



Władysław KOC, Piotr CHROSTOWSKI

## **SKUTECZNOŚĆ WYKORZYSTYWANIA WYKRESU STRZAŁEK W ANALIZIE UKSZTAŁTOWANIA POZIOMEGO TORU**

### *Streszczenie*

*W artykule podjęto próbę sprawdzenia, w jakim stopniu wykres strzałek poziomych oddaje rzeczywisty kształt istniejącego toru. Jest to o tyle istotne, że przez dziesiątki lat wykres ten był wykorzystywany w metodach regulacji osi toru i dopiero od stosunkowo niedawna stracił swoje kluczowe znaczenie. Opracowano program komputerowy do symulacji pomiarów za pomocą uniwersalnego strzałkomierza, różniącego się od dostępnych przyrządów pomiarowych możliwością stosowania bazy pomiarowej o dowolnej długości. Podstawę analizy stanowi porównanie wykresów strzałek wygenerowanych dla rzeczywistego kształtu toru (uzyskanego w wyniku pomiarów satelitarnych) przy różnych długościach cięciwy. Umożliwiło to określenie rejonów układu geometrycznego, w których długość cięciwy w istotny sposób wpływa na kształt wykresu strzałek. Stwierdzono, że wykorzystywanie wykresu strzałek miało uzasadnienie jedynie w odniesieniu do długości samego łuku kołowego.*

### **WSTĘP**

Jednym z poważnych problemów związanych z kształtowaniem układów geometrycznych dróg kolejowych jest konieczność operowania w lokalnych układach odniesienia. Wiąże się to z występującymi na kolei długościami elementów geometrycznych – odcinków prostych i łuków kołowych, które są często tak duże, że wizualna ocena ich kształtu jest niemożliwa. W tej sytuacji stosowanie geodezji tradycyjnej wymaga podziału trasy na mniejsze części, które są rozpatrywane oddzielnie. Staje się to jednak źródłem dodatkowych błędów, a całościowa ocena danego układu jest bardzo utrudniona.

Szczególne trudności sprawia kształtowanie geometryczne toru kolejowego w płaszczyźnie poziomej. Przez całe dziesięciolecia jedyną stosowaną metodą oceny kształtu toru był pomiar strzałek poziomych. Również w metodach regulacji osi toru podstawy wyjściowej nie stanowiła rzeczywista oś istniejącego toru, lecz jej transformacja w postaci wykresu strzałek.

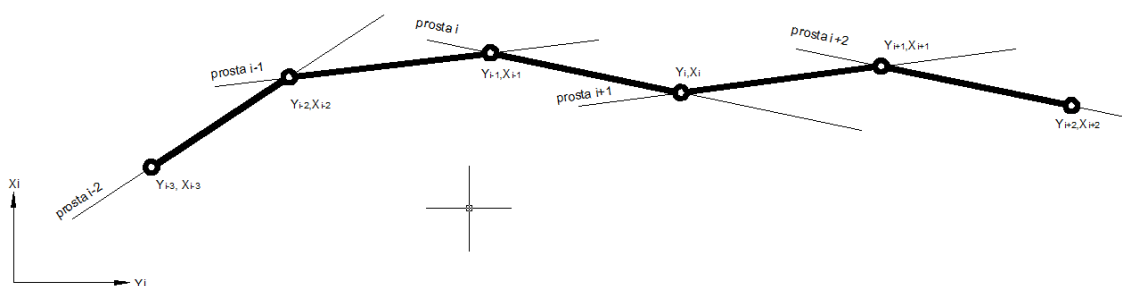
Sytuacja taka uległa radykalnej zmianie po stworzeniu możliwości efektywnego wykorzystanie systemu GPS [4] w pomiarach ukształtowania geometrycznego linii kolejowych. Nastąpiło to po uruchomieniu w naszym kraju (w połowie 2008 roku) Aktywnej Sieci Geodezyjnej ASG-EUPOS [1]. Już pierwsze pomiary wykazały, że zastosowana technika pomiarowa otwiera zupełnie nowe perspektywy w zakresie określania rzeczywistego położenia toru. Jej wykorzystanie umożliwia też bardzo precyzyjne określenie podstawowych danych do projektowania modernizacji linii kolejowej [3, 4].

