

Marcin SOBOTA  
Politechnika Śląska  
Wydział Organizacji i Zarządzania

## TELEPORTACJA NIEZNANEGO STANU KWANTOWEGO

**Streszczenie.** Artykuł przedstawia protokół kwantowej teleportacji nieznanego stanu kwantowego. Treść zawiera matematyczne podstawy teleportacji, przedstawia schemat układu teleportującego oraz opisuje dlaczego teleportacja pozostaje w zgodzie z twierdzeniem o nieklonowaniu. Opisane zostaną stany Bella oraz wszystkie możliwe przypadki teleportacji tych stanów.

**Słowa kluczowe:** kwantowa teleportacja, stan kwantowy, twierdzenie o nieklonowaniu.

## TELEPORTATION OF UNKNOWN QUANTUM STATE

**Summary.** The article presents an unknown quantum state teleportation Protocol. The content includes basic math teleportation, shows a model of teleportation and describes why teleportation is in harmony with the non-cloning theorem.

**Keywords:** quantum teleportation, quantum state, non cloning theorem.

### 1. Wstęp

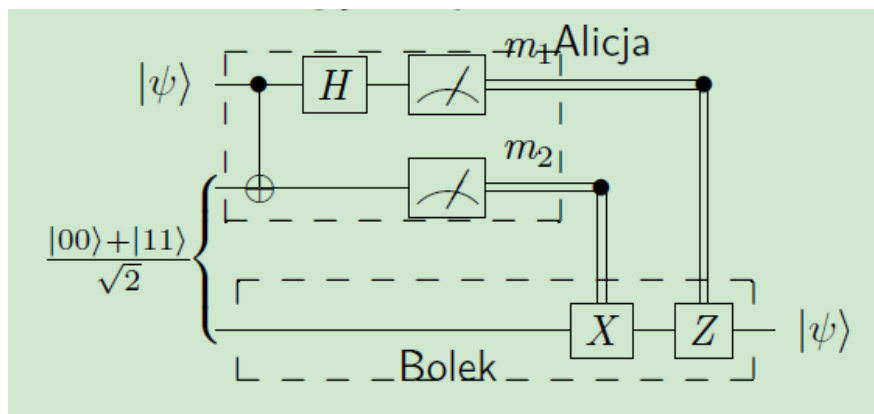
Słowo teleportacja pochodzi od dwóch greckich słów: tele – daleko oraz portatio – noszenie. Oznacza więc przenoszenie czegoś na duże odległości. W wielu książkach i filmach o tematyce fantastyki naukowej zjawisko to jest przedstawiane jako metoda komunikacji pozwalająca przesyłać obiekty w dowolne miejsce. Czy jednak istnieje praktyczna możliwość realizacji teleportacji? Okazuje się, że zjawisko to może zostać zrealizowane i nie jest jedynie wytworem fantazji autorów książek czy filmów.

Pierwszej kwantowej teleportacji dokonano w 1997 roku. W 2004 roku teleportowano stan kwantowy jednego atomu do drugiego, w 2006 roku teleportowano kwantowy stan impulsu światła do biliona atomów cezu, a w 2011 roku teleportowano pierwszą falę świetlną.

Rok później wyrównano ówczesny rekord w najdalszej teleportacji kwantowej, dokonując jej na odległość 143 kilometrów. Również w tym roku teleportowano stan kwantowy grupy atomów do drugiej. W 2013 roku kubity materii teleportowano na rekordową odległość 21 metrów [4, 5, 6, 7, 8, 9].

## 2. Protokół kwantowej teleportacji

Kwantowa teleportacja wykorzystuje stany splątane [1, 2, 3]. Splątanie oznacza, że stan całego układu jest lepiej określony niż stan jego części. Dodatkowo stany splątane mają taką cechę, że wykonanie lokalnego pomiaru na jednej ze splątanych cząstek błyskawicznie (niezależnie od odległości) wpływa na stan drugiej cząstki. Te dwie cechy pozwalają wykorzystać splątanie do przeprowadzenia teleportacji nieznanego stanu kwantowego. Schemat teleportacji przedstawia rysunek 1.



Rys. 1. Schemat teleportacji stanu kwantowego

Fig. 1. Quantum teleportation

Źródło: opracowanie własne.

Mechanizm teleportacji opisano poniżej.

1. Alicja i Bolek otrzymują po jednym kubicie z pary splątanych kubitów. W protokole teleportacji wykorzystywany jest jeden z czterech tzw. stanów Bella. Wybrany stan kwantowy może wyglądać następująco:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (1)$$

Splątana para może być generowana po stronie Alicji, Bolka lub przez zewnętrzne źródło.

2. Alicja generuje kubit, którego stan będzie teleportowany. Określamy go jako:

$$\psi = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (2)$$

3. Rozpatrywany stan układu, zawierający dwa stany splątane i nieznaną stan przeznaczony do teleportacji, wygląda następująco:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|100\rangle + \beta|111\rangle] \quad (3)$$

4. Alicja wykonuje operację CNOT na teleportowanym kubicie i jednym kubicie z pary. Stan układu zmienia się na następujący:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|110\rangle + \beta|101\rangle] \quad (4)$$

5. Potem Alicja wykonuje operację Hadamarda na swoim nieznanym kubicie. Stan układu zmienia się na następujący:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle + |1\rangle)|00\rangle] + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle + |1\rangle)|11\rangle] + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle - |1\rangle)|10\rangle] + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle - |1\rangle)|01\rangle] = \\ & = \frac{\alpha}{2}|000\rangle + \frac{\alpha}{2}|100\rangle + \frac{\alpha}{2}|011\rangle + \frac{\alpha}{2}|111\rangle + \frac{\beta}{2}|010\rangle - \frac{\beta}{2}|110\rangle + \frac{\beta}{2}|001\rangle - \frac{\beta}{2}|101\rangle = \\ & = \frac{1}{2}|00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + \frac{1}{2}|01\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + \frac{1}{2}|10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + \frac{1}{2}|11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) \quad (5) \end{aligned}$$

Alicja, dokonując przekształcenia na bramce Hadamarda, powoduje powstanie splątania między posiadanymi przez nią kubitami, co z kolei wpływa na rozplątanie pary pierwotnie splątanej i przejście kubit Bolka do określonego stanu.

6. Kolejnym krokiem jest wykonanie pomiaru przez Alicję na dwóch swoich kubitach. Alicja może otrzymać jeden z czterech możliwych stanów:

$$|00\rangle; |01\rangle; |10\rangle; |11\rangle \quad (6)$$

Otrzymanie przez Alicję określonego wyniku oznacza, iż zdobywa ona wiedzę na temat stanu, w jakim znajduje się kubit przesłany do Bolka. Ostatnim działaniem Alicji jest przesłanie Bolkowi informacji, w jaki sposób musi on przekształcić swój kubit. Bolek po wykonaniu przekształcenia otrzymuje kopię teleportowanego kubit. Na swoim kubicie Bolek dokonuje przekształceń, wykorzystując odpowiednią bramkę Pauliego:

- bramkę  $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,
- bramkę  $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  lub odpowiednią ich kombinację.

Przekształcenia, które musi wykonać Bolek w prezentowanym przykładzie, są następujące:

- wynik  $|00\rangle$  oznacza, że po stronie Bolka kubit jest w stanie  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , a to oznacza, że nie wymaga przekształceń.
- Wynik  $|01\rangle$  oznacza, że po stronie Bolka kubit jest w stanie  $\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$ , a to oznacza, że kubit powinien zostać przekształcony bramką Pauliego X.
- Wynik  $|10\rangle$  oznacza, że po stronie Bolka kubit jest w stanie  $\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$ , a to oznacza, że kubit powinien zostać przekształcony bramką Pauliego Z.

- Wynik  $|11\rangle$  oznacza, że po stronie Bolka kubit jest w stanie  $\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle$ , a to oznacza, że kubit powinien zostać przekształcony bramką Pauliego Z, a następnie bramką X.

Jeżeli wybranym stanem Bella jest  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$ , to przekształcenia wyglądają następująco:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|000\rangle - \alpha|011\rangle + \beta|100\rangle - \beta|111\rangle] \quad (7)$$

Po działaniu bramką CNOT:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|000\rangle - \alpha|011\rangle + \beta|110\rangle - \beta|101\rangle] \quad (8)$$

Po działaniu bramką Hadamarda:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle + |1\rangle)|00\rangle] - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle + |1\rangle)|11\rangle] + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle - |1\rangle)|10\rangle] - \frac{\beta}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle - |1\rangle)|01\rangle] = \\ & = \frac{\alpha}{2}|000\rangle + \frac{\alpha}{2}|100\rangle - \frac{\alpha}{2}|011\rangle - \frac{\alpha}{2}|111\rangle + \frac{\beta}{2}|010\rangle - \frac{\beta}{2}|110\rangle - \frac{\beta}{2}|001\rangle + \frac{\beta}{2}|101\rangle = \\ & = \frac{1}{2}|00\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + \frac{1}{2}|01\rangle(-\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + \frac{1}{2}|10\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + \frac{1}{2}|11\rangle(-\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) \quad (9) \end{aligned}$$

Jeżeli wybranym stanem Bella jest  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ , to przekształcenia wyglądają następująco:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|001\rangle + \alpha|010\rangle + \beta|101\rangle + \beta|110\rangle] \quad (10)$$

Po działaniu bramką CNOT:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|001\rangle + \alpha|010\rangle + \beta|111\rangle + \beta|100\rangle] \quad (11)$$

Po działaniu bramką Hadamarda:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle + |1\rangle)|01\rangle] + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle + |1\rangle)|10\rangle] + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle - |1\rangle)|11\rangle] + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle - |1\rangle)|00\rangle] = \\ & = \frac{\alpha}{2}|001\rangle + \frac{\alpha}{2}|101\rangle + \frac{\alpha}{2}|010\rangle + \frac{\alpha}{2}|110\rangle + \frac{\beta}{2}|011\rangle - \frac{\beta}{2}|111\rangle + \frac{\beta}{2}|000\rangle - \frac{\beta}{2}|100\rangle = \\ & = \frac{1}{2}|00\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + \frac{1}{2}|01\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + \frac{1}{2}|10\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) + \frac{1}{2}|11\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) \quad (12) \end{aligned}$$

Jeżeli wybranym stanem Bella jest  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ , to przekształcenia wyglądają następująco:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|001\rangle - \alpha|010\rangle + \beta|101\rangle - \beta|110\rangle] \quad (13)$$

Po działaniu bramką CNOT:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha|001\rangle - \alpha|010\rangle + \beta|111\rangle - \beta|100\rangle] \quad (14)$$

Po działaniu bramką Hadamarda:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle + |1\rangle)|01\rangle] - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle + |1\rangle)|10\rangle] + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle - |1\rangle)|11\rangle] - \frac{\beta}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle - |1\rangle)|00\rangle] = \\ & = \frac{\alpha}{2}|001\rangle + \frac{\alpha}{2}|101\rangle - \frac{\alpha}{2}|010\rangle - \frac{\alpha}{2}|110\rangle + \frac{\beta}{2}|011\rangle - \frac{\beta}{2}|111\rangle - \frac{\beta}{2}|000\rangle + \frac{\beta}{2}|100\rangle = \\ & = \frac{1}{2}|00\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) + \frac{1}{2}|01\rangle(-\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + \frac{1}{2}|10\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + \frac{1}{2}|11\rangle(-\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) \quad (15) \end{aligned}$$

### 3. Wnioski

Teleportacja stanu kwantowego, mimo tego, że wydawała się niemożliwa do realizacji ze względu na rzekomą sprzeczność z twierdzeniem o nieklonowaniu, jest faktem. Należy podkreślić, że nie można tutaj mówić o klonowaniu nieznanego stanu kwantowego, dlatego że Alicja nie dokonuje pomiaru tego stanu. Zamiast tego wykonuje pomiary na układzie, który posiada, wykorzystując kwantową możliwość lepszego poznania stanu całego układu niż jego części (cecha niemożliwa do uzyskania w klasycznych pomiarach). Ponieważ jeden z kubitów układu mierzonego przez Alicję stanowi część stanu splątanego z kubitem Bolka, pomiary po stronie Alicji wpływają na stan kubitu Bolka. Alicja po dokonaniu pomiarów wie jednak, w jakim stanie znajduje się kubit Bolka, i kanałem klasycznym informuje go, jakich przekształceń musi dokonać, by uzyskać stan identyczny z nieznanym stanem teleportowanym.

Pozostaje jeszcze kwestia prędkości, z jaką stan jest teleportowany. Co prawda, przejście stanu kubitu Bolka do określonego stanu odbywa się natychmiast po tym, jak Alicja dokonuje pomiarów na własnym kubicie należącym do splątanej pary (czyli z prędkością większą od prędkości światła w próżni), jednak końcowe przekształcenia wymagają komunikacji kanałem klasycznym, a to ogranicza prędkość przesłania informacji do prędkości światła. Oznacza to, że w przypadku teleportacji stanu kwantowego nie można mówić o przesłaniu informacji z prędkością przekraczającą prędkość światła w próżni.

## Bibliografia

1. Brassard G., Braunstein S., Cleve R., Teleportation as a Quantum Computation. *Physica D*, 120, 1998, p. 43-47.
2. Rigolin G., Quantum Teleportation of an Arbitrary Two Qubit State and its Relation to Multipartite Entanglement. *Phys. Rev.*, 2005.
3. Vaidman L., Teleportation of Quantum States. *Phys. Rev. A*, 1994.
4. Bouwmeester D., Pan J.W., Mattle K., Eibl M., Weinfurter H., Zeilinger A., Experimental Quantum Teleportation. *Nature*, 390, 6660, 1997, p. 575-579.
5. Boschi D., Branca S., De Martini F., Hardy L., Popescu S., Experimental Realization of Teleporting an Unknown Pure Quantum State via Dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, 80, 6, 1998, p. 1121-1125.
6. Marcikic I., de Riedmatten H., Tittel W., Zbinden H., Gisin N., Long-Distance Teleportation of Qubits at Telecommunication Wavelengths. *Nature*, 421, 2003, p. 509.
7. Ursin R. et al., Quantum Teleportation Link across the Danube. *Nature*, 430, doi:10.1038/430849a, 2004, p. 849.
8. Riebe M., Häffner H., Roos C.F., Hänsel W., Ruth M., Benhelm J., Lancaster G.P.T., Körber T.W., Becher C., Schmidt-Kaler F., James D.F.V., Blatt R., Deterministic Quantum Teleportation with Atoms. *Nature*, 429, doi:10.1038/nature02570, 2004, p. 734-737.
9. Jacak M., Józwiak I., Jacak J., Gruber J., Jacak W., Wprowadzenie do kryptografii kwantowej. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2013.

## Abstract

The article presents a quantum state teleportation protocol. Alice has got a qubit dependent on teleportation, and one of the pair of entangled qubits. The second qubit of the pair of entangled qubits is sent to Bob. Alice performs transformations and measurements on the pair of qubits she possesses. These transformations lead to determine the state of the Bob's qubit. Alice informs Bob how to transform his qubit. Transformed state of the Bob's qubit corresponds exactly a state of teleportating qubit's state.