

Jerzy JAKUBIEC

POLITECHNIKA ŚLĄSKA, INSTYTUT METROLOGII, ELEKTRONIKI I AUTOMATYKI,
ul. Akademicka 10, 44-100 Gliwice

Błąd jako podstawa wyznaczania niepewności wyniku pomiaru

Prof. dr hab. inż. Jerzy JAKUBIEC

Pracownik Instytutu Metrologii, Elektroniki i Automatyki Politechniki Śląskiej. Studia ukończył na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej w 1971 r., w 1978 uzyskał stopień doktora, w 1989 – doktora habilitowanego, a w 2004 – tytuł profesora. Zainteresowania naukowe: analiza propagacji błędów w systemach pomiarowo-sterujących, synteza modeli niepewności algorytmów przetwarzania danych pomiarowych, modelowanie metrologicznych właściwości torów przetwarzania analogowo-cyfrowego.

e-mail: jerzy.jakubiec@polsl.pl

**Streszczenie**

Podano ogólną definicję błędu pomiaru, a następnie scharakteryzowano dwie jego definicje stosowane dla potrzeb opisu niedokładności wyniku pomiaru. Jedną z nich stosowaną jest w symulacyjnym badaniu niedokładności pomiarów, druga stanowi podstawę formalizacji procedur wyznaczania niepewności wyniku pomiaru. Rozważania teoretyczne zilustrowano przykładami.

Słowa kluczowe: błąd pomiaru, niepewność wyniku pomiaru.

Error as a basis of determination of measurement result uncertainty**Abstract**

A general description of a measurement error and two definitions directed to expressing inaccuracy of a measurement result have been presented. The first one (1), called a priori, is useful in simulation experiments while the second one (2), called a posteriori, is the basis of the result uncertainty calculation. Generally, the error is given as a set of values and can be described in deterministic or random ways. The exemplary deterministic equation (4) describes the quantization error of the A/D converter shown in Fig. 1. The graphical form of this error is presented in Fig. 2 and its random representation in Fig. (4) as the histogram which is approximated by the probability density function (5). Values of the a posteriori error can be obtained after realization of a measurement experiment because, in this error definition (2), the reference point needed for the error value calculation is the estimate of the measurement result. Such a property of the error causes that its definition can be the basis of the formal definition (6) of the uncertainty U of a measurement result. Moreover, accordingly with this definition, the uncertainty value can be calculated by using the expression (7) for given value of the confidence level p and, what is more, the measurement result can be written in the interval form (14). Therefore, the a priori definition of the measurement error can be treated as the good formal basis of the procedures used in practice for the measurement uncertainty calculation [7].

Keywords: measurement error, uncertainty of a measurement result.

1. Definicje błędu pomiaru

Pojęcie błędu jest powszechnie stosowane do uzyskania formalnych podstaw ilościowego określania niedokładności wyniku pomiaru [1] i jest wykorzystywane również w innych dziedzinach, jak przykładowo do opisu sygnałów w systemach sterowania. Ogólnie błąd jest definiowany jako różnica między wielkością poddawaną ocenie niedokładności a tego samego rodzaju wielkością, której wartości przyjmuje się jako punkty odniesienia do obliczania wartości błędu. Z tej definicji wynikają dwie istotne właściwości błędu:

- Błąd jest **wielkością fizyczną** (mierzalną) wyrażaną w jednostkach wielkości poddawanej ocenie (mierzonej).
- Błąd jest opisywany przez **zbiór swoich wartości** uzyskiwanych w określonych warunkach, w szczególności pomiarowych.