Bazując na założeniu, że istnieje możliwość określania współrzędnych osi toru w państwowym układzie odniesień przestrzennych 2000, dalsza analiza skupiona będzie na sprawdzeniu, w jakim stopniu wykresy strzałek oddawały rzeczywisty kształt istniejącego toru. Technika komputerowa pozwala nam stworzyć wirtualny uniwersalny strzałkomierz, różniący się od dostępnych przyrządów pomiarowych możliwością stosowania bazy pomiarowej o dowolnej długości. I właśnie porównanie wykresów strzałek wygenerowanych dla rzeczywistego kształtu toru przy różnych długościach cięciwy stanowi podstawę analizy. Najpierw jednak należało opracować odpowiedni algorytm obliczeniowy i program komputerowy.

## 1. ALGORYTM OBLICZENIOWY DO WYZNACZENIA WARTOŚCI STRZAŁEK

Z pomiarów satelitarnych danego odcinka linii otrzymuje się zbiór współrzędnych  $Y_i, X_i$  punktów trasy w układzie 2000, gdzie  $i \in \langle 0, n \rangle$  (rys. 1). Cała trasa opisana jest (w omawianym algorytmie) w sposób analityczny jako ciąg prostych przechodzących przez dwa sąsiednie punkty.

$$\bar{X}_i = X_{i-1} + \frac{X_i - X_{i-1}}{Y_i - Y_{i-1}} (Y - Y_{i-1}), \quad Y \in \langle Y_{i-1}, Y_i \rangle, \quad i \in \langle 1, n \rangle \quad (1)$$



Rys. 1. Układ punktów mierzonej trasy z naniesionymi prostymi poligonu

Źródło: opracowanie własne

Kolejnym krokiem jest przyjęcie położenia punktu początkowego obliczeń  $Y_p \in \langle Y_0, Y_n - \bar{c} \rangle$ , gdzie  $\bar{c}$  jest rzutem długości cięciwy na oś odciętych.  $Y_p$  określa równocześnie startowe położenie początku cięciwy pomiarowej. Określamy przedział odpowiadający  $Y_p$ , taki że  $Y_p \in \langle Y_{i-1}, Y_i \rangle$ ; wprowadza się oznaczenie  $i_p = i$ . Wartość rzędnej  $X_p$  wyznaczana jest ze wzoru

$$X_p = X_{i_p-1} + s_{i_p} (Y_p - Y_{i_p-1}) \quad (2)$$

gdzie  $s_{i_p} = \frac{X_{i_p} - X_{i_p-1}}{Y_{i_p} - Y_{i_p-1}}$ .

Można teraz przyjąć długość cięciwy pomiarowej  $c$  i przystąpić do poszukiwania jej punktu końcowego o współrzędnych  $Y_K, X_K$ . W pierwszym kroku (iteracji) znajdowany jest punkt przecięcia okręgu o promieniu  $c$  i środkiem w punkcie  $P$  z prostą  $\bar{X}_{i_p}$ . Jako rozwiązanie zadania traktuje się  $Y_K \in \langle Y_p, Y_n \rangle$  sprawdzając warunek  $Y_K < Y_{i_p}$ . Jeśli warunek ten nie jest

spełniony (a tak z reguły będzie), poszukiwania są kontynuowane, wyznaczając punkt przecięcia okręgu z prostą  $\overline{X_{i_{p+1}}}$ ,  $\overline{X_{i_{p+2}}}$  itd. aż do znalezienia właściwej prostej  $\overline{X_{i_{p+r}}}$ .

