MINUT 2023 (5), s. 17–36
ISSN 2719-3063

Jakub J. LUDEW[1], Michał RÓŻAŃSKI[1], Adrian SMUDA[1], Wiktor TOMICZEK[2], Roman WITUŁA[1]

[1]Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

[2]Uczeń Akademickiego Liceum Ogólnokształcącego Politechniki Śląskiej, ul. Tadeusza Kościuszki 54, 44-200 Rybnik

Równania rekurencyjne, szeregi oraz iloczyny nieskończone – zadania i problemy I

Streszczenie. Tytuł: *Wybór zadań i problemów o ciągach...* obejmuje trzy opracowania, które nazwiemy dalej odpowiednio częścią pierwszą, częścią drugą oraz częścią trzecią pracy. W prezentowanej pierwszej części przedstawimy zestaw zadań i problemów do samodzielnego rozwiązania. W części drugiej i trzeciej tej pracy zaprezentujemy rozwiązania i wskazówki do rozwiązań wielu spośród zaproponowanych w części pierwszej pracy zadań i problemów.

Słowa kluczowe: ciągi liczbowe, równania rekurencyjne, szeregi liczbowe, iloczyny nieskończone, liczba e, stała Eulera, punkt skupienia ciągu, punkt akumulacji ciągu, zależności asymptotyczne dla wybranych ciągów liczbowych.

We wszystkich trzech częściach stosujemy następujące, standardowe oznaczenia:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}, \qquad \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, \qquad \mathbb{Z} = \{x : x \in \mathbb{N}_0 \vee -x \in \mathbb{N}\},$$

$$\mathbb{Q} - \text{ zbiór liczb wymiernych}, \ \mathbb{R} - \text{ zbiór liczb rzeczywistych}, \ \mathbb{R}_+ := \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\},$$

$$\mathbf{z} := \left\{ \{a_n\} \subset \mathbb{R}_+ : \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \right\}, \quad \mathbf{r} := \left\{ \{a_n\} \subset \mathbb{R}_+ : \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \wedge \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \right\},$$

$$\mathbf{z}_0 := \left\{ \{a_n\} \subset (0,1) : \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \right\}, \quad \mathbf{r}_0 := \left\{ \{a_n\} \subset (0,1) : \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \wedge \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \right\},$$

gdzie dla ciągów nieskończonych: $a_n \in \mathbb{R}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, stosujemy specjalne oznaczenie: $\{a_n\}$. Ponadto zapis: $\{a_n\} \subset X$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, oznacza, że $(\forall n \in \mathbb{N}) : a_n \in X$. Piszemy też dla zwięzłości zapisu, że $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ jest ciągiem zerowym, jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, czyli gdy $\{a_n\}$ jest ciągiem zbieżnym do zera.

Autor korespondencyjny: M. Różański (michal.rozanski@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 23.11.2022.

1. Dla jakich wartości $\alpha \in \mathbb{R}$, zdefiniowany poniżej ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny:

$$x_1 = \alpha \text{ oraz } x_{n+1} = |x_n|^\beta - \delta^\beta + \delta, \quad n \in \mathbb{N},$$

gdzie $\beta, \delta \in \mathbb{R}_+, \beta > 1, \delta \geqslant 2^{(\beta-1)^{-1}}$.

2. Niech $a, \alpha, x, s \in \mathbb{R}_+, \alpha < 1$. Definiujemy ciąg $\{x_n\}$ następująco: $x_1 = x$ oraz $x_{n+1} = \alpha x_n + (1-\alpha) a x_n^{-s}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że:

   a) jeśli $\alpha \in [s(s+1)^{-1}, 1)$, to ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do $a^{(s+1)^{-1}}$;

   b) jeśli $s > 1$ i $\alpha < (s-1)(s+1)^{-1}$, to ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do $a^{(s+1)^{-1}}$ dokładnie wtedy, gdy dla pewnego indeksu $n \in \mathbb{N}$ mamy $x_n = a^{(s+1)^{-1}}$.

   Problem. Zbadaj zbieżność ciągu $\{x_n\}$ w przypadkach gdy $s > 1$ i $\alpha \in \big((s-1)(s+1)^{-1},\, s(s+1)^{-1}\big)$ oraz gdy $s < 1$ i $\alpha < s(s+1)^{-1}$.

3. Pokaż, że dla dowolnego $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$ ciąg $\{x_n\}$ określony następująco: $x_1 = \alpha$ oraz $x_{n+1} = x_n + [\operatorname{sgn}(1-x_n)]|1-x_n|^\beta$ dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie $\beta \in (0,1)$, ma dokładnie dwa punkty skupienia: $1 - 2^{-(1-\beta)^{-1}}$ oraz $1 + 2^{-(1-\beta)^{-1}}$.

4. Jeśli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, przyjmiemy:

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

to otrzymujemy ciąg $\{x_n\}$ zbieżny do $\sqrt{2}$. Załóżmy ogólniej, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, dane są liczby $c_i \in \mathbb{R}_+$ oraz $s_i \in (0,1)$ dla indeksów $i = 1, 2, \ldots, k$ (dopuszczamy również przypadek, gdy $s_1 = 1$, $c_1 < 1$ oraz $s_i < 1$ dla indeksów $i > 1$). Wówczas dla dowolnych $x_i \in \mathbb{R}_+$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, rekurencyjnie określony ciąg:

$$x_{n+k} = c_1 x_n^{s_1} + c_2 x_{n+1}^{s_2} + \ldots + c_k x_{n+k-1}^{s_k}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

jest zbieżny do granicy, której wartość nie zależy od przyjętych warunków początkowych.

5. Niech $x_1 = \beta$ oraz $x_{n+1} = \alpha - \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$, $n \in \mathbb{N}$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \geqslant e$. Udowodnij, że ciąg $\{x_n\}$ ma co najwyżej dwa punkty skupienia. W szczególności, gdy $\alpha \geqslant e + \frac{1}{2}$, to ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny.

   Problem. Rozstrzygnij zbieżność ciągu $\{x_n\}$ w przypadku gdy $e \leqslant \alpha < e + \frac{1}{2}$.

6. Niech $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$. Załóżmy, że istnieją $k \in \mathbb{N}$ oraz liczby $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{R}_+$ takie, że zachodzi $x_{n+k} \leqslant \left(\prod\limits_{i=1}^{k} x_{n+ki}^{p_i}\right)^M$, gdzie $M^{-1} := \sum\limits_{i=1}^{k} p_i$. Udowodnij, że jeśli $k = 2$ albo $k > 2$ i zachodzi nierówność $p_1 > \sum\limits_{i=3}^{k} (i-2) p_i$, to ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny.

   Problem. Rozstrzygnij, na ile ostatnia nierówność determinuje zbieżność ciągu $\{x_n\}$?

7. (Matthew Cook, Walter Janous oraz Marcin E. Kuczma, problem E 3388, AMM, 1990)[1]. Niech $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$. Udowodnij, że ciąg $\{x_n\}$ określony zależnością $x_{n+2} = 2/(x_{n+1} + x_n)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ jest zbieżny.

[1] Będziemy odtąd stosować skrót AMM dla nazwy czasopisma American Mathematical Monthly.

8. (Benjamin G. Klein oraz John Layman, AMM, problem A 6559, 1987). Dane są $x_0 = x_2 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ oraz $x_1 \in \mathbb{R}$. Połóżmy $x_{n+1} = (x_n x_{n-1} + 1)/x_{n-2}$ dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

   a) Dla jakich liczb x_1 ciąg $\{x_{2n+2}/x_{2n}\}$ jest zbieżny? Znajdź wartość ewentualnej granicy tego ciągu jako funkcji zmiennej x_1.

   b) Udowodnij, że dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}_+$, istnieje dokładnie jedna liczba $x_1 \in \mathbb{R}$ taka, że ciąg $\{x_{n+1}/x_n\}$ jest zbieżny. Znajdź tę liczbę x_1 oraz odpowiadającą jej wartość granicy ciągu $\{x_{n+1}/x_n\}$.

9. (T. S. Voermans, Nieuw Archief voor Wiskunde, problem 759). Ciąg liczb rzeczywistych $\{x_n\}$ określony jest zależnością:

$$x_1 = \alpha, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2x_n - 1}{2x_n^2}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > \frac{1}{2}$. Udowodnij, że iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny i znajdź jego wartość.

Uwaga. Podobnie jak przez szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ rozumiemy ciąg sum częściowych $\left\{\sum\limits_{n=1}^{N} a_n\right\}_{N=1}^{\infty}$, tak przez iloczyn liczbowy nieskończony $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ rozumiemy odpowiedni ciąg iloczynów częściowych $\left\{\prod\limits_{n=1}^{N} a_n\right\}_{N=1}^{\infty}$. O ile dla dowolnego szeregu liczbowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, w przypadku zbieżności ciągu $\left\{\sum\limits_{n=1}^{N} a_n\right\}_{N=1}^{\infty}$, jego granicę nazywamy sumą szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, to dla danego iloczynu liczbowego nieskończonego $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, w przypadku zbieżności ciągu $\left\{\prod\limits_{n=1}^{N} a_n\right\}_{N=1}^{\infty}$, jego granicę będziemy nazywać wartością iloczynu $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

10. Udowodnij, że dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ ciąg $\{x_n\}$ określony następująco: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ oraz $x_{n+2} = x_n(1 + x_{n+1})^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, ma co najwyżej dwa punkty skupienia. Co więcej, gdy $\beta \geqslant \alpha$ lub $\alpha \geqslant \beta + \beta^2$, to ciąg $\{x_n\}$ posiada dokładnie dwa punkty skupienia.

    Problem. Ile punktów skupienia ma ciąg $\{x_n\}$ w przypadku gdy $\beta < \alpha < \beta + \beta^2$?

11. Zbadaj, w zależności od $\alpha \in \mathbb{R}$, zbieżność ciągu $\{x_n\}$ określonego następująco: $x_1 = \alpha$ oraz $x_{n+1} = x_n(x_n^2 - x_n - 1)$, $n \in \mathbb{N}$.

12. Połóżmy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$:

$$h_n(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{n-1} k^{-\alpha}(n-k)^{-\beta}$$

i

$$l_n(\alpha, \beta) = \sum_{k=2}^{n-2} (\ln k)^{-\alpha} \ln(n-k)^{-\beta}$$

o ile $n \geqslant 4$. Udowodnij następujące zależności:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(\alpha,\beta) = \begin{cases} \infty, & \text{gdy } \alpha+\beta<1, \\ \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta), & \text{gdy } \alpha+\beta=1, \\ 0, & \text{gdy } \alpha+\beta>1, \end{cases}$

gdzie symbol Γ oznacza funkcję gamma. Po definicję oraz podstawowe własności tej funkcji odsyłamy zainteresowanego Czytelnika do podręcznika [13]. Odnotujmy jeszcze, że otrzymany tu wzór dla iloczynu funkcji gamma wiąże się z tzw. funkcją beta:

$$\mathrm{B}(u,v) := \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$$

dla dowolnych $u,v \in \mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$. Gdy $\alpha,\beta\in(0,1)$ oraz $\alpha+\beta=1$, to:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \mathrm{B}(\alpha,\beta),$$

albowiem $\Gamma(1)=1$. Po więcej szczegółów oraz dobre wprowadzenie do zespolonej teorii funkcji beta i gamma odsyłamy czytelnika do [27];

b) $\lim\limits_{n\to\infty} l_n(\alpha,\beta)=\infty$ dla dowolnych $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n(\alpha,\beta)<\infty$ dokładnie wtedy, gdy $\min\{\alpha,\beta\}>1$.

13. (Uogólniona granica Eulera).

Eulerowi zawdzięczamy udowodnienie istnienia granicy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, jak też zwrócenie uwagi na kluczową rolę jaką odgrywa ta granica w matematyce. Również od Eulera wywodzi się oznaczenie tej granicy literą e (zob. [6]). Poniżej przedstawimy ogólny wariant tej granicy (Reza Farhadian [12]). Niech $\{A_n\}$ będzie rosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich takim, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_{n+1}}{A_n}=1$. Przyjmijmy: $d_n := A_{n+1}-A_n$, $n\in\mathbb{N}$. Udowodnij, że:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)^{\frac{A_n}{d_n}} = e.$$

Uwaga.

a) N. Batir oraz M. Cancan w pracy [5] udowodnili następujące nierówności:

$$\exp\left(1-\frac{n}{2(n+c)^2}\right) \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \exp\left(1-\frac{n}{2(n+d)^2}\right) \tag{1}$$

dla każdego $n\in\mathbb{N}$, gdzie $c=\frac{1}{\sqrt{2-\ln 4}}-1=0,27649\ldots$ oraz $d=\frac{1}{3}$. Dowód tych nierówności sprowadza się do wykazania, że funkcja:

$$\omega(x) := \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}} - x, \qquad x>0,$$

jest rosnąca w półosi $(0,\infty)$. Wówczas nierówności (1) wynikają z nierówności:

$$\omega(1)\leqslant\omega(n)\leqslant\omega(\infty) := \lim_{x\to\infty}\omega(x).$$

Y. Hu oraz C. Mortici w pracy [19] wykazali zależność asymptotyczną:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \exp\left(-1+\frac{n}{2\left(n+\frac{1}{3}-\frac{1}{12n}\right)^2}\right)=1.$$

b) Jak wynika z nierówności (1) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba e znajduje się pomiędzy liczbami $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ i $b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Fakt ten można udowodnić też na wiele innych sposobów. Przykładowo można udowodnić, że ciąg:

$$c_n = \left(1+\frac{1}{4n}\right)a_n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

jest rosnący, natomiast ciąg:

$$d_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)a_n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

jest malejący.

W rozwiązaniu zadania M485 z czasopisma Kwant wydawanego w Rosji (chodzi o numer czasopisma z czasów Rosji Radzieckiej) zauważono, że gdyby dla danego $n \in \mathbb{N}$ podzielić przedział $[a_n, b_n]$ na cztery podprzedziały o jednakowej długości, to liczba e znalazłaby się w drugim w kolejności podprzedziale – licząc od końca a_n, a gdyby podzielić przedział $[a_n, b_n]$ na osiem podprzedziałów o jednakowej długości, to e znalazłoby się w czwartym kolejnym podprzedziale – licząc od końca a_n o ile $n > 6$. Drogi Czytelniku, czy potrafisz uogólnić te fakty na większą liczbę podziałów przedziału $[a_n, b_n]$?

c) Sanjay Kumar Khattri oraz Alfred Witkowski – polski matematyk specjalizujący się w teorii nierówności – w pracy [20] rozważali zbieżność ciągu $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{M_t(n+1,n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ gdzie dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}_+$ liczby $M_t(x,y)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ tworzą ciągłą i monotoniczną ze względu na parametr t rodzinę średnich takich, że:

$$M_0(x,y) := \sqrt{xy} \text{ jest średnią geometryczną liczb } x \text{ i } y,$$
$$M_1(x,y) := \frac{x+y}{2} \text{ jest średnią arytmetyczną liczb } x \text{ i } y.$$

Ponieważ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}_+$, $x \neq y$ zachodzą nierówności (zob. [23]):

$$\min\{x,y\} < \sqrt{xy} < L(x,y) < \frac{x+y}{2} < \max\{x,y\}, \tag{2}$$

gdzie $L(x,y) := \frac{x-y}{\ln x - \ln y}$ jest średnią logarytmiczną liczb x i y, więc ze względu na równość:

$$e = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{L(n+1,n)},$$

z (2) otrzymujemy nierówności:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n(n+1)}} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n+1+n}{2}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

W pracy [20] udowodniono m.in., że dla średniej Herona:

$$\mathrm{He}_t(x,y) := (1-t)\sqrt{xy} + t\frac{x+y}{2}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

zachodzi nierówność:

$$e < \mathrm{He}_t(n+1,n)$$

dla dowolnych $t \geqslant \frac{1}{3}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, natomiast dla każdego $t \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ istnieje $N = N(t) \in \mathbb{N}$, takie że dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geqslant N(t) \Longrightarrow e > \mathrm{He}_t(n+1,n).$$

Z kolei dla średniej Höldera zwanej też średnią potęgową $\mathrm{H}_t(x,y)$, $t \in \mathbb{R}$, określonej wzorem:

$$\mathrm{H}_t(x,y) := \begin{cases} \max\{x,y\}, & \text{gdy } t = \infty, \\ \left(\frac{x^t+y^t}{2}\right)^{1/t}, & \text{gdy } t \neq 0, \\ \sqrt{xy}, & \text{gdy } t = 0, \\ \min\{x,y\}, & \text{gdy } t = -\infty, \end{cases}$$

zachodzi nierówność:

$$e \leqslant \mathrm{H}_t(n+1,n)$$

dla dowolnych $t \geqslant \frac{1}{3}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, z kolei dla dowolnych $t \leqslant 0$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność przeciwna:

$$e \geqslant \mathrm{H}_t(n+1,n).$$

Wreszcie, dla każdego $t \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ istnieje $N = N(t) \in \mathbb{N}$, takie że dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geqslant N(t) \Longrightarrow e \geqslant \mathrm{H}_t(n+1,n).$$

14. (Zależność asymptotyczna dla średniej geometrycznej elementów danego ciągu – opracowano na podstawie pracy [7]). Niech $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ będzie rosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich. Załóżmy, że istnieją liczby $r, w \in \mathbb{R}$ oraz wielomian $p \in \mathbb{R}[x]$ spełniające następującą zależność asymptotyczną:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f_k}{e^r k^{p(k)} \ln^w k} = 1,$$

co zwyczajowo zapisujemy w następujący sposób[2]

$$f_k \sim e^r k^{p(k)} \ln^w k \qquad \text{gdy } k \to \infty.$$

[2]Dla dowolnych dwóch ciągów $\{a_n\} \subset \mathbb{R}_+$ i $\{b_n\} \subset \mathbb{R}_+$ rozbieżnych do ∞ mówimy, że ciągi te są asymptotycznie równoważne, gdy n dąży do nieskończoności i piszemy $a_n \sim b_n$ gdy $n \to \infty$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Udowodnij, że wówczas dla dowolnej pary t_1, t_2 liczb rzeczywistych spełniającej warunek:

$$t_1 < r - p(0) < t_2$$

zachodzą oszacowania:

$$\left(e^{t_1} n^{p(0)} \ln^w n\right)^n < \prod_{k=1}^{n} \frac{f_k}{k^{p(k)-p(0)}} < \left(e^{t_2} n^{p(0)} \ln^w n\right)^n$$

dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$. Wyprowadź stąd zależność:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{f_k}{k^{p(k)-p(0)}}\right) - p(0)\ln n - \ln\left(\ln^w n\right)\right)^n = r - p(0)$$

lub równoważnie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{f_k}{k^{p(k)-p(0)}}}}{n^{p(0)} \ln^w n} = e^{r-p(0)}.$$

Na tej podstawie wywnioskuj następujące, szczególne zależności dla granic:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} p_k}}{n \ln n} = \frac{1}{e}$, gdzie $\{p_k\}_{k=1}$ jest ciągiem wszystkich kolejnych liczb pierwszych;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} f_k}}{(n+1)^n} = \frac{1}{e-1}$, gdzie $f_n := \sum\limits_{k=1}^{n} k^n$, $n \in \mathbb{N}$.

15. Niech $p \in \mathbb{R}_+$. Przyjmijmy:

$$\ell^{<p} = \left\{ \{a_n\} \in \ell^p : \text{istnieje } q \in (0,p) \text{ takie, że } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q < \infty \right\}.$$

a) Podaj przykład ciągu $\{a_n\} \in \ell^p \setminus \ell^{<p}$.

b) Udowodnij, że zbiory $\ell^{<p}$ oraz $\ell^p \setminus 1^{<p}$ są gęste w przestrzeni ℓ^p.

Przypomnijmy, że $\ell^p = \ell^p(\mathbb{R}) := \left\{ \{a_n\} \subset \mathbb{R} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}$, natomiast odległość (metrykę) w ℓ^p generuje norma:

$$\forall \{a_n\} \in l^p : \|\{a_n\}\| := \begin{cases} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p} & \text{gdy } p \geqslant 1, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p & \text{gdy } p \in (0,1). \end{cases}$$

16. Dla każdego $s \in \mathbb{R}_+$ zdefiniujmy następujące zbiory:

$$A_s = \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) : \{a_n\} \in \mathbf{z} \text{ oraz } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \right\},$$
$$B_s = \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n) : \{a_n\} \in \mathbf{z}_0 \text{ oraz } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \right\}.$$

Znajdź liczby $\inf A_s$, $\sup A_s$, $\inf B_s$ i $\sup B_s$. Pokaż, że kresy dolne i górne zbiorów A_s i B_s nie są osiągane w tych zbiorach. Udowodnij, że zbiory A_s i B_s są przedziałami.

17. Opisz postać zbiorów A_s^* ($s \in \mathbb{R}_+$, $s > 1$) oraz B_s^* ($s \in (0,1)$) określonych następująco:

$$A_s^* = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n : \{a_n\} \in \mathbf{z} \text{ oraz } \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = s \right\},$$
$$B_s^* = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n : \{a_n\} \in \mathbf{z}_0 \text{ oraz } \prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n) = s \right\}.$$

18. Powiemy, że ciąg iloczynów częściowych jest ograniczony z dołu, jeśli kres dolny tego ciągu jest dodatni. Udowodnij, że ograniczoność z dołu ciągu iloczynów częściowych $\left\{ \prod\limits_{k=1}^{n} (1 + a_k) \right\}$ implikuje ograniczoność z dołu następującego ciągu sum częściowych $\left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \right\}$. Podaj kontrprzykład do twierdzenia odwrotnego.

Udowodnij, że ograniczoność z góry ciągu sum częściowych $\left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \right\}$, gdzie $a_k > -1$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$, pociąga ograniczoność z góry następującego ciągu iloczynów częściowych $\left\{ \prod\limits_{k=1}^{n} (1 + a_k) \right\}$. Pokaż, że podobnie jak wyżej, twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

19. Zbadaj zbieżność szeregów $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \alpha^{S(b,n)}$, gdzie $\alpha \in (0,1)$,

$S(b,n) = \sum\limits_{k=2}^{n} (\ln k)^b k^{-1}$ oraz $b \in \{-1, 0, 1\}$.

20. Niech $\{a_k\} \in \mathbf{r}_0$. Udowodnij, że jeśli $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \right) = \infty$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} (1 - a_k) = \infty$. Wykaż na przykładzie, że założenie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$ w tym stwierdzeniu jest istotne. Pokaż, że jeśli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \right) < \infty$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} (1 - a_k) < \infty$.

Uwaga. Z powyższych stwierdzeń oraz z rozwiązania zadania 14 można wywnioskować następujące fakty: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{y}{k \ln(k)}\right) = \infty$ dla każdego $y \in \mathbb{R}_+ \setminus \{k \ln(k) : k \in \mathbb{N} \wedge k \geqslant 2\}$; szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{y}{k}\right)$ jest rozbieżny dla $y \in (0,1]$ i jest zbieżny dla pozostałych $y \in \mathbb{R}_+$; szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{y \ln(k)}{k}\right)$ jest zbieżny dla dowolnego $y \in \mathbb{R}_+$.

21. (Wariant twierdzenia Riemanna o aproksymacji liczb rzeczywistych podszeregami) Niech $\{a_n\} \in \mathbf{r}$. Udowodnij, że dla każdego $x \in (0, \infty]$, istnieje rosnący ciąg $\{k_n\}$ liczb naturalnych taki, że:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = x \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{n\to\infty} (k_{n+1} - k_n) = \infty.$$

22. a) Podaj przykład ciągu $\{a_n\} \in \mathbf{r}$ takiego, że dla każdego rosnącego ciągu $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$, jeżeli jest spełnione $\limsup\limits_{n\to\infty} k_{n+1}k_n^{-1} < \infty$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = \infty$.

    b) Znajdź ciąg $\{b_n\} \in \mathbf{r}$ taki, że dla pewnego rosnącego ciągu $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$ mamy $\lim\limits_{n\to\infty} k_{n+1}k_n^{-1} = 1$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{k_n} < \infty$.

23. Udowodnij, że dla każdego nierosnącego ciągu $\{a_n\} \in \mathbf{r}$ istnieje ciąg mnożników $\{\varepsilon_n\} \subset \{\pm 1\}$ dla którego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n = \infty \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{n\to\infty} 1_n^+ (n - 1_n^+)^{-1} = 1,$$

gdzie dla każdego $n \in \mathbb{N}$ symbol 1_n^+ oznacza liczbę indeksów $i \in \mathbb{N}$, $i \leqslant n$, takich, że $\varepsilon_i = 1$.

24. Udowodnij, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$, dla każdego ciągu $\{x_n\} \in \mathbf{r}$ oraz dla dowolnego wielomianu p nad $\mathbb{R}$ takiego, że $p(0) = 0$ i $p'(0) \neq 0$, istnieje ciąg mnożników $\{\varepsilon_n\} \subset \{\pm 1\}$ o własności $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p(\varepsilon_n x_n) = x$.

25. (Soichi Kakeya, 1914 zob. [4]). Niech $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych zbieżnym do zera. Dla każdego zbioru $B \subset \mathbb{N}$ szereg:

$$\sum_{n\in B} a_n := \left\{ \sum_{k\in\{1,\ldots,n\}\cap B} a_k \right\}_{n=1}^{\infty},$$

gdzie przyjmujemy $\sum\limits_{k\in\emptyset} a_k := 0$, nazywamy podszeregiem szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$. W szczególności gdy $B \subset \mathbb{N}$ jest zbiorem skończonym, to szereg $\sum\limits_{n\in B} a_n$ nazywamy skończonym podszeregiem szeregu $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Będziemy tu rozważać zbiór $E = E(\mathbf{a})$ sum podszeregów szeregu $\mathbf{a} := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$:

$$E = E(\mathbf{a}) := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists B \subset \mathbb{N}\colon \sum_{n\in B} a_n = x \right\}.$$

Zwróćmy w tym momencie uwagę na fakt, że symbol $\sum\limits_{n\in B} a_n$, gdzie $B \subset \mathbb{N}$ może oznaczać tu zarówno odpowiedni podszereg szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, jak też sumę tego podszeregu. Udowodnij następujące twierdzenia:

a) jeśli $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ i $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \infty$, to $E(\mathbf{a}) = (0, \infty]$,[3]

[3]Wzmocnioną wersję tego twierdzenia sformułowano w zadaniu 21.

b) jeśli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, to zbiór $E(\mathbf{a})$ jest domknięty,

c) jeśli $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, to zbiór $E(\mathbf{a})$ nie posiada punktów izolowanych, innymi słowy, na podstawie b), zbiór $E(\mathbf{a})$ jest zbiorem doskonałym,

d) jeśli $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ i dodatkowo zachodzi:

$$a_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$, mówimy wówczas, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest wolno zbieżny, to:

$$E(\mathbf{a}) = \left[0, \sum_{n=1}^{\infty} a_n\right]. \tag{3}$$

Udowodniono ponadto, że jeśli zachodzi równość (3), to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest wolno zbieżny. W pracy [30] wykorzystano ten fakt do udowodnienia twierdzenia z elementarnej teorii miary głoszącego, że każda miara nieujemna bezatomowa posiada własność Darboux,

e) jeśli $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ i dodatkowo zachodzi:

$$a_n > \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$, mówimy wówczas, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szybko zbieżny, to zbiór sum podszeregów $E(\mathbf{a})$ jest homeomorficzny z klasycznym trójkowym zbiorem Cantora. Ponadto granica $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ jest równa mierze Lebesgue'a zbioru $E(\mathbf{a})$.

Uwaga końcowa. Pełną topologiczną klasyfikację zbiorów postaci $E(\mathbf{a})$ podali dopiero J