

Olgierd MAŁYSZKO
Sebastian SZKOLNY

PREDYKCJA NIETYPOWYCH ZJAWISK DYNAMICZNYCH W MASZYNACH SYNCHRONICZNYCH Z MAGNESAMI TRWAŁYMI

STRESZCZENIE *W pracy sformułowano równania matematyczne opisujące zachowanie maszyny synchronicznej wzbudzonej magnesami trwałymi w układzie współrzędnych naturalnych trójfazowych oraz w układzie współrzędnych kartezjańskich związanych z wirnikiem. Przeanalizowano zjawiska dynamiczne zachodzące w rozważanej maszynie dla różnych wartości jej parametrów ze szczególnym uwzględnieniem możliwości powstania bifurkacji i stanów chaotycznych. Do predykcji wystąpienia nietypowych zjawisk dynamicznych w analizowanej maszynie wykorzystano funkcje autoregresji oraz autokorelacji.*

Słowa kluczowe: *maszyny synchroniczne, magnesy trwałe, napęd samochodów, stany dynamiczne*

DOI: 10.5604/01.3001.0009.4812

1. WSTĘP

Rozwój cywilizacji pociąga za sobą wzrost zapotrzebowania na różne źródła energii. Głównymi źródłami energii dla współczesnego świata w dalszym ciągu są surowce kopalne, których kurczące się zasoby, wymuszają podjęcie dodatkowych działań, które koncentrują się na pozyskiwaniu energii ze źródeł odnawialny oraz zwiększenia efektywności energetycznej maszyn i urządzeń.

Jednym z głównym konsumentem światowych zasobów energetycznych jest transport. Zasoby ropy naftowej będącej źródłem energii dla transportu są na wyczerpaniu, stąd konieczność poszukiwania nowych źródeł energii. Większość producentów samochodów rozwiązanie tego problemu upatrują w zastosowaniu napędu hybrydowego lub elektrycznego. Rozwiązania układów napędowych tego typu nie są idealne, gdyż czerpią energię

dr inż. Olgierd MAŁYSZKO, dr inż. Sebastian SZKOLNY
e-mail: e-mail: [olgierd.malyszko; sebastian.szkolny]@zut.edu.pl

Katedra Elektroenergetyki i Napędów Elektrycznych, Wydział Elektryczny,
Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie
ul. Sikorskiego 37, 70-313 Szczecin

z baterii akumulatorów, których masa oraz pojemność ograniczają zasięg pojazdów. Stąd konieczność stosowania maszyn elektrycznych o najwyższych sprawnościach. W tym zakresie prym wiodą silniki synchroniczne z magnesami trwałymi oraz synchroniczne reluktancyjne [12].

Głównym ograniczeniem jest tu bez wątpienia źródło energii elektrycznej. Również same silniki elektryczne do napędów samochodów hybrydowych i elektrycznych mają kilka istotnych wad. W przypadku rozwiązań bezprzekładniowych jednostka napędowa musi być znacznie przewymiarowana, aby zagwarantować istnienie odpowiednio dużego momentu obrotowego przy starcie i dla małych prędkości obrotowych. Stosowanie wielostopniowych skrzyń biegów komplikuje cały system oraz powoduje zwiększenie gabarytów i masy wypadkowej układu. Preferowane obecnie rozwiązania wykorzystujące silniki z magnesami trwałymi mają dodatkowo inną istotną wadę, którą jest ich zachowanie przy dużych prędkościach obrotowych (indukowanie wysokiego napięcia w układzie zasilającym). Rozwiązaniem tych problemów może być maszyna umożliwiająca regulację strumienia magnesów trwałych za pomocą dodatkowej cewki zasilanej z niezależnego źródła prądu stałego o regulowanej wartości [1, 4, 5, 9]. W przypadku pojazdów samochodowych w wyniku oddziaływania silnika elektrycznego z aktywnym momentem obciążenia może dochodzić do powstawania nietypowych zjawisk dynamicznych [4, 9, 11].

2. MODEL MATEMATYCZNY

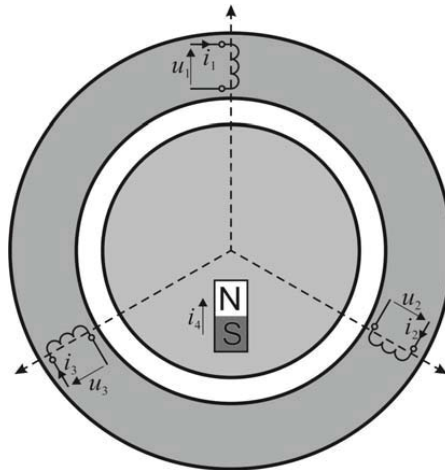
Model matematyczny przetworników energii elektrycznej to układ równań opisujących ich wyidealizowane cechy. Stworzenie odpowiedniego modelu pociąga za sobą konieczność przyjęcia wielu założeń upraszczających, które są kompromisem między prostotą modelu, a dokładnością odwzorowania zjawisk fizycznych w przetworniku energii. Do opisu maszyn elektrycznych w postaci modeli obwodowych o bardzo różnym stopniu szczegółowości wykorzystuje się formalizm Lagrange'a. Formalizm ten opiera się na opisie energii elementów składowych układów elektromechanicznych [2-3, 5, 11]. Model matematyczny analizowanej maszyny elektrycznej o regulowanym strumieniu magnesów trwałych można przedstawić w postaci równań różniczkowych zawierających parametry reprezentujące zjawiska magnetyczne (prądy i , indukcyjności L i M) oraz elektryczne (napięcia u i rezystancje R). Przykładowe ogólne równanie napięciowo-prądowe obwodu jednego pasma fazowego v badanej maszyny o n fazach stojana i m fazach wirnika można zapisać następująco [1-3, 5, 11] (gdzie: \mathcal{G} – kąt obrotu wirnika):

$$u_v = R_v \cdot i_v + \sum_{\mu=1}^{n+m} \left(M_{v,\mu} \cdot \frac{\partial i_\mu}{\partial t} + \frac{\partial M_{v,\mu}}{\partial \mathcal{G}} \frac{d\mathcal{G}}{dt} \cdot i_\mu \right) \quad (1)$$

Oznaczając $M_{v,\mu} = L_v$ dla $v = \mu$, otrzymuje się dla jednej z faz:

$$u_1 = R_1 \cdot i_1 + L_1 \cdot \frac{\partial i_1}{\partial t} + \frac{dL_1}{dt} \cdot i_1 + M_{1,2} \cdot \frac{\partial i_2}{\partial t} + \frac{dM_{1,2}}{dt} \cdot i_2 + \\ + M_{1,3} \cdot \frac{\partial i_3}{\partial t} + \frac{dM_{1,3}}{dt} \cdot i_3 + M_{1,4} \cdot \frac{\partial i_4}{\partial t} + \frac{dM_{1,4}}{dt} \cdot i_4 \quad (2)$$

W powyższym równaniu napięciowym jednej fazy strumień od magnesów trwałych jest wywołany przez zastępczy prąd i_4 (rys. 1).