Równanie cięciwy jest następujące:

$$\overline{X_C} = X_P + \frac{X_K - X_P}{Y_K - Y_P} (Y - Y_P) \quad (3)$$

a współrzędne jej środka

$$Y_S = \frac{Y_P + Y_K}{2}, \quad X_S = \frac{X_P + X_K}{2} \quad (4)$$

Następnie określa się przedział odpowiadający  $Y_S$ , taki że  $Y_S \in \langle Y_{i-1}, Y_i \rangle$ , po czym wyznaczone jest równanie prostej prostopadłej do prostej (3), poprowadzonej z punktu  $S$ ; jest to równanie strzałki poziomej.

$$\overline{X_S} = X_S - \frac{Y_K - Y_P}{X_K - X_P} (Y - Y_S) \quad (5)$$

W tym momencie przystępuje się do poszukiwania współrzędnych  $Y_W$ ,  $X_W$  punktu przecięcia prostej (5) z odpowiednią prostą osnowy  $\overline{X_{i_{p+t}}}$ . Po ich wyznaczeniu możliwe jest określenie wartości szukanej strzałki za pomocą wzoru

$$f(Y_S) = \pm \sqrt{(Y_W - Y_S)^2 + (X_W - X_S)^2} \quad (6)$$

W ten sposób wyznaczona jest pierwsza wartość  $f(Y_S)$  i jednocześnie pierwszy punkt na wykresie strzałek. Do wyjaśnienia pozostaje jeszcze kwestia umowy znaków. Zakłada się, że baza pomiarowa zawsze przesuwa się wzdłuż toru w prawą stronę (patrzac z punktu widzenia obserwatora) i jako dodatnie (+) przyjmujemy odchylenia na lewo od cięciwy, a jako ujemne (-) odchylenia na prawo.

Przyjmuje się teraz krok obliczeń  $k$ , tj. skok przy przesuwaniu bazy pomiarowej wzdłuż osi toru. Wyznaczane są współrzędne  $\hat{Y}_p, \hat{X}_p$  nowego położenia początku cięciwy pomiarowej. Dalszy tok postępowania jest analogiczny jak w opisanym wcześniej przypadku startowego położenia cięciwy.

Dodając kolejno krok  $k$  otrzymuje się zbiór punktów  $Y_S, f_S$ , które przedstawione w postaci graficznej tworzą wykres strzałek poziomych. Obliczenia są zakończone, gdy szukając końca kolejnej cięciwy otrzymamy wartość jego odciętej  $Y_K > Y_n$ .

## 2. PROGRAM KOMPUTEROWY

Generowanie teoretycznego wykresu strzałek opiera się o algorytm iteracyjny, tj. przeszukiwane są zbiory punktów, które z reguły są bardzo liczne. Przedstawiony w punkcie 1 algorytm został zaimplementowany do środowiska Scilab 4.0 [5]. Działanie programu można podzielić na następujące etapy:

- wprowadzenie tablicy z danymi (punkty pomiarowe),
- interpolacja danych (zagęszczenie punktów pomiarowych, jeśli zachodzi potrzeba),
- obliczenie współrzędnych punktu końca cięciwy, której początek porusza się po punktach danych wejściowych,
- obliczenie wartości strzałek w połowie cięciwy oraz określenie jej znaku,
- archiwizacja wartości strzałek względem przebytej drogi.

Dane do programu dostarczone powinny być w pliku tekstowym jako ciąg współrzędnych poziomych  $Y$  oraz pionowych  $X$  reprezentujących trasę w państwowym układzie odniesień przestrzennych 2000. Metodyka prowadzenia pomiarów powinna uwzględnić specyfikę prezentowanej analizy, a zatem dane powinny pochodzić z pomiarów ciągłych. Do analizy wykorzystano wyniki pomiarów przeprowadzonych w eksploatowanym torze kolejowym, których metodyka przedstawiona została w pracy [3].

Do programu dane wprowadzane są za pomocą funkcji, która odczytuje współrzędne  $Y_i$ ,  $X_i$  zapisane w pliku tekstowym i tworzy na ich podstawie macierz próbek, w lokalnym układzie współrzędnych, tj. po przesunięciu początku układu do miejsca pierwszego punktu w układzie 2000. Taki tok postępowania eliminuje operacje na dużych liczbach, które wynikają z przyjętego układu 2000.