W sposób formalny błąd pomiaru jest definiowany w dwojaki sposób, w zależności od celu jego stosowania w opisie niedokładności procesu pomiaru. Kryterium podziału związane jest z faktem wykonania pomiaru, który istotnie zwiększa wiedzę o wielkości mierzonej. Przed wykonaniem pomiaru tego rodzaju wiedza jest hipotetyczna, w związku z tym błąd definiowany w tej sytuacji może być używany wyłącznie dla celów symulacyjnej analizy procesu pomiaru. Wartości prawdziwe wielkości mierzonej, oznaczane jako \tilde{x} , są wówczas przyjmowane jako znane i traktowane jako wartości odniesienia, w związku z czym błąd taki nazywany jest a priori [2] lub błędem wielkości [3], a jego definicja ma postać:

$$e = \tilde{x} - \hat{x}, \quad (1)$$

gdzie \tilde{x} oznacza wielkość zaburzoną badanymi czynnikami opisywanymi jako błąd.

Po wykonaniu pomiaru uzyskuje się liczbę, która po wyeliminowaniu wszystkich składowych systematycznych jest najlepszym przybliżeniem wartości wielkości mierzonej, czyli stanowi jej estymatę oznaczaną jako \hat{x} . Zatem w tej sytuacji wartości błędu powinny być wyznaczane w odniesieniu do wartości tej estymaty, czyli jako:

$$e = x - \hat{x}, \quad (2)$$

gdzie x oznacza nieznaną prawdziwą wartość wielkości mierzonej. Wartości tak zdefiniowanego błędu mogą być uzyskiwane jedynie po wykonaniu pomiaru, w związku z czym błąd ten nazywany jest a posteriori [2] lub błędem wartości [3].

2. Opis zbioru wartości błędu

Błąd jest charakteryzowany przez zbiór wartości, które przyjmuje w określonych warunkach pomiarowych. Zbiór ten może być opisany w sposób deterministyczny lub probabilistyczny.

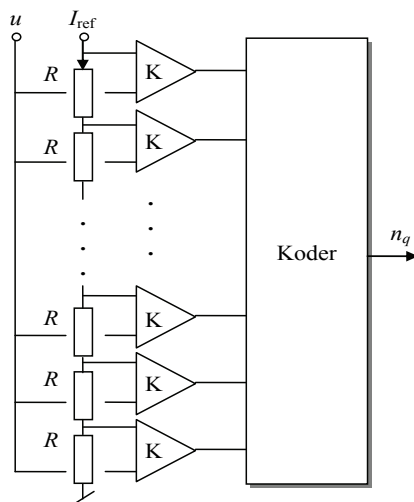
Deterministyczny opis błędu polega na określeniu funkcji łączącej wartość błędu z wielkością, od której błąd ten zależy. Może to być funkcja wielu zmiennych niezależnych determinujących wartość błędu, spotyka się także wielowymiarowe modele, w których występuje wiele błędów zależnych od siebie (występują zależności skrośne między błędami lub korelacje). W celu uproszczenia rozważań przyjmijmy najprostszyp przypadk, gdy funkcja ta jest jednowymiarowa, czyli zachodzi:

$$e = f(w), \quad (3)$$

gdzie w może być wielkością mierzoną lub inną wielkością oddziałującą na proces pomiaru, nazywaną wielkością wpływającą. Przykładem takiej zależności jest równanie błędu kwantowania natychmiastowego (ang. flash) przetwornika A/C pokazanego na rysunku 1 [2]. Równanie to ma postać:

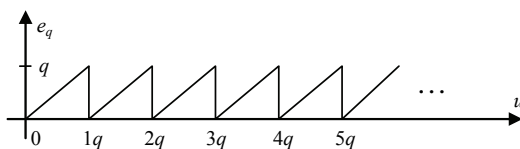
$$e = u - q \cdot \text{ent}\left(\frac{u}{q}\right), \quad (4)$$

Symbolem ent oznaczono w nim funkcję entier dostarczającą części całkowitej swojego argumentu, u jest napięciem kwantowanym, q jest kwantem i zachodzi: $q = U_z/2^n$, U_z jest zakresem pomiarowym przetwornika A/C, a n – liczbą jego bitów. W przypadku tego przetwornika kwanty są uzyskiwane w postaci spadków napięcia na rezystorach wzorcowych R spowodowanych przepływem prądu odniesienia I_{ref} .



Rys. 1. Schemat natychmiastowego przetwornika A/C
Fig. 1. Scheme of flash AD converter

Deterministyczny opis błędu w postaci zależności (4) można przedstawić graficznie w sposób pokazany na rysunku 2.