Rys. 1. Schemat zastępczy maszyny wzbudzonej magnesami trwałymi

Układ równań napięciowych opisujących poszczególne obwody uzwojeń stojana, należy uzupełnić o równanie ruchu (3) (gdzie: J – moment bezwładności, B – współczynnik tłumienia, T_L – moment obciążenia, W_c – energia kogeneracji):

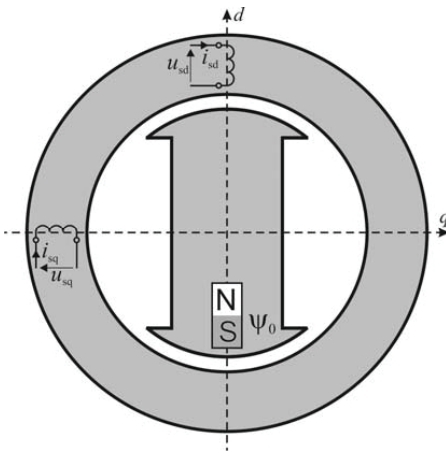
$$J \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + B \frac{d \vartheta}{dt} + T_L = \frac{\partial W_c(\vartheta, i_v, i_4)}{\partial \vartheta} \quad (3)$$

Przestrzenny charakter zjawisk elektromagnetycznych zachodzący w przedstawionej maszynie sprawia, że indukcyjności własne L oraz wzajemne M modeli obwodowych określonych w naturalnych współrzędnych nie mają stałych wartości – zmieniają się one w zależności od kąta położenia wirnika, a także natężenia prądu. Zależność wartości parametrów od kąta położenia wirnika można wyeliminować poprzez odpowiednie modyfikacje modelu matematycznego maszyny [2]. Do analizy maszyny zastosowano zapis wektorowy, który pozwala na stworzenie najbardziej uniwersalnego modelu matematycznego maszyny prądu przemiennego. Pozwala on na uproszczenie i usystematyzowanie postaci równań; przy czym wielkości wektorowe mają określony sens fizyczny, dzięki czemu można je mierzyć i odwzorowywać w konkretnych układach napędowych.

Wektorowy zapis równań pozwala na analizę maszyny elektrycznej w dowolnym układzie współrzędnych związanych ze stojanem, wirnikiem lub wektorami napięć, strumieni skojarzonych czy prądów. Pozwala również, dzięki transformacji do wspólnego dla stojana i wirnika układu współrzędnych wirujących z dowolną prędkością, na wyeliminowanie reaktancji wzajemnej zależnej od kąta obrotu wirnika [2].

Transformując układ równań modelu matematycznego z układu współrzędnych naturalnych (trójfazowych) do układu wektorowego zapisanego w układzie współrzędnych kartezjańskich związanego z wirnikiem (dq) (rys. 2) otrzymuje się następujący układ równań różniczkowych, (gdzie: ω_m – prędkość kątowa rotora, β – współczynnik tłumienia):

$$\begin{aligned} u_{sd} &= r_s i_{sd} + \frac{d\Psi_{sd}}{d\tau} - \omega_m \Psi_{sq} \\ u_{sq} &= r_s i_{sq} + \frac{d\Psi_{sq}}{d\tau} + \omega_m \Psi_{sd} \\ \frac{d\omega_m}{d\tau} &= \frac{1}{T_m} \left[(\Psi_{sd} i_{sq} - \Psi_{sq} i_{sd}) - t_l - \beta \omega_m \right] \\ \Psi_{sd} &= L_{sd} i_{sd} + \Psi_0 \\ \Psi_{sq} &= L_{sq} \cdot i_{sq} \end{aligned} \quad (4)$$



Rys. 2. Schemat zastępczy analizowanej maszyny z uzwojeniem pomocniczym w układzie dq

Model ten charakteryzuje się najmniejszym poziomem komplikacji opisu matematycznego maszyny wzbudzonej magnesami trwałymi. Można go dodatkowo rozbudować, uwzględniając np. zjawiska dynamiczne [4, 5, 9, 11]. Wstępne badania wykazały, że przyjęta struktura modelu matematycznego prawidłowo odzwierciedla zjawiska zachodzące w analizowanej maszynie.

3. ANALIZA WYBRANYCH ZJAWISK DYNAMICZNYCH

Z uwagi na nieliniowość indukcyjności występujących w modelu (4) jest on trudny do analizy matematycznej, dlatego też konieczne było jego pewne uproszczenie.

$$\begin{aligned} \frac{di_{sd}}{d\tau} &= \frac{1}{L_{sd}} [u_{sd} - r_s i_{sd} + \omega_m L_{sq} i_{sq}] \\ \frac{di_{sq}}{d\tau} &= \frac{1}{L_{sq}} [u_{sq} - r_s i_{sq} - \omega_m (L_{sd} i_{sd} + \Psi_0)] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{d\omega_m}{d\tau} = \frac{1}{T_m} [\Psi_0 i_{sq} + (L_{sd} - L_{sq}) i_{sd} i_{sq} - t_l - \beta \omega_m]$$

Przedstawiony model matematyczny silnika synchronicznego z magnesami trwałymi jest nieliniowy i ma trzy zmienne stanu, które są ze sobą silnie powiązane. W związku z tym system ten może generować złożone zachowania dynamiczne, takie jak bifurkacje czy chaos. Przedstawiony model posiada również kilka parametrów, które w zależności od konstrukcji maszyny mogą przyjmować różne wartości. W celu ułatwienia analizy można ograniczyć liczbę parametrów poprzez odpowiednie zdefiniowanie nowego układu współrzędnych oraz przyjęcie założenia, że indukcyjności w osiach d i q są sobie równe, czyli $L_{sd} = L_{sq} = L$. Do dalszej analizy przyjęto nowy układ współrzędnych opisany następującymi równaniami:

$$i_{sd} = \frac{r_s \beta}{L \Psi_0} i_d, \quad i_{sq} = \frac{r_s \beta}{L \Psi_0} i_q, \quad \omega_m = \frac{r_s}{L} \omega, \quad \tau = \frac{L}{r_s} t \quad (6)$$

Po przekształceniach otrzymuje się znormalizowany układ równań opisujący uproszczony model silnika:

$$\begin{aligned} \frac{di_d}{dt} &= -i_d + \omega i_q + u_d \\ \frac{di_q}{dt} &= (\gamma - i_d) \omega - i_q + u_q \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\sigma (\omega - i_q) - t_p \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie:

$$\gamma = -\frac{\Psi_0^2}{r_s \beta}, \quad \sigma = \frac{L \beta}{r_s T_m}, \quad u_d = \frac{L \Psi_0}{r_s \beta} u_{sd}, \quad u_q = \frac{L \Psi_0}{r_s \beta} u_{sq}, \quad t_p = \frac{L^2}{r_s^2 T_m} t_l$$

Dalszą analizę przeprowadza się dla trzech następujących przypadków [6]:

1. $u_d = u_q = t_p = 0$
2. $u_q = t_p = 0, u_d \neq 0$
3. $u_d, u_q, t_p \neq 0$

3.1. Przypadek $u_d = u_q = t_p = 0$

W pierwszym przypadku, to jest dla warunków $u_d = u_q = t_p = 0$ (fizycznie odpowiada to sytuacji wyłączonoego spod napięcia nieobciążonego silnika) otrzymuje się szczególnie przypadek znanego z teorii chaosu równania Lorenza [6-8]:

$$\begin{aligned} \frac{di_d}{dt} &= -i_d + \omega i_q \\ \frac{di_q}{dt} &= (\gamma - i_d)\omega - i_q \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\sigma(\omega - i_q) \end{aligned} \quad (8)$$

Równania Lorenza jest to układ trzech nieliniowych równań różniczkowych modelujących m.in. zjawisko konwencji termicznej w atmosferze. Dla pewnego zbioru parametrów dynamika układu jest chaotyczna, a wykresy zmiennych w przestrzeni fazowej przedstawiają tak zwany „dziwny atraktor”.

W celu przeanalizowania dynamiki układu należy znaleźć wartości własne, które są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ gdzie: \mathbf{A} – macierz Jacobiego funkcji (8), \mathbf{I} – macierz jednostkowa, λ – wartości własne macierzy \mathbf{A} .

Macierz Jacobiego funkcji (8) ma postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & \omega & i_q \\ -\omega & -1 & \gamma - i_d \\ 0 & \sigma & -\sigma \end{bmatrix} \quad (9)$$

natomiast wielomian charakterystyczny macierzy (9) wynosi:

$$D(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & \omega & i_q \\ -\omega & -1-\lambda & \gamma - i_d \\ 0 & \sigma & -\sigma - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

Punkty stałe modelu (8) łatwo wyznaczyć rozwiązując układ równań (8) dla warunku $\frac{di_d}{dt} = 0, \frac{di_q}{dt} = 0, \frac{d\omega}{dt} = 0$. Wynoszą one odpowiednio: $\omega_{eq} = 0, i_{qeq} = 0, i_{deq} = 0$ oraz

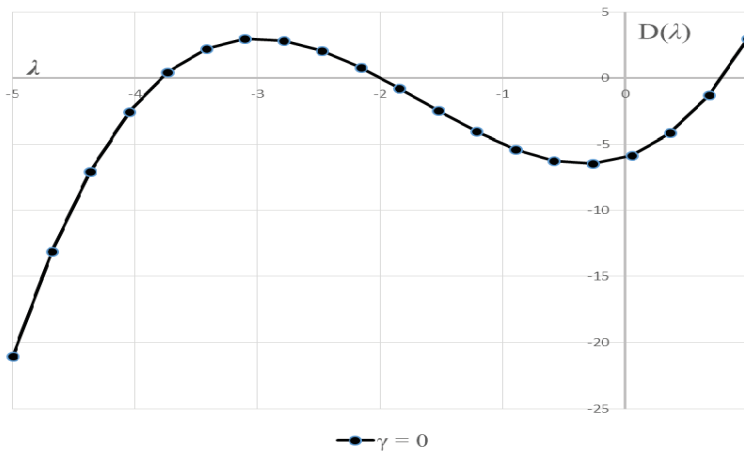
$$\omega_{eq} = \pm\sqrt{\gamma-1}, i_{qeq} = \pm\sqrt{\gamma-1}, i_{deq} = \gamma-1.$$

W punkcie stałym $\omega_{eq} = \pm\sqrt{\gamma-1}$, $i_{qeq} = \pm\sqrt{\gamma-1}$, $i_{deq} = \gamma-1$ wielomian charakterystyczny wynosi:

$$D(\lambda) = \lambda^3 + (2 + \sigma)\lambda^2 + (\sigma + \gamma)\lambda + 2\sigma(\gamma - 1) = 0 \tag{11}$$

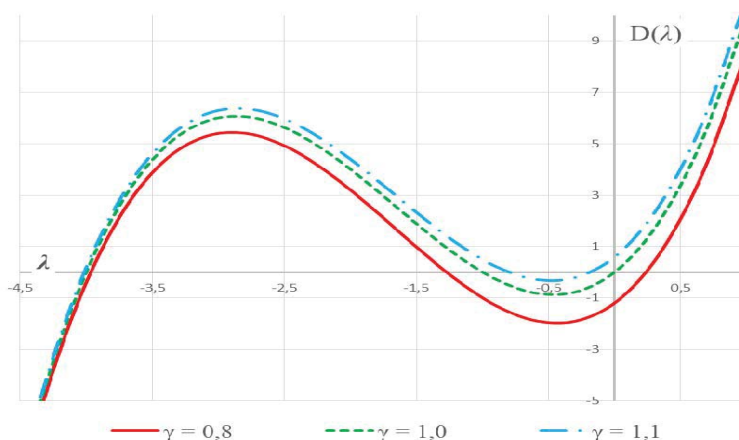
Wielomian charakterystyczny (11) jest równaniem trzeciego rzędu, co oznacza, że ma zawsze trzy pierwiastki, które są tożsamościowo równe wartościom własnym λ_i . Ponieważ w tym przypadku liczba wartości własnych jest liczbą nieparzystą to jedna z wartości własnych jest zawsze liczbą rzeczywistą, a dwie pozostałe albo liczbami rzeczywistymi albo zespolonymi sprzężonymi. W zależności od znaku i wartości części rzeczywistych i urojonych poszczególnych wartości własnych λ_i układ dynamiczny ma różne typy rozwiązań.

Dla γ z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$ układ ma jedno rozwiązanie – węzeł stabilny $[0, 0, 0]$. Wielomian charakterystyczny ma trzy rzeczywiste pierwiastki (trzy rzeczywiste wartości własne) – jeden większy i dwa mniejsze od zera. Pokazano to na rysunku 3.



Rys. 3. Wykres $D(\lambda)$ wg (11) dla $\sigma = 3$ i $\gamma = 0$

W miarę zwiększania wartości parametru γ dodatni pierwiastek przesuwa się w stronę liczb ujemnych i dla pewnej wartości parametru γ przechodzi przez zero. W tym momencie zachodzi pierwsza bifurkacja. Po przekroczeniu punktu bifurkacji układ posiada trzy rzeczywiste, ujemne wartości własne. Oznacza to, że punkt $[0, 0, 0]$ staje się teraz punktem niestabilnym, a pojawiają się dwa nowe węzły stabilne w punktach $\omega_{eq} = \pm\sqrt{\gamma-1}$, $i_{qeq} = \pm\sqrt{\gamma-1}$, $i_{deq} = \gamma-1$. Punkt bifurkacji łatwo znaleźć wstawiając do równania (11) warunek $\lambda = 0$. Bifurkacja zachodzi dla $\gamma = 1$. Przedstawiono to schematycznie na rysunkach 4.

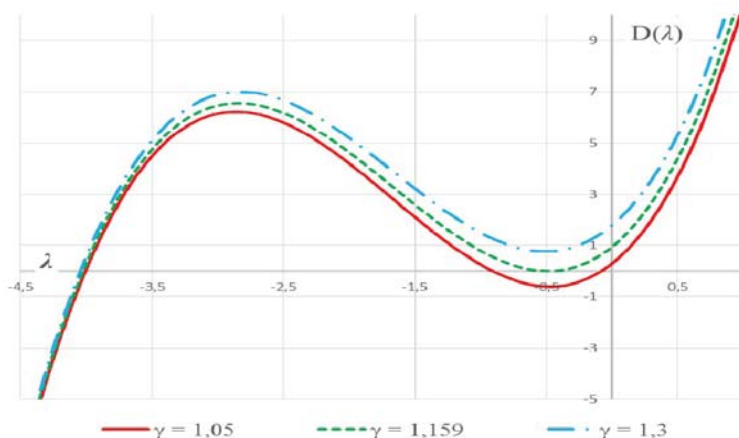


Rys. 4. Wykres $D(\lambda)$ wg (11) dla $\sigma = 3$ i różnych wartości γ

Następna bifurkacja zachodzi w dla $\gamma = \frac{1}{3} \left(\sigma^2 + \sigma + 4 - \frac{1}{2} \left(a + \frac{(5\sigma - 2)^2}{a} - 5\sigma + 2 \right)^2 \right)$

gdzie $a = \sqrt[3]{-8 - 48\sigma + 174\sigma^2 - 91\sigma^3 + 6\sqrt{-204\sigma^6 + 162\sigma^5 + 42\sigma^4 + 132\sigma^3 - 180\sigma^2 + 48\sigma}}$.

Znalezienie tego punktu nie jest trudne, ale wymaga przeprowadzenia żmudnych rachunków. Dla przykładowej wartości $\sigma = 3$ bifurkacja zachodzi dla $\gamma = 1,159197597$. W tym punkcie znikają dwie rzeczywiste wartości własne, a w ich miejsce pojawiają się zespolone wartości własne. Tym samym znikają dwa węzły stabilne a pojawiają się dwa ogniska stabilne. Pokazano to na rysunkach 5.



Rys. 5. Wykres $D(\lambda)$ wg (11) dla $\sigma = 3$ i różnych wartości γ

Trzecia bifurkacja zachodzi dla $\gamma = 5,333$ (dla $\sigma = 3$). Jest to tak zwana bifurkacja homokliniczna i od tego punktu pojawiają się niestabilne orbity okresowe. Znalezienie tego punktu nie jest możliwe za pomocą prostej analizy zlinearyzowanego systemu. Można natomiast zauważyć to na symulacjach numerycznych, gdzie trajektoria najpierw oscyluje w pobliżu pewnej krzywej a następnie spiralnie podąża do punktu stałego (rys. 6e).

Ostatnia, czwarta bifurkacja, jest to tak zwana subkrytyczna bifurkacja Hopfa. Zachodzi ona wtedy, kiedy zmieniają znak części rzeczywiste zespolonych wartości własnych. Oznacza to, że w punkcie bifurkacji części rzeczywiste są równe zero. Tym samym zespolone wartości własne można zapisać, jako $\lambda = \pm j\delta$ gdzie δ jest liczbą rzeczywistą zależną od parametrów γ i σ . Wstawiając $\lambda = j\delta$ do równania (11) otrzymuje się układ równań:

$$\begin{cases} -\delta^3 + (\sigma + \gamma)\delta = 0 \\ -(2 + \sigma)\delta^2 + 2\sigma(\gamma - 1) = 0 \end{cases}$$

który, jest spełniony dla $\gamma = \frac{\sigma(\sigma + 4)}{\sigma - 2}$. Dla przykładowego $\sigma = 3$ bifurkacja Hopfa zachodzi dla $\gamma = 21$. Powyżej tego punktu znikają stabilne rozwiązania i układ posiada dynamikę chaotyczną (rys. 6f). Przy założeniu, że $\gamma > 0$ bifurkacja Hopfa występuje tylko dla $\sigma > 2$. W przeciwnym wypadku, dla $\sigma < 2$, bifurkacja Hopfa nie wystąpi dla żadnej wartości parametru γ (oczywiście przy założeniu, że $\gamma > 0$) i tym samym układ nie będzie generował dynamiki chaotycznej.

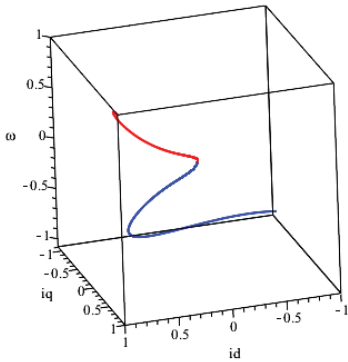
W tabeli 1 zestawiono wyniki analizy dla przykładowego parametru $\sigma = 3$ w zależności od różnych wartości parametru γ .

TABELA 1

Wartości własne funkcji (8) w zależności od parametru γ (dla $\sigma = 3$)

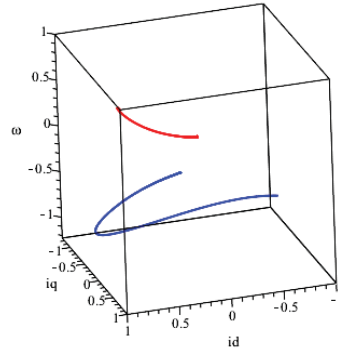
γ	Re(λ_1)	Im(λ_1)	Re(λ_2)	Im(λ_2)	Re(λ_3)	Im(λ_3)	Uwagi
(0-1)	+	0	-	0	-	0	Węzeł stabilny
1	0	0	-	0	-	0	I bifurkacja
(1-1,159)	-	0	-	0	-	0	2 węzły stabilne
1,159							II bifurkacja
(1,159-5,333)	-	0	-	-	-	+	2 ogniska stabilne
5,333							III bifurkacja
(5,333-21)	-	0	-	-	-	+	2 ogniska stabilne
21	-	0	0	-	0	+	IV bifurkacja (bifurkacja Hopfa)
>21	-	0	+	-	+	+	Dynamika chaotyczna

Na rysunkach 6a-f pokazano przykładowe trajektorie stabilne oraz chaotyczną dla różnych wartości parametrów γ oraz różnych warunków początkowych $[i_d(0) = 1, i_q(0) = 1, \omega(0) = 1]$ (kolor czerwony) oraz $[i_d(0) = -1, i_q(0) = -1, \omega(0) = -1]$ (kolor niebieski).



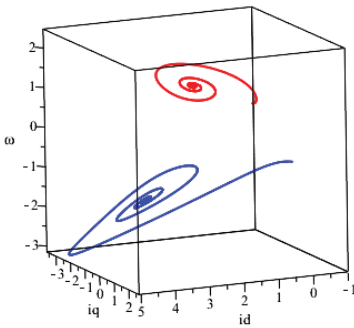
Rys. 6a.

Trajektoria zmierza do węzła stabilnego $[0, 0, 0]$
dla $\sigma = 3$ i $\gamma = 0,7$



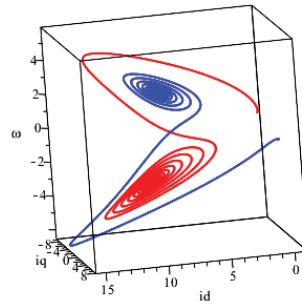
Rys. 6b.

Dwa węzły stabilne dla $\sigma = 3$ i $\gamma = 1,1$



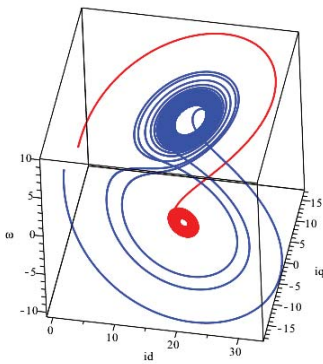
Rys. 6c.

Dwa ogniska stabilne dla $\sigma = 3$ i $\gamma = 4$



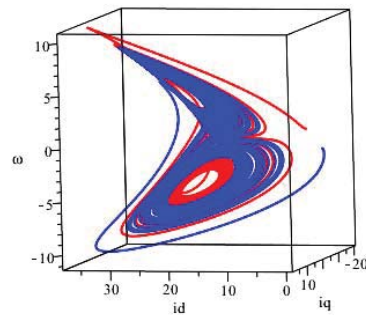
Rys. 6d.

Dwa ogniska stabilne dla $\sigma = 3$ i $\gamma = 10$



Rys. 6e.

Dwa ogniska stabilne dla $\sigma = 3$ i $\gamma = 19,79$



Rys. 6f.

Trajektoria chaotyczna dla $\sigma = 3$ i $\gamma = 22$

3.2. Przypadek, $u_q = t_p = 0, u_d \neq 0$

W drugim przypadku ($u_q = t_p = 0, u_d \neq 0$) analiza wygląda podobnie jak w pierwszym punkcie, przy czym system ma jeden dodatkowy parametr u_d . Układ równań ma teraz postać:

$$\frac{di_d}{dt} = -i_d + \omega i_q + u_d$$

$$\frac{di_q}{dt} = (\gamma - i_d) \omega - i_q$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\sigma(\omega - i_q)$$

Punkty stałe wynoszą odpowiednio: $\omega_{eq} = \pm\sqrt{\gamma - 1 - u_d}, i_{qeq} = \pm\sqrt{\gamma - 1 - u_d}, i_{deq} = \gamma - 1$ oraz $\omega_{eq} = 0, i_{qeq} = 0, i_{deq} = 0$ natomiast wielomian charakterystyczny:

$$D(\lambda) = \lambda^3 + (2 + \sigma)\lambda^2 + (\sigma + \gamma - u_d)\lambda + 2\sigma(\gamma - u_d - 1) = 0$$

Pierwsza bifurkacja zachodzi w punkcie $\gamma = 1 + u_d$. Natomiast bifurkacja Hopfa zachodzi dla $\gamma = \frac{\sigma(\sigma + 4) + u_d(\sigma - 2)}{\sigma - 2}$ lub dla $u_d = \frac{\gamma(\sigma - 2) - \sigma(\sigma + 4)}{\sigma - 2}$.

3.3. Przypadek $u_d, u_q, t_p \neq 0$

W trzecim przypadku ($u_d, u_q, t_p \neq 0$) układ równań ma postać (7) i zawiera w sumie pięć parametrów. Znalezienie punktów stałych nie jest łatwe, ponieważ konieczne jest rozwiązywanie równań trzeciego stopnia, co jest dość żmudne a otrzymane wyniki są trudne w zastosowaniu do analizy matematycznej. Pewne szczegóły takiej analizy można znaleźć w pracy [6].

Z przedstawionej analizy wynika, że w pewnych sytuacjach maszyna synchroniczna z magnesami trwałymi opisana za pomocą modelu matematycznego (7) posiada skomplikowaną dynamikę począwszy od pojedynczego punktu stałego, poprzez kilka bifurkacji aż do dynamiki chaotycznej włącznie.

4. METODY ANALIZY DANYCH DOŚWIADCZALNYCH

Przedstawiona w poprzednim punkcie metoda analizy dynamiki polegająca na badaniu wartości własnych możliwa jest do zastosowania tylko w badaniach teoretycznych, kiedy mamy funkcje matematyczne opisujące dany układ dynamiczny. Dynamikę układu można również badać korzystając z danych doświadczalnych. Do tego celu można wykorzystać funkcje autoregresji i autokorelacji. W dalszej części artykułu opisano

podstawy teoretyczne oraz przeanalizowano możliwość ich zastosowania do badania nietypowych stanów dynamicznych w maszynach synchronicznych z magnesami trwałymi.

4.1. Autoregresja

Autoregresja jest metodą służącą do przewidywania przyszłych wartości szeregu czasowego. Jest to, inaczej mówiąc, regresja statystyczna, w której szukana zmienna jest przyszłą wartością szeregu czasowego i nazywana jest zmienną objaśnianą (lub zależną), a zmienne objaśniające (lub inaczej nazywane niezależne) to wartości szeregu czasowego z przeszłości.

W najprostszym przypadku używa się autoregresji liniowej, w której wykorzystuje się model regresji liniowej (zakładany model zależności między zmiennymi zależnymi a niezależnymi jest funkcją liniową).

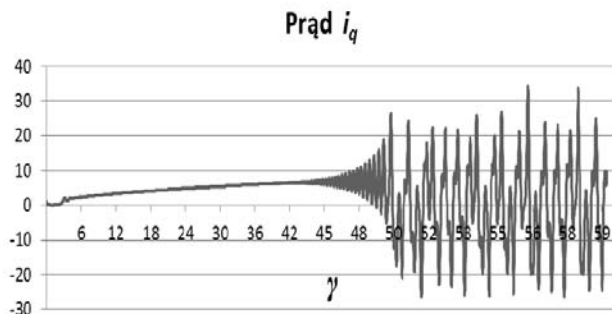
$$X_{n+1} = a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + \dots + a_k X_{n-k} + c + \varepsilon \quad (12)$$

gdzie:

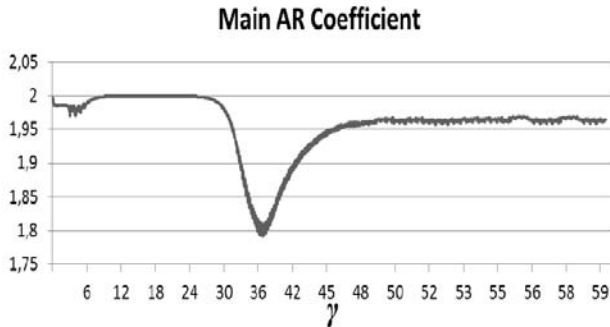
- X_i – wartości szeregu czasowego, a_0, \dots, a_k
- c – współczynniki modelu,
- ε – błąd modelu.

W celu estymacji współczynników modelu statystycznego wykorzystuje się zazwyczaj metodę najmniejszych kwadratów i jej pochodne. Metoda ta jest prosta i łatwa w zastosowaniu, ale ma swoje wady jak np. małą odporność na elementy odstające, czyli posiadające nietypową wartość. W bardziej zaawansowanych analizach stosuje się odporne metody statystyczne (ang. robust methods) np. metody rangowe.

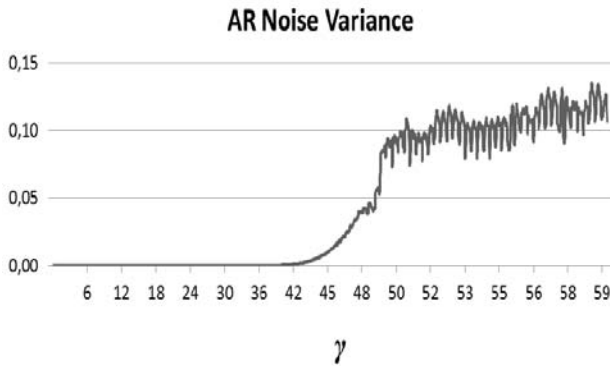
Na rysunkach 7a-7c pokazano przebieg prądu i_q dla różnych wartości parametru γ oraz wyznaczone za pomocą pakietu LabView wartości funkcji autoregresji (Main AR Coefficient) oraz szumu (AR Noise Variance). W miejscu przejścia z obszaru stabilnej pracy do obszaru chaotycznego funkcja autoregresji znacznie zmienia swoją wartość. Ponadto w obszarze chaotycznym gwałtownie rośnie poziom szumu. Właściwości te można wykorzystać do predykcji zachowań chaotycznych.



Rys. 7a. Przebieg prądu i_q dla różnych wartości parametru γ



Rys. 7b. Wartości funkcji autoregresji (Main AR Coefficient) wyznaczonej dla prądu i_q



Rys. 7c. Wartość szumu (AR Noise Variance) funkcji autoregresji wyznaczonej dla prądu i_q

4.2. Funkcja autokorelacji

Funkcja autokorelacji stanowi miarę podobieństwa trajektorii w chwili t do jej wartości w chwili późniejszej ($t + \tau$). Inaczej mówiąc jest to statystyka opisująca w jakim stopniu dany wyraz zależy od wyrazów poprzednich w szeregu czasowym. Autokorelacja jest funkcją, która argumentowi naturalnemu k przypisuje wartość współczynnika korelacji Pearsona pomiędzy szeregiem czasowym, a tym samym szeregiem cofniętym o k jednostek czasu.

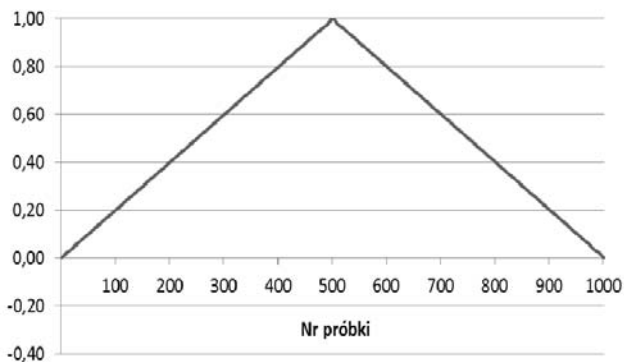
Dla układu z dyskretnego funkcja autokorelacji opisana jest wzorem:

$$c(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \hat{x}_{i+m} \hat{x}_i \right) \tag{13}$$

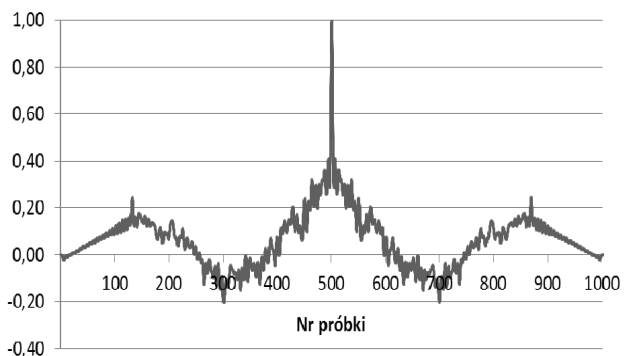
gdzie: $\hat{x}_i = x_i - \bar{x}$, $\bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \right)$

Trajektorie chaotyczne są nieregularne i nie mają żadnych własności powtarzalnych okresowo. Oznacza to, że trajektorie chaotyczne nie są skorelowane z wcześniejszymi wartościami. W przeciwieństwie do nich trajektorie stabilne są skorelowane

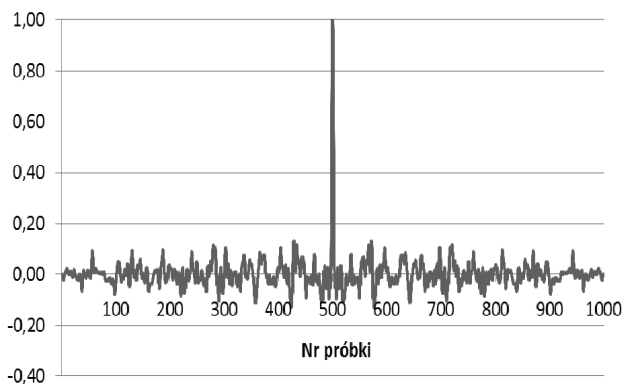
z wcześniejszymi wartościami. W związku z tym, funkcja autokorelacji będzie miała inny przebieg dla obszarów pracy stabilnej i chaotycznej. Pokazano to na rysunkach 8a-8c, gdzie przedstawiono wykresy funkcji autokorelacji otrzymane za pomocą pakietu LabView dla prądu i_q , dla różnych wartości parametru γ .



Rys. 8a. Wykres funkcji autokorelacji dla wartości prądu i_q dla $\gamma = 5,333$ (obszar stabilny)



Rys. 8b. Wykres funkcji autokorelacji dla wartości prądu i_q dla $\gamma = 21$ (granica obszaru stabilnego)



Rys. 8c. Wykres funkcji autokorelacji dla wartości prądu i_q dla $\gamma = 30$ (obszar chaotyczny)

W obszarze stabilnej pracy funkcja autokorelacji ma kształt trójkątny z wartością maksymalną w środku oraz liniowo malejącymi wartościami w miarę wzrostu odległości między kolejnymi wyrazami szeregu czasowego. W obszarze chaotycznym wartość funkcji autokorelacji spada praktycznie do zera nawet dla bliskich wyrazów. Tę różnicę można wykorzystać do prognozowania zachowań chaotycznych.

5. WNIOSKI

W maszynie synchronicznej z magnesami trwałymi można zaobserwować zmienność wartości indukcyjności synchronicznych [10], będących np. efektem nasycenia magnetowodu. Może to mieć wpływ na pracę maszyny w stanach dynamicznych.

Uproszczony model analizowanego silnika opisany jest równaniem Lorenza (opisującym m.in. zjawisko konwekcji termicznej w atmosferze). Równanie to, dla pewnych zakresów wielkości parametrów, posiada dynamikę chaotyczną. Do prognozowania występowania obszarów pracy chaotycznej, z danych doświadczalnych, można wykorzystać funkcje autoregresji i autokorelacji. W rzeczywistym układzie zjawiska bifurkacji i chaosu mogą się pojawić w przypadku dodatkowego zewnętrznego zakłócenia, np. kinetycznego wzbudzenia łożysk.

Zastosowane w pracy funkcje autoregresji i autokorelacji, jak pokazały przedstawione wyniki badań, umożliwiają wcześniejsze wykrywanie nietypowych stanów dynamicznych takich jak, chaos czy bifurkacje. Konieczne jest jednak przeprowadzenie dalszych badań w celu zdefiniowania miejsca wystąpienia bifurkacji lub pojawienia się chaosu w zależności od typu i wielkości maszyny.

LITERATURA

1. May H., Pałka R., Paplicki P., Szkolny S., Candere W.-R.: Modified concept of permanent magnet excited synchronous machines with improved high-speed features. Archives of Electrical Engineering, vol. 60(4), s. 531-540, 2011.
2. Sobczyk T.J.: Problemy modelowania matematycznego prądnic synchronicznych wzbudzonych magnesami trwałymi. Prace Instytutu Elektrotechniki, vol. LIV, zeszyt 231, s. 99-123, 2007.
3. Szkolny S.: Modelowanie tarczowych maszyn synchronicznych wzbudzonych magnesami trwałymi z uwzględnieniem zastępczego obwodu tłumiącego. Transactions on computer applications in electrical engineering: XIII Conference ZKwE'08, Poznań, 2008, s. 223-224.
4. Małyżko O., Pałka R., Szkolny S.: Analiza stanów dynamicznych maszyny elektrycznej z regulacją strumienia magnesów trwałych do napędu samochodów. Prace Naukowe Instytutu Maszyn, Napędów i Pomiarów Elektrycznych Politechniki Wrocławskiej. Seria: Studia i Materiały 66. Zagadnienia maszyn, napędów i pomiarów elektrycznych T. 1, nr 32, s. 134-139, 2012.
5. Candere W.-R., May H., Pałka R., Paplicki P.: Szkolny S., Model obwodowy maszyny elektrycznej z regulacją strumienia magnesów trwałych do napędu samochodów. Prace Naukowe Instytutu Maszyn, Napędów i Pomiarów Elektrycznych Politechniki Wrocławskiej. Seria: Studia i Materiały 66. Zagadnienia maszyn, napędów i pomiarów elektrycznych T. 1, nr 32, s. 140-145, 2012.

6. Zhong Li, Jin Bae Park, Young Hoon Joo, Bo Zhang, Guanrong Chen: Bifurcations and Chaos in a Permanent-Magnet Synchronous Motor. IEEE Transactions on Circuits and Systems—I: Fundamental Theory and Applications, vol. 49, nr 3, s. 383-387, marzec 2002.
7. Guo-Qing Huang, Xin Wu: Hopf Bifurcation of Permanent-magnet Synchronous Motor Chaos System. International Conference on Computational and Information Sciences, ICCIS 2011, October 21-23, 2011, Chengdu, Sichuan, China, s. 1204-1207.
8. Xinghua Zhang.: Inverse System Control for Chaos of Salient Permanent Magnet Synchronous Motors. International Conference on Electrical and Control Engineering (ICECE2011), Sept. 16-18, 2011 Yichang, China, s. 1218-1221.
9. Małyszko O., Pałka R., Szkolny S.: Analiza nietypowych zjawisk w maszynie elektrycznej z regulacją strumienia magnesów trwałych do napędu samochodów. Przegląd Elektrotechniczny, R. 89, nr 11, s. 159-162, 2013.
10. Szkolny S., Jakubowski T.: Identyfikacja parametrów modelu matematycznego maszyny elektrycznej z regulacją strumienia magnesów trwałych. Maszyny Elektryczne: zeszyty problemowe, nr 108, s. 15-20, 2015.
11. Małyszko O., Szkolny S.: Badanie nietypowych zjawisk dynamicznych w maszynach synchronicznych z magnesami trwałymi. LII Międzynarodowe Sympozjum Maszyn Elektrycznych, SME, s. 205-214, Kazimierz Dolny, 2016.
12. Szkolny S.: Zastosowanie technik szybkiego prototypowania w projektowaniu i badaniu elektromechanicznych przetworników energii. LII Międzynarodowe Sympozjum Maszyn Elektrycznych, SME, s. 479-488, Kazimierz Dolny, 2016.

Przyjęto do druku dnia 02.12.2016 r.

PREDICTION OF UNUSUAL DYNAMICAL BEHAVIOR OF PERMANENT-MAGNET SYNCHRONOUS MOTOR

Olgiard MAŁYSZKO, Sebastian SZKOLNY

ABSTRACT *This paper presents mathematical equations describing the unusual dynamical behaviour of a permanent-magnet synchronous motor. The dynamical behaviour of the proposed machine has been defined both in real three phase co-ordinates and in Cartesian co-ordinates systems. The dynamic phenomena occurring in the machine for different values of its parameters, with particular reference to the possibility of bifurcation and chaotic states have been analysed. The autocorrelation and the autoregressive functions have been used for the prediction of the unusual dynamical behaviour of the permanent-magnet synchronous motor.*

Keywords: *synchronous machines, permanent magnets, vehicle drive, dynamic states*

Dr inż. Olgierd MALYSZKO jest absolwentem Wydziału Elektrycznego Politechniki Szczecińskiej, gdzie w 2003 roku uzyskał tytuł doktora nauk technicznych. Aktualnie pracuje jako adiunkt w Katedrze Elektroenergetyki i Napędów Elektrycznych na Wydziale Elektrycznym Zachodniopomorskiego Uniwersytetu Technologicznego w Szczecinie (dawniej Politechnika Szczecińska). Jest autorem i współautorem kilkudziesięciu artykułów i referatów dotyczących głównie pracy systemu elektroenergetycznego. Aktualnie w pracy naukowej zajmuje się wdrażaniem nowych metod badania stabilności systemu elektroenergetycznego.

Dr inż. Sebastian SZKOLNY ukończył studia wyższe na Wydziale Elektrycznym Politechniki Szczecińskiej w 2001 roku, uzyskując stopień magistra inżyniera. W tym samym roku podjął studia doktoranckie zakończone w 2007 roku obroną pracy doktorskiej. Aktualnie pracuje jako adiunkt w Katedrze Elektroenergetyki i Napędów Elektrycznych na Wydziale Elektrycznym Zachodniopomorskiego Uniwersytetu Technologicznego w Szczecinie (dawniej Politechnika Szczecińska). Jest współautorem ponad dwudziestu ekspertyz dotyczących oddziaływania farm wiatrowych na system elektroenergetyczny. Jest także autorem i współautorem kilkudziesięciu publikacji i referatów wygłoszonych na konferencjach krajowych i zagranicznych. Obecnie jego zainteresowania naukowe związane są z analizą elektromechanicznych przetworników energii współpracujących z odnawialnymi źródłami energii oraz technikami ich szybkiego prototypowania.