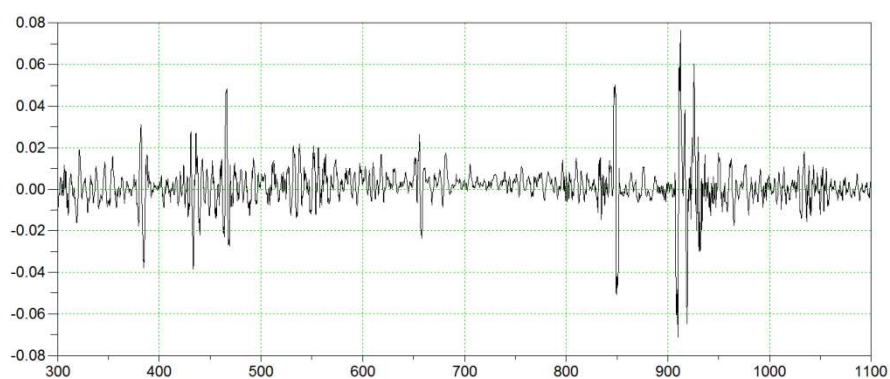
Kolejnym krokiem jest interpolacja, która ma na celu zagęszczenie danych pomiarowych. W przypadku prezentowanej analizy wykorzystano algorytm do interpolacji liniowej z uwzględnioną przez użytkownika gęstością podziału odstepu pomiędzy kolejnymi próbkami. Tak przygotowana nowa tablica współrzędnych tworzy zbiór danych wejściowych do algorytmu obliczania strzałek. Na tym etapie użytkownik wprowadza do programu długość cięciwy "wirtualnego strzałkomierza".

Algorytm wyznaczania wartości strzałki bazuje na obliczeniach geometrycznych, które wykonywane są wielokrotnie podczas przemieszczania się cięciwy. W celu określenia punktu przecięcia się cięciwy z modelem geometrycznym analizowanego odcinka (ciąg współrzędnych) zakłada się, że punkt początkowy może przemieszczać się tylko po punktach zawartych w tablicy danych (po interpolacji), natomiast współrzędne końca cięciwy obliczane są jako punkty przecięcia z odcinkami wyznaczonymi przez punkty pomiarowe sprzed interpolacji. Zatem punkty sprzed interpolacji tworzą ciąg segmentów, które stanowią odniesienie do identyfikacji położenia końca cięciwy. Jako że rozwiązanie problemu geometrycznego wyznaczenia punktu końca cięciwy generuje dwa rozwiązania (przed początkiem cięciwy oraz za początkiem według numeracji segmentów) program kontroluje wybór odpowiedniego punktu i zapisuje informację o numerze segmentu, w którym cięciwa przecina się z linią prostą opisującą dany segment. Informacja ta pozwala na dynamiczne przeszukiwanie segmentów w procesie iteracyjnym, przez co przeszukiwane jest tylko najbliższe otoczenie wędrującego po punktach pomiarowych początku cięciwy, co znacznie skraca czas operacji obliczeniowych.

W ostatniej fazie algorytm oblicza współrzędne punktu przecięcia linii prostopadłej do cięciwy w połowie jej długości z linią reprezentującą odpowiedni segment. Zatem wartość strzałki przypisywana jest do konkretnej odległości liczonej wzdłuż przebiegu punktów. Takie odniesienie pozwala na porównywanie szeregów strzałek obliczonych dla różnej długości cięciwy na jednym wykresie, generowanym przez program po zakończeniu obliczeń.

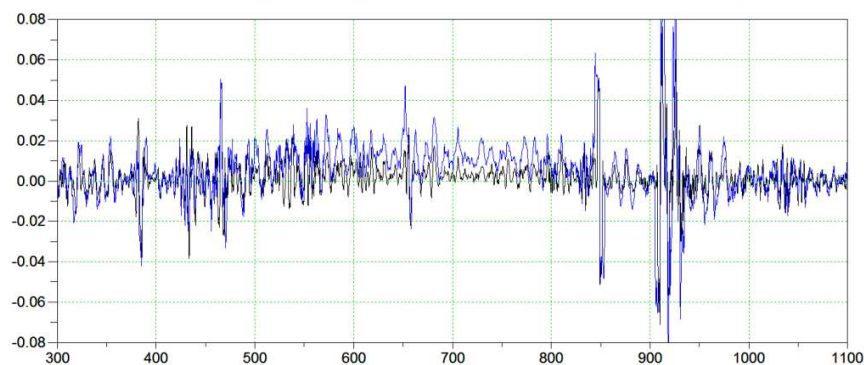
### **3. INTERPRETACJA WYKRESU STRZAŁEK UZYSKANEGO DLA RÓŻNYCH DŁUGOŚCI CIĘCIWY**