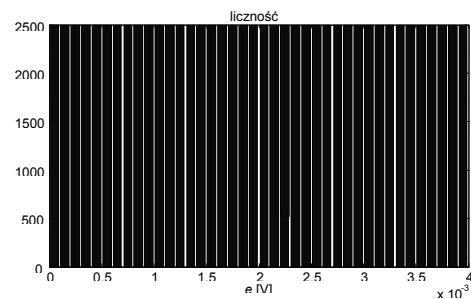


Rys. 2. Graficzny opis błędu kwantowania
Fig. 2. Graphical description of the quantization error

Deterministyczny opis błędu może być stosowany dla celów badań symulacyjnych, jest również przydatny dla celów korekcji błędów statycznych i dynamicznych dających się opisywać w ten sposób [2]. Należy podkreślić, że tego rodzaju opis dostarcza pełnej informacji o błędzie, gdyż na jego podstawie można wyznaczyć dowolne parametry zbioru wartości błędów, np. wartości maksymalną i minimalną w tym zbiorze (w przypadku błędów kwantowania wynoszą one odpowiednio q i 0).

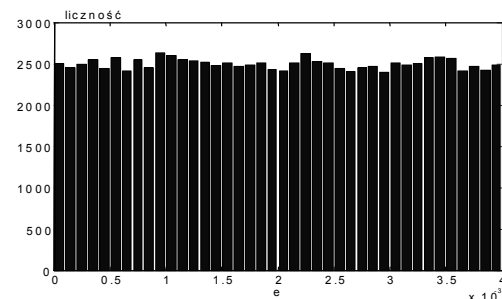
Współcześnie dla celów określania niedokładności wyników pomiaru powszechnie używa się niepewności [4], co wymaga opisu zbioru wartości błędów w postaci losowej – statystycznej lub probabilistycznej. Opis taki można uzyskać w różny sposób. Bezpośrednio statystyczne zbiory wartości błędów można uzyskiwać wykonując pomiary wartości błędów w zadanych warunkach i tworząc z nich histogramy, co jest jednak czasochłonne i kosztowne. Znacznie prostsze jest wykorzystanie w tym celu deterministycznych charakterystyk błędów uzyskiwanych na drodze pomiarowej lub na podstawie innej dostępnej wiedzy, przykładowo w postaci zależności (4) otrzymanej na podstawie analizy procesu kwantowania przez przetwornik A/C [2].

Przekształcenie zależności deterministycznej opisującej zbiór wartości błędów na postać losową może się odbywać w dwojaki sposób. Można to zrobić na drodze w pełni deterministycznej, wyznaczając wartości błędów dla stałego kroku zmian wielkości powodującej ten błąd i tworząc z tak uzyskanych wartości histogram. Wynik takiego sposobu postępowania w zastosowaniu do błędów kwantowania dla liczby realizacji wartości tego błędów wynoszącej 10^5 pokazano na rysunku 3. Przyjęto, że zakres pomiarowy 8-bitowego przetwornika A/C wynosi: $U_z = 1$ V, a zatem wartość 1 kwantu jest równa $q = U_z/2^n = 1/2^8 = 4 \cdot 10^{-3}$ V.



Rys. 3. Histogram błędów kwantowania wyznaczony deterministycznie
Fig. 3. Histogram of a quantization error obtained in the deterministic way

Drugi sposób uzyskiwania histogramu błędów polega na wykorzystaniu deterministycznego opisu procesu pomiaru w eksperymencie symulacyjnym realizowanym zgodnie z metodą Monte Carlo [5]. Przykładowo, wyznaczenie histogramu błędów kwantowania tą metodą odbywa się z wykorzystaniem zależności (4), przy założeniu, że wszystkie wartości napięcia kwantowanego są jednakowo prawdopodobne w całym zakresie pomiarowym przetwornika A/C. Dla liczby realizacji błędów wynoszącej 10^5 otrzymuje się w ten sposób histogram pokazany na rysunku 4.



