

ATAMAN Magdalena, SZCZEŚNIAK Waclaw

WPLYW OSTRYCH NIERÓWNOŚCI NA WIERZCHNI SZTYWNEJ NA ZMIANĘ PRĘDKOŚCI KOŁA

Streszczenie

W pracy analizowano wpływ nierówności drogi na zmianę prędkości koła pojazdu. W pierwszym etapie rozwiązano zadanie uderzenia sprężysto-plastycznego punktu materialnego w sztywne podłoże. Następnie jako model koła i drogi przyjęto sztywny krążek poruszający się po sztywnym podłożu z nierównościami. Przyjęto, że uderzenie krążka w próg nierówności jest plastyczne. Rozwiązane w referacie zadanie ma zastosowanie praktyczne do analizy ruchu pojazdów po nawierzchni drogowej, lotniskowej oraz po nawierzchni kolejowej.

WSTĘP

Uderzenie koła pojazdu w próg nierówności drogi ma znaczenie praktyczne w budownictwie transportowym. Nierówności nawierzchni mają istotny wpływ na zmianę wartości i kierunku wektorów prędkości i przyspieszenia koła pojazdu. Zmiana ta znacząco wpływa na wytrzymałość, stateczność oraz trwałość nawierzchni a także pojazdu. Szybko zmieniające się w czasie przyspieszenie pojazdu, jak wiadomo, zasadniczo determinuje komfort pasażerów.

Najprostszym modelem, umożliwiającym przeanalizowanie powyższego zagadnienia, jest model sztywnego krążka uderzającego plastycznie w sztywny próg.

W referacie rozwiązanie zadania uderzenia krążka w próg poprzedzone zostało rozwiązaniem uproszczonego zadania wstępnego, odnoszącego się do sprężysto-plastycznego uderzenia punktu materialnego w sztywne podłoże.

1. ZADANIE WSTĘPNE – ANALIZA RUCHU PUNKTU MATERIALNEGO

W niniejszym rozdziale referatu przeanalizowane zostaną dwa zadania dotyczące uderzenia punktu materialnego w sztywne podłoże. W pierwszej kolejności omówiony zostanie przypadek punktu materialnego uderzającego w sztywne podłoże po spadku z progu zadaną prędkością początkową. Następnie przeanalizujemy ruch punktu materialnego wpadającego w nierówność sztywnego podłoża.

1.1. Uderzenie w sztywne podłoże punktu materialnego spadającego z progu

Rozważamy punkt materialny o masie m , spoczywający na gładkiej powierzchni, jak na rysunku 1. Po nadaniu mu poziomej prędkości v_0 punkt spada z progu o wysokości h (rzut poziomy) i uderza, po czasie t_1 od oderwania się od progu, w sztywne, poziome podłoże.

Zderzenie jest sprężysto-plastyczne ze współczynnikiem restytucji ζ . Po uderzeniu punktu w podłoże mamy do czynienia jego z rzutem ukośnym i po czasie $t_k = t_2$ punkt ponownie uderza w podłoże. Wyznamy odległość między punktami A i B uderzenia kulki w poziome podłoże.

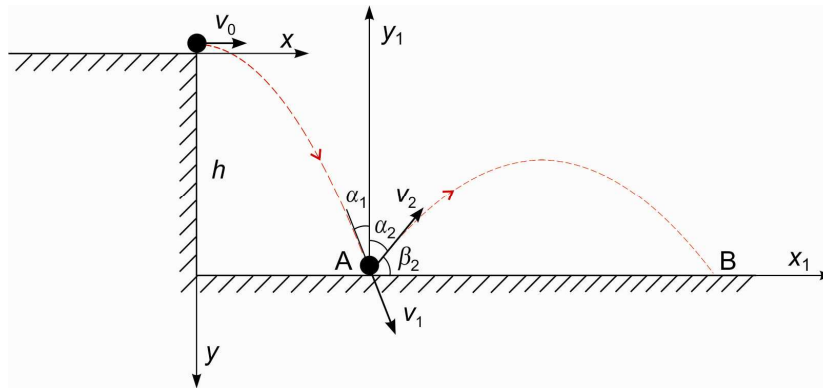
Analizujemy następujące fazy ruchu punktu materialnego:

- faza pierwsza ruchu – rzut poziomy,
- faza druga – zderzenie sprężysto-plastyczne,
- faza trzecia ruchu – rzut ukośny.

W przypadku rzutu poziomego kulki obowiązują następujące wzory, z których możemy wyznaczyć zasięg kulki, jej prędkość w chwili zderzenia z podłożem v_1 oraz czas t_1 od momentu startu, po którym nastąpi zderzenie:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= 0, & m\ddot{y} &= mg, & x &= v_0 t, & y &= \frac{1}{2} g t^2, \\
 y = h &\rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}, & v_1 &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \Big|_{t=t_1} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}, & (1) \\
 \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{\dot{x}}{\dot{y}} \Big|_{t=t_1} = \frac{v_0}{\sqrt{2gh}}, & x \Big|_{t=t_1} &= v_0 t_1 = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}.
 \end{aligned}$$

W kolejnym etapie analizujemy uderzenie sprężysto-plastyczne kulki o sztywne podłoże, przy zadanym współczynniku restytucji ζ . Początek układu współrzędnych przyjmujemy teraz w punkcie A.



Rys. 1. Zderzenie sprężysto-plastyczne punktu materialnego, w rzucie poziomym i w rzucie ukośnym, ze sztywnym podłożem

Wykorzystując podstawowe równania teorii uderzenia możemy wyznaczyć prędkość v_2 oraz tangens kąta β_2 odbicia kulki od podłoża:

$$v_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) = v_2 \cos \beta_2, \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{v_1 \sin \alpha_1}{\cos \beta_2} = \frac{v_1 \sin \alpha_1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right)} = \frac{v_1 \sin \alpha_1}{\sin \alpha_2},$$

$$\zeta = -\frac{v_2 \cos \alpha_2}{-v_1 \cos \alpha_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \zeta \operatorname{tg} \alpha_2, \quad (2)$$

$$v_2 = v_1 \cos \alpha_1 \sqrt{\zeta^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1} = v_{1y} \sqrt{\zeta^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1} = \sqrt{2gh} \sqrt{\zeta^2 + \frac{v_0^2}{2gh}},$$

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2gh\zeta^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{v_0}{\zeta \sqrt{2gh}}.$$

Równania rzutu ukośnego na odcinku AB, zapisane w układzie współrzędnych $\{A, x_1, y_1\}$, prowadzą do następujących wzorów:

$$m \ddot{x}_1 = 0, \quad m \ddot{y}_1 = -mg, \quad x_1 = v_2 t \cos \beta_2,$$

$$y_1 = v_2 t \sin \beta_2 - \frac{1}{2} g t^2, \quad y_1 = 0 \quad \rightarrow \quad t_k = \frac{2v_2 \sin \beta_2}{g}, \quad 2\beta_2 = \pi - 2\alpha_2, \quad (3)$$

$$AB = \frac{v_2^2 \sin 2\beta_2}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_2}{g} = \frac{2v_2^2 \operatorname{tg} \alpha_2}{g(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2)} = 4v_0 \zeta \sqrt{\frac{h}{2g}}.$$

W przypadku uderzenia sprężystego, przy $\zeta = 1$, wzory (3) upraszczają się do następującej postaci:

$$\zeta = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{v_0}{\sqrt{2gh}},$$

$$v_2 = v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}, \quad AB = 4v_0 \sqrt{\frac{h}{2g}}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} AB = 2v_0 \sqrt{\frac{h}{2g}}.$$

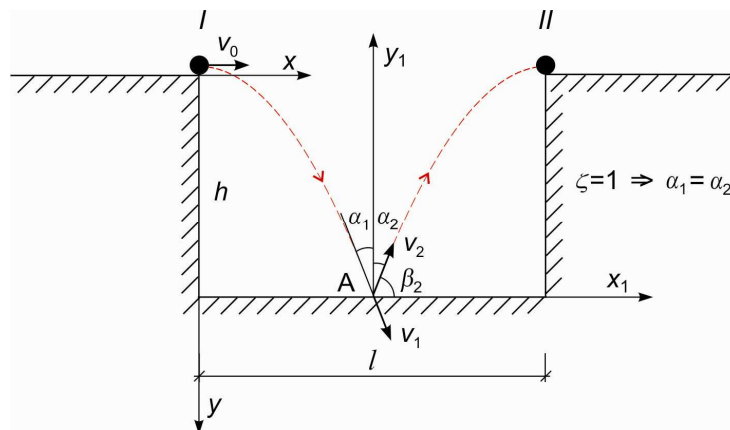
Rozwiązania (4) wykorzystane zostaną w dalszej części pracy do analizy ruchu punktu materialnego wpadającego w nierówność sztywnego podłoża o głębokości h .

1.2. Analiza ruchu punktu materialnego wpadającego w nierówność (zagłębienie) w sztywnym podłożu

W tej części pracy przeanalizujemy ruch kulki wpadającej z prędkością początkową v_0 w nierówność w sztywnym podłożu o wymiarach $h \times l$, jak na rysunku 2. Uderzenie punktu materialnego w dno nierówności jest idealnie sprężyste.

Wyznamy wartość prędkości początkowej v_0 , przy której możliwe jest odbicie się punktu materialnego od dna nierówności, tak aby znalazł się w położeniu II (rysunek 2).

Również w tym przypadku mamy do czynienia z rzutem poziomym i z rzutem ukośnym punktu materialnego.



Rys. 2. Wektory prędkości w dwóch fazach ruchu punktu materialnego wpadającego z prędkością początkową v_0 w nierówność (zagłębienie) w sztywnym podłożu

W pierwszej fazie maksymalna odległość jaką pokona punkt w rzucie poziomym jest równa:

$$x|_{t=t_1} = v_0 t_1 = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (5)$$

Następnie, po idealnie sprężystym odbiciu się od dna zagłębienia w podłożu, ruch kulki opisany równaniami rzutu ukośnego. Maksymalną wysokość wzniesienia kulka osiąga przy $x_1 = \frac{1}{2} AB$. Korzystając ze wzoru (4) otrzymujemy:

$$x_1|_{t=t_2} = \frac{1}{2} AB = 2v_0 \sqrt{\frac{h}{2g}}, \quad (6)$$

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin \beta_2}{g}, \quad \beta_2 = \pi - \alpha_2.$$

Sumując długości odcinków x oraz x_1 otrzymamy równanie, z którego możemy wyznaczyć prędkość początkową v_0 , jaką należy nadać kulce, aby po odbiciu się od dna nierówności trafiła w położenie II, jak na rysunku 2:

$$x + x_1 = l \rightarrow l = 4v_0 \sqrt{\frac{h}{2g}}, \quad (7)$$

$$v_0 = \frac{l}{4} \sqrt{\frac{2g}{h}}.$$

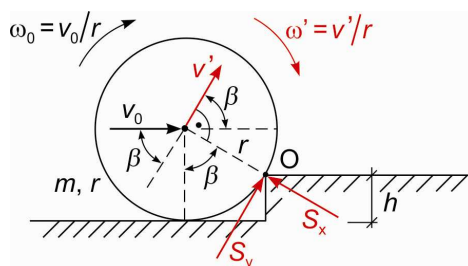
Rozwiązania (4) i (7) są rozwiązaniami zadania wstępnego do zadania uderzenia krążka w sztywny próg, rozwiązanego w następnym rozdziale pracy.

2. ANALIZA RUCHU KOŁA W RUCHU PŁASKIM

W niniejszym rozdziale analizować będziemy sztywny krążek toczący się bez poślizgu po sztywnym podłożu z jedną lub dwiema nierównościami.

2.1. Uderzenie sztywnego koła w próg

W pierwszej kolejności rozważymy krążek o masie m i promieniu r , który tocząc się uderza w sztywny próg pokazany na rysunku 3. Mając zadane wymiary krążka i progu wyznaczmy minimalną prędkość, przy której krążek wjedzie na ten próg.



Rys. 3. Schemat koła przejeżdżającego przez pojedynczą nierówność (próg)

Zapisując prawo zachowania momentu pędu względem punktu O wyznaczamy prędkość kątową ω' krążka po zderzeniu idealnie plastycznym z progiem:

$$m v_0 (r - h) + \frac{1}{2} m r^2 \frac{v_0}{r} = \frac{3}{2} m r^2 \omega' \rightarrow \omega' = \frac{v_0 (3r - 2h)}{3r^2}. \quad (8)$$

We wzorach (8) m jest masą krążka, r – jego promieniem, v_0 – prędkością środka koła przed zderzeniem z krawędzią progu o wysokości h .

Prędkość minimalną najazdu krążka na nierówność, przy której nastąpi jego wtoczenie się na próg wyznaczamy z zasady zachowania energii mechanicznej:

$$\frac{3}{4} m r^2 (\omega')^2 = \frac{m v_0^2 (3r - 2h)}{12 r^2} > m g h \rightarrow v_0^2 > \frac{12 r^2 g h}{(3r - 2h)^2}. \quad (9)$$

Mając minimalną prędkość środka krążka, przy której możliwe jest jego wtoczenie się na próg możemy określić impulsy sił w punkcie O na krawędzi progu. Wyznaczamy je z zasady zachowania pędu:

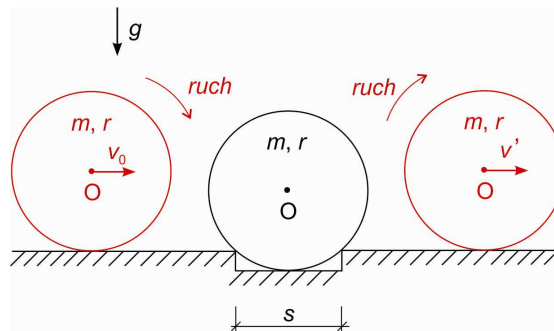
$$-S_x = m(v_x' - v_0 \sin \beta), \quad S_y = m(v_y' - v_0 \cos \beta), \\ -S_y r = J_0(\omega' - \omega_0),$$

$$v_0 = r \omega_0, \quad v' = \omega' r, \quad v_y' = \frac{1}{3} v_0 (1 + 2 \cos \beta), \quad v_x' = 0, \quad (10)$$

$$\omega' = \frac{1}{3r} (1 + 2 \cos \beta), \quad \cos \beta = \frac{r-h}{r}, \quad \sin \beta = \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - \left(\frac{r-h}{r}\right)^2}.$$

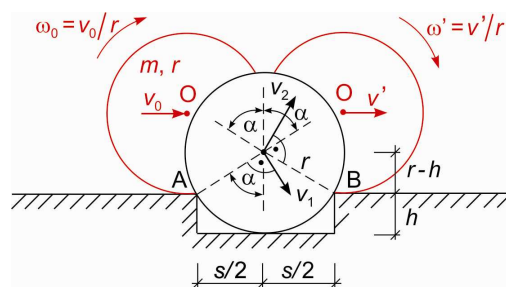
2.2. Przejazd sztywnego krążka przez podwójną nierówność (zagłębienie)

W niniejszym punkcie pracy rozwiążemy zadanie dotyczące przejazdu koła przez zagłębienie w podłożu, jak na rysunku 4, przy założeniu nieoderwania się koła od podłoża.



Rys. 4. Schemat koła przejeżdżającego przez podwójną nierówność w podłożu (zagłębienie)

Rozważany krążek o całkowitej masie m i promieniu r toczy się bez poślizgu po poziomym, sztywnym podłożu zadaną prędkością jego środka v_0 (rysunek 5). W pewnej chwili krążek wpada w nierówność o danej szerokości s . W pracy wyznaczona zostanie prędkość środka krążka w chwili tuż po pokonaniu nierówności, przy założeniu, że krążek nie ślizga się oraz nie odrywa od ostrych krawędzi prógów nierówności.



Rys. 5. Wektory prędkości środka krążka przy przejeździe przez nierówność

Po najechaniu na pierwszy próg krążek obraca się względem punktu A do dolnego położenia, będąc w ruchu płaskim. Prędkość v_1 środka krążka w najniższym położeniu można wyznaczyć z bilansu energii:

$$\frac{3}{4}mv_1^2 = \frac{3}{4}mv_0^2 + mgh \rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{3}{4}gr(1 - \cos \alpha)}. \quad (11)$$

Prędkość z jaką krążek wtoczy się na próg w punkcie B wyznaczamy zapisując zasadę zachowania momentu pędu względem tego punktu:

$$\frac{1}{2}mr^2 \frac{v_1}{r} + mv_1 r \cos^2 \alpha - mv_1 \frac{s}{2} \sin \alpha = \frac{3}{2}mv_2 r, \quad (12)$$

$$v_2 = \frac{(3r^2 - s^2) \sqrt{6g(2r - \sqrt{4r^2 - s^2})} + 9v_0^2}{9r^2}.$$

W celu wyznaczenia prędkości v' środka krążka w chwili tuż po pokonaniu nierówności ponownie korzystamy z bilansu energii krążka:

$$\frac{3}{4} m v_2^2 - m g h = \frac{3}{4} m (v')^2 \rightarrow$$

$$v' = \sqrt{\frac{3(3r^2 - s^2)^2 v_0^2 - 2 g s^2 (6r^2 - s^2) (2r - \sqrt{4r^2 - s^2})}{27 r^4}}. \quad (13)$$

Analizując otrzymany wzór (13)₂ na prędkość v' krążka w chwili tuż po przejechaniu przez nierówność łatwo zauważyć, że jest ona mniejsza od prędkości początkowej v_0 .

Przyjmując przykładowo: $v_0 = 20 \text{ m/s}$, $r = 1 \text{ m}$, $s = \frac{1}{2} r = 0,5 \text{ m}$ i $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ otrzymamy

$$v' = 18,33 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

PODSUMOWANIE

We współczesnej komunikacji pociągi dużych i bardzo dużych prędkości odgrywają coraz większą rolę w transporcie pasażerów. Konstrukcja toru i podtorza kolejowego muszą spełniać rygorystyczne warunki techniczne w odniesieniu do parametrów toru: nierówności, stanów przemieszczeń i naprężeń w jego konstrukcji. Również w przypadku nawierzchni drogowych i lotniskowych istotnym elementem mającym wpływ na bezpieczeństwo i komfort podróży i transportu ma stan techniczny, a w tym równość drogi.

Z analizy przeprowadzonej w pracy wynika, że nierówności nawierzchni drogowej mają istotny wpływ na zmianę wartości i kierunku wektora prędkości koła pojazdu, a co za tym idzie, na trwałość drogi a także pojazdu. Przedstawiony uproszczony model pozwala w prosty i szybki sposób określić zmianę prędkości pojazdu w zależności od wymiarów nierówności podłoża.

BIBLIOGRAFIA

1. Szcześniak W., Ataman M., *Selected problems of the classic theory of impact*. Logistyka 6/2010, pp. 3305-3310.
2. Morozow S.J., *Soudarenije tieł. Kłasiczeskaja teoria udara. Cz. 1*. Archangielsk 2001.
3. Aleksandrow E.W., Sokoliński W.B., *Prikladnaja teoria i rasczety udarnych sistem*. Moskwa, Nauka 1969.
4. Batujew G.S. i inni.: *Inżynieryjne metody issledowanija udara*. Moskwa, Maszynostrojenije 1969.
5. Hertz H., *Über die Berührung fester elastischer Körper*. Crell'es Jour. Bd. 92 1881.
6. Hertz H., *Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Harte*. Gesammelte Werke. Bd. 1 Leipzig 1895.
7. Dinnik A.N., *Udar i zżatije uprugich tieł*. Izobrnanyje trudy. T. 1. AN SSSR, Kijew 1952.
8. Goldsmith W.: *Impact*, Edward Arnold, London 1960.
9. Szcześniak W., Ataman M., Kozyra Z., *O uderzeniu plastycznym układu czterech prętów przegubowych w sztywne podłoże*. Theoretical Foundations of Civil Engineering. Vol. 12, t. 1, 2004, pp. 399-408.
10. Szcześniak W., Ataman M., *O zderzeniach układów kul pomiędzy sobą i podłożem*. Theoretical Foundations of Civil Engineering vol. 13, 2005, pp. 601-610.

11. Szcześniak W., *Dynamika analityczna i <<MATHEMATICA>>*. OWPW, Warszawa 2005.
12. Szcześniak W., *Dynamika teoretyczna dla zaawansowanych*. OWPW, Warszawa 2007.
13. Gryboś R., *Teoria uderzenia w dyskretnych układach mechanicznych*. PWN, Warszawa 1969.
14. Szcześniak W. Ataman M., *Particular cases of problems of the classic theory of impact*. Logistyka Nr 6/2010, pp. 3311-3318.
15. Panowko Ja. G., *Wwiedienije w teorju miechaniczeskogo udara*. Nauka, Moskwa 1977.
16. Johnson W., *Impact strength of materials*. Edward Arnold, London 1972.
17. Gryboś R., *Stateczność konstrukcji pod obciążeniem udarowym*. PWN, Warszawa. 1980.
18. Ataman M., Szcześniak W., *Płaskie struktury przegubowe obciążone impulsem sity*. Autobusy 3/2013, str. 1457-1464.
19. Crede S.E., *The effect of pulse shape on simple systems under impulsive loading*. Trans. ASME, 77, 1955, pp. 957-961.
20. Stronge W.J., *Impact mechanics*. Cambridge University Press 2000.
21. Timoshenko S.P., Young D.H., *Engineering mechanics. Dynamics*. McGraw-Hill, 1937.

INFLUENCE OF THE SHARP RIGID PAVEMENT ROUGHNESS ON TO THE CHANGE OF WHEEL SPEED

Abstract

In the paper the influence of road roughness on changing the speed of the vehicle wheels is discussed. In the first stage the problem of elastic-plastic collision of material point with rigid surface was solved. Then, as a model of the wheel and the road pavement was assumed a rigid disc rolling on a rigid plane with irregularities. In this case plastic impact was assumed. The problem solved in the paper has the practical application for analyses of road and airport pavements as well as the railway tracks analyses. It was shown that pavement unevenness affect for changing the value and direction of the vectors of velocity and acceleration of the wheels.

Autorzy:

dr inż. **Magdalena Ataman** – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej
 prof. dr hab. inż. **Wacław Szcześniak** – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej

Niniejsza praca jest współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, projekt „Program Rozwojowy Politechniki Warszawskiej” realizowany przez Centrum Studiów Zaawansowanych.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



KAPITAŁ LUDZKI
 NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
 EUROPEJSKI
 FUNDUSZ SPOŁECZNY