W pierwszym etapie analizy skupiono się na wyjaśnieniu kwestii wpływu długości cięciwy pomiarowej na możliwości późniejszej interpretacji wykresu strzałek. Na rysunkach 2 - 6 przedstawiono sekwencję wykresów strzałek dla wybranego odcinka pomierzonego toru kolejowego, w której pojawiają się kolejno wykresy wygenerowane dla różnej długości cięciwy.



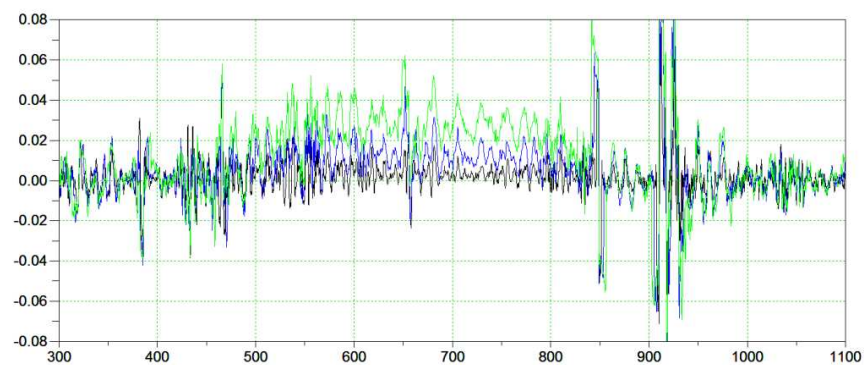
**Rys. 2.** Wykres strzałek obliczonych na bazie cięciwy 5 m

**Źródło:** opracowanie własne



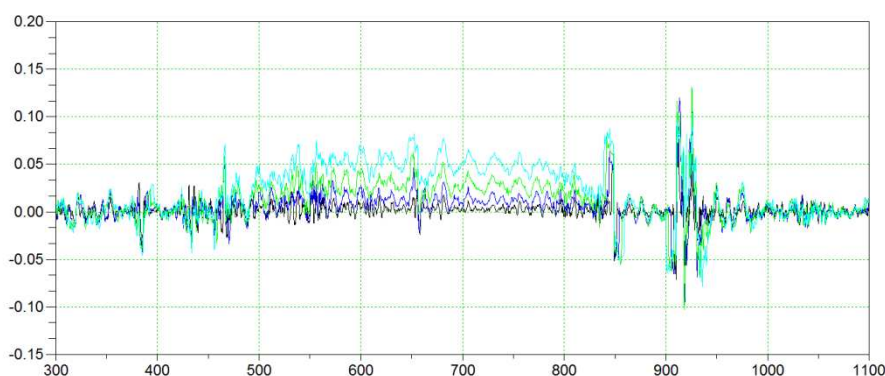
**Rys. 3.** Wykres strzałek obliczonych na bazie cięciwy 5 m (linia czarna) i 10 m (linia niebieska)

**Źródło:** opracowanie własne



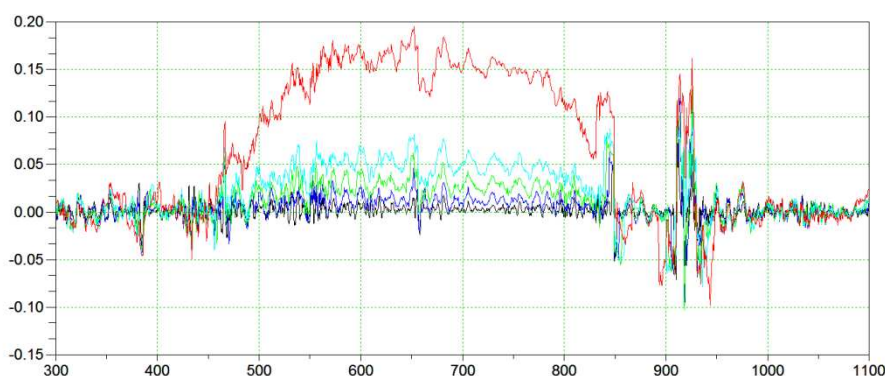
**Rys. 4.** Wykres strzałek obliczonych na bazie cięciwy 5 m (linia czarna), 10 m (linia niebieska) i 15 m (linia zielona)

**Źródło:** opracowanie własne



**Rys. 5.** Wykres strzałek obliczonych na bazie cięciwy 5 m (linia czarna), 10 m (linia niebieska), 15 m (linia zielona) i 20 m (linia błękitna)

**Źródło:** opracowanie własne



**Rys. 6.** Wykres strzałek obliczonych na bazie cięciwy 5 m (linia czarna), 10 m (linia niebieska), 15 m (linia zielona), 20 m (linia błękitna) i 30 m (linia czerwona)

**Źródło:** opracowanie własne

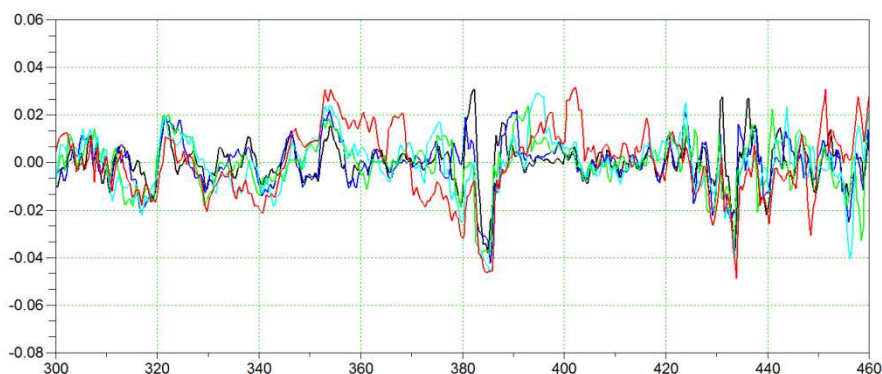
Z wykresów pokazanych na rysunkach 2 - 6 wyraźnie widać, że odtworzenie charakteru przebiegu trasy jest bezpośrednio uzależnione od przyjętej długości cięciwy. Występujący w środkowej części układu łuk kołowy ujawnia się właściwie dopiero przy długości cięciwy równej 15 m, przy 5 i 10 m interpretacja wykresu prowadzi do fałszywego obrazu sytuacji geometrycznej. Dlatego też należałoby się poważnie zastanowić, na ile miarodajne może być operowanie krótkimi cięciwami. Nasuwa się również wniosek, że z punktu widzenia interpretacji wykresu najkorzystniejsze jest operowanie cięciwami o większej długości (rys. 6).

#### **4. WYKRESY STRZAŁEK DLA PROSTYCH ODCINKÓW TORU**

Kolejny etap analizy dotyczył skuteczności wykorzystania wykresów strzałek na odcinkach prostych torów. Na rysunku 7 pokazano fragment wykresów strzałek obejmujący odcinek prosty położony po lewej stronie rysunków 2 - 6. Trudno tutaj byłoby znaleźć



jakąkolwiek prawidłowość; kształt wykresów dla poszczególnych długości cięciw różni się między sobą bardzo wyraźnie. Ponadto w wielu przypadkach nie występuje tutaj zachowanie zależności pomiędzy długością cięciwy i wartością odpowiedniej strzałki. Jest to zresztą zrozumiałe, gdyż mogą przecież występować przypadki obejmowania przez cięciwę kilku półfal nierówności poziomej. W takiej sytuacji praktyczne wykorzystanie wykresów strzałek (np. do regulacji osi toru) staje się co najmniej dyskusyjne.

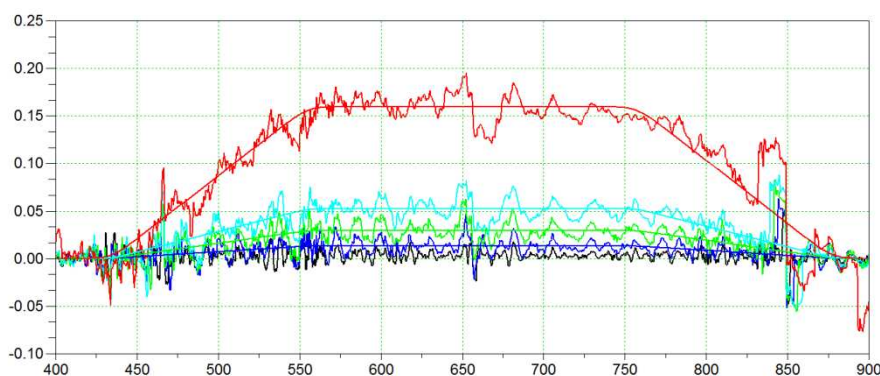


**Rys. 7.** Wykres strzałek obliczonych na bazie cięciwy 5 m (linia czarna), 10 m (linia niebieska), 15 m (linia zielona), 20 m (linia błękitna) i 30 m (linia czerwona) na prostym odcinku toru

**Źródło:** opracowanie własne

## 5. WYKRESY STRZAŁEK DLA ODCINKA TORU POŁOŻONEGO W ŁUKU POZIOMYM

W celu dokonania oceny możliwości interpretacji kształtu toru ułożonego w łuku poziomym, na rysunku 8 zestawiono wykresy strzałek wygenerowane dla różnej długości cięciw oraz wykresy strzałek teoretycznych (dla odpowiadających samych wartości cięciw).



**Rys. 8.** Wykres strzałek w torze ułożonym w łuku poziomym, obliczonych na bazie cięciwy 5 m (linia czarna), 10 m (linia niebieska), 15 m (linia zielona), 20 m (linia błękitna) i 30 m (linia czerwona) na tle odpowiednich wykresów teoretycznych

**Źródło:** opracowanie własne

Jak już wcześniej stwierdzono, przy krótkich cięciwach (długości cięciwy mniejsze od 10 m) trudno jest interpretować wykres strzałek w kontekście lokalizacji i oceny łuków poziomych. W rozpatrywanym przypadku teoretyczny trend wyłania się jednak dla wykresów sporządzonych na bazie cięciw 15 m i większych. Wówczas widać wyraźnie, że wartości strzałki pomiarowej oscylują wokół linii, którą wyznacza teoretyczny kształt toru w płaszczyźnie poziomej. W tym celu na bazie punktów pomiarowych zaprojektowano optymalny kształt toru, tj. połączenia kierunków prostych dwiema krzywymi przejściowymi i łukiem kołowym. Bez analizy polegającej faktycznie na zaprojektowaniu prawidłowego kształtu toru oraz wygenerowaniu teoretycznego wykresu strzałek, identyfikacja kształtu toru z wykresu strzałek pomierzonych byłaby zadaniem niewątpliwie bardzo trudnym. Dzieje się tak dlatego, że stosunkowo niewielkie zaburzenia w kształcie toru prowadzą do silnej deformacji wykresu strzałek. W związku z powyższym niepewność modelowania kształtu teoretycznego przebiegu strzałki pociąga za sobą błędną interpretację tegoż kształtu.

Zadanie to jest o tyle złożone, że jak wynika z rysunku 8 (linie ciągłe) charakter wykresu strzałek w funkcji odległości jest silnie nieliniowy i zależy nie tylko od rzeczywistego kształtu toru, ale przede wszystkim od wartości przyjętej cięciwy. Natomiast warto jest zauważyć, że na długości domniemanej lokalizacji łuku kołowego pewne trendy w kształtowaniu się wykresu strzałek przy różnych cięciwach dają się wychwycić w rozpatrywanym przypadku nawet w ocenie wizualnej. Świadczy to o stosunkowo niewielkim udziale deformacji charakteryzujących się krótką długością fali. Stwierdzenie to wymagałoby jednak potwierdzenia na drodze bardziej szczegółowej analizy.

## 6. PODSUMOWANIE

- Przez całe dziesięciolecie jedyną stosowaną metodą oceny kształtu toru był pomiar strzałek poziomych. Również w metodach regulacji osi toru podstawy wyjściowej nie stanowiła rzeczywista oś istniejącego toru, lecz jej transformacja w postaci wykresu strzałek. Zarówno współczesne techniki obliczeniowe (komputerowe), jak również możliwości związane z satelitarnym określeniem położenia toru pozwoliły przeprowadzić porównanie wykresów strzałek wygenerowanych dla rzeczywistego kształtu toru przy różnych długościach cięciwy.
- Z przeprowadzonej analizy wykresów strzałek jednoznacznie wynika, że przy niedużych długościach cięciwy (5 lub 10 m) interpretacja wykresu może prowadzić do fałszywego obrazu sytuacji geometrycznej. Dlatego też z punktu widzenia interpretacji wykresu najkorzystniejsze jest operowanie cięciwami o większej długości.
- W wykresach strzałek na odcinkach prostych torów trudno byłoby w wielu przypadkach znaleźć jakkolwiek jednoznaczną prawidłowość. Kształt wykresów dla poszczególnych długości cięciw może się różnić między sobą bardzo wyraźnie. Ponadto w wielu przypadkach nie występuje zachowanie zależności pomiędzy długością cięciwy i wartością odpowiedniej strzałki. W takiej sytuacji praktyczne wykorzystanie wykresów strzałek na odcinkach prostych (np. do regulacji osi toru) staje się co najmniej dyskusyjne.
- Na długości analizowanego łuku kołowego pewne trendy w kształtowaniu się wykresu strzałek przy różnych cięciwach dają się wychwycić nawet w ocenie wizualnej. Świadczyć to może o stosunkowo niewielkim udziale deformacji charakteryzujących się krótką długością fali. Stwierdzenie to wymagałoby jednak potwierdzenia na drodze bardziej szczegółowej analizy.



# EFFECTIVENESS OF THE USE OF VERSED SINE CHART DUE TO THE ANALYSIS OF THE RAILWAY TRACK HORIZONTAL SHAPE

## *Abstract*

*The article presents an analysis of examination the possibility of assessment how the versed sine chart reflects the shape of existing rail track in the horizontal plane. It is very important that for few decades these charts have been used in the methods of the track alignment, and just relatively recently lost its important role. To investigate the issue, there was developed a computer program to simulate the measurements with an universal equipment which differs from the available measuring instruments that it offers ability to chose the optional length of a string line (a base of the measurement). The analysis bases on a comparison between the versed sine charts generated for the actual shape of the track (the shape was measured by the satellite methods) for different lengths of string line. This enabled the determination of the geometric regions in which the length of string line significantly affects the shape of the versed sine signal. It was found that the use of the versed sine signals was justified only in relation to the length of the circular arc.*

## **BIBLIOGRAFIA**

1. Bosy J., Graszka W., Leonczyk M.: *ASG-EUPOS – the Polish contribution to the EUPOS project*. Symposium on Global Navigation Satellite Systems, Berlin, Germany, 11-14.11. 2008.
2. Koc W., Specht C.: *Wyniki pomiarów satelitarnych toru kolejowego*. Technika Transportu Szynowego 2009, nr 7-8.
3. Koc W., Specht C., Jurkowska A., Chrostowski P., Nowak A., Lewiński L., Bornowski M.: *Określanie przebiegu trasy kolejowej na drodze pomiarów satelitarnych*. II Konferencja Naukowo-Techniczna „Projektowanie, Budowa i Utrzymanie Infrastruktury w Transporcie Szynowym INFRASZYN 2009, Zakopane, 22-24.04.2009.
4. Specht C.: *System GPS*. Wydawnictwo BERNARDINUM, Pelplin, 2007.
5. Strona internetowa: <http://www.scilab.org> (The Free Platform for Numerical Computation), Scilab Enterprises 2012.

### *Autorzy:*

**prof. dr hab. inż. Władysław KOC** – Politechnika Gdańska

**dr inż. Piotr CHROSTOWSKI** – Politechnika Gdańska