T., Mackiewicz M., Matulewicz S. (2014). Podręcznik Użytkownika Systemu ORCAN. Nowoczesny Graficzny Język Opisu Konstrukcji Budowlanych ORCAN v. 091. Składnia i Zastosowania. *Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej*, Białystok.
- Łodygowski T., Kąkol W. (1991). Metoda Elementów Skończonych w Wybranych Zagadnieniach Mechaniki Konstrukcji Inżynierskich. *Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej*, Poznań.
- Mackiewicz M. (2012). Koncepcja liniowych elementów skończonych do analizy konstrukcji o dużych zmianach geometryczno-szywnościowych. W: *Badania Doświadczalne i Teoretyczne w Budownictwie: Prace Naukowe Doktorantów*, Gliwice, 173-180.
- Wiłun Z. (2005). Zarys Geotechniki. *Wydawnictwa Komunikacji i Łączności*, Warszawa.
- Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. (2005). The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals. *Elsevier, Butterworth-Heinemann*, Amsterdam.

#### CONCEPTION AND APPLICATION OF SPECIAL ONE-DIMENSIONAL FINITE ELEMENTS

**Abstract:** The conception of special finite elements for analysis of structures with variable stiffness areas is presented in the paper. The elements are called as a multi-area elements and their implementation in form of simple one-dimensional elements is presented. The application of these special elements helps to reduce the number of finite elements (unknowns) and thereby to reduce the computational calculation time, compared with standard FEM solution. The conception is based on the assumption that area of the structure with different stiffness and geometrical parameters described by a single element. The stiffness matrix for multi-area element is determined in explicit form by the summation of the stiffness matrices of component sub-areas included in the finite element. Therefore the area of the finite element is divided into rectangular sub-areas with various geometric and stiffness parameters. In order to confirm the accuracy of the presented conception assumptions, comparative analysis was made and potential area of application for one-dimensional special elements were indicated.

Badania zostały zrealizowane w ramach pracy numer MB/WBiŚ/6/2014 i sfinansowane ze środków na naukę MNiSW.