Rys. 4. Histogram błędów kwantowania wyznaczony metodą Monte Carlo
Fig. 4. Histogram of a quantization error obtained by using Monte Carlo method

Znajomość histogramu pozwala na uzyskanie analitycznego opisu zbioru wartości błędów w postaci probabilistycznej (o ile histogram daje się aproksymować tego rodzaju funkcją), co nazywane jest estymacją histogramu [6]. Najczęściej rozkład błędów opisywany jest przy użyciu funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Przykładowo histogramy z rysunków 3 i 4 mogą być aproksymowane funkcją gęstości prawdopodobieństwa w postaci:

$$g(e) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{dla } 0 \leq e \leq q \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases} \quad (5)$$

charakterystycznej dla rozkładu jednostajnego.

3. Obliczanie niepewności na podstawie rozkładu błędów

Znajomość rozkładu błędów pozwala na obliczenie niepewności wyniku pomiaru obciążonego tym błędem. Zgodnie z ogólną interpretacją zawartą w przewodniku [4] niepewność w sposób formalny może być zdefiniowana wyrażeniem:

$$\Pr\{|x - \hat{x}| \leq U\} = p, \quad (6)$$

które można odczytać w ten sposób, że prawdopodobieństwo P r wystąpienia prawdziwej wartości wielkości mierzonej w przedziale o środku równym wynikowi pomiaru \hat{x} i o promieniu równym niepewności U wynosi p .

Gdy zastosuje się definicję błędu a posteriori, wyrażenie (6) można zapisać w postaci funkcjonału:

$$\int_{-U}^U g(e) de = p, \quad (7)$$

gdzie $g(e)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa błędu symetryczną względem osi pionowej. Oznacza to, że wartość oczekiwana rozkładu błędu musi być równa zeru, a tym samym błąd jest pozbawiony składowej systematycznej (została ona usunięta w efekcie jej korekcji).

Wartość niepewności może być uzyskiwana bezpośrednio na podstawie histogramu, bez konieczności wyznaczania analitycznej postaci funkcji gęstości prawdopodobieństwa [2]. Korzysta się wówczas również z funkcjonału (7), jednak całkowanie zastępowane jest odpowiednim sumowaniem powierzchni słupków histogramu, tak aby stosunek sumy do całkowitej powierzchni histogramu był równy w przybliżeniu wartości niepewności U .

Dla przykładu wyznaczmy niepewność spowodowaną błędem opisanym funkcją gęstości prawdopodobieństwa (5). Wartość oczekiwana rozkładu tego błędu jest różna od zera i wynosi:

$$E[e] = \int_{-\infty}^{\infty} g(e)e de = \int_0^q \frac{1}{q} e de = \frac{q}{2}. \quad (8)$$

Po wprowadzeniu poprawki c równej wartości oczekiwanej (8), uzyskuje się błąd skorygowany:

$$e_c = e - c = e - \frac{q}{2} \quad (9)$$

o symetrycznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa:

$$g_c(e_c) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{dla } -\frac{q}{2} \leq e_c \leq \frac{q}{2} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (10)$$

Taki sam efekt, jak w przypadku zastosowania wzoru (9) można uzyskać wprowadzając odpowiednio poprawkę do surowego wyniku pomiaru [2].

Dla symetrycznego rozkładu błędu (10) i dla poziomu ufności $p = 0,95$, niepewność oblicza się zgodnie z wyrażeniem (7) jako:

$$\int_{-U}^U \frac{1}{q} de = 0,95, \quad (11)$$

po rozwiązaniu którego dla $q = 4 \cdot 10^{-3}$ V uzyskuje się wartość niepewności:

$$U = 0,475q = 0,475 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ V.} \quad (12)$$

Zgodnie z definicją (6), wartość prawdziwa wielkości mierzonej mieści się z prawdopodobieństwem równym p w przedziale:

$$|x - \hat{x}| \leq U. \quad (13)$$

Przedział określony przez nierówność (13) można zapisać jako:

$$x = [\hat{x} - U, \hat{x} + U] = \hat{x} + [-U, U], \quad (14)$$

czyli w postaci sumy estymaty \hat{x} wielkości mierzonej, będącej środkiem przedziału, i przedziału niepewności, określonego w pełni przez niepewność U . Zakładając, że wartość estymaty

wynosi $\hat{x} = 0,848$ V wynik kwantowania w postaci przedziałowej można zapisać jako:

$$x = [0,848 - 1,9 \cdot 10^{-3}, 0,848 + 1,9 \cdot 10^{-3}] = [0,8461, 0,8499] \text{ V.}$$

4. Podsumowanie

Wykorzystanie zbioru wartości błędu w postaci losowej pozwala na uzyskanie aparatu matematycznego w postaci zależności (6) i (7), które formalizują procedurę obliczania niepewności wyniku pomiaru obarczonego tym błędem [7]. Należy tu podkreślić, że podstawą użycia tych procedur jest zdefiniowanie błędu jako a posteriori, gdyż tylko taka definicja zapewnia spójność wyrażen (6) i (7). Ta definicja dostarcza również formalnych podstaw zapisu wyniku pomiaru w postaci przedziałowej (14).

Błąd określony jest przez zbiór swoich wartości, który może być opisywany bądź deterministycznie, bądź jako losowy. Opis deterministyczny jest kompletny, gdyż zawiera pełną informację o błędzie, a zatem umożliwia korygowanie błędu przez wprowadzanie poprawek. Opis losowy jest potrzebny dla celów wyznaczania niepewności, jednak jest uboższy, gdyż brak w nim związku między wartościami błędu a jego przyczyną. Przejście od opisu deterministycznego do losowego jest stosunkowo proste przy użyciu metody Monte Carlo (w przeciwnym kierunku jest niemożliwe). Może mieć ono zastosowanie do tzw. walidacji niepewności [8], polegającym na symulacyjnym wykazaniu zasadności przyjęcia określonej procedury do obliczenia niepewności.

Zbiory wartości błędu uzyskiwane dla dwóch podanych definicji błędu różnią się jedynie znakami poszczególnych realizacji błędów, gdy uzyskiwane są one dla tych samych warunków pomiarowych. W przypadku, gdy rozkłady błędów są symetryczne, to stają one tożsame dla obu definicji błędu. Pozwala to na wprowadzanie do procedur wyznaczania niepewności składowych uzyskiwanych na podstawie badań symulacyjnych.

Przyjęcie, że błąd określany jest przez zbiór swoich wartości powoduje, że używanie takich określeń, jak błąd maksymalny, średni i podobnych jest niepoprawne. Pojęcia te sugerują, że są to odmienne rodzaje błędów, a w rzeczywistości są to tylko inne parametry tego samego błędu. Należałoby używać odpowiednio takich pojęć, jak maksymalna wartość błędu, wartość średnia itd.

5. Literatura

- [1] Jaworski J.: Matematyczne podstawy metrologii. WNT, Warszawa 1979.
- [2] Jakubiec J.: Błędy i niepewności danych w systemie pomiarowo-sterującym, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2010.
- [3] Marcyniuk A. Podstawy miernictwa elektrycznego dla kierunku elektronika. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2002.
- [4] Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik, Główny Urząd Miar, 1999. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, BIPM, 1993,1995.
- [5] Jakubiec J.: Uwagi na temat zastosowania metody Monte Carlo do wyznaczania niedokładności wyniku pomiaru. Materiały XLV Międzynarodowej Konferencji Metrologów, MKM'2013, Głucholazy 8-11.09.2013, CD.
- [6] Gajda J.: Statystyczna analiza danych pomiarowych. Wyd. Wydziału EAIiE AGH, Kraków 2002.
- [7] Jakubiec J.: A New Conception of Measurement Uncertainty Calculation. Acta Physica Polonica. Vol. 124 (2013), No. 3, p. 436-444.
- [8] Guide to Expression of Uncertainty in Measurement. Supplement 1. Numerical methods for the Propagation of Dis-tributions. BIPM 2004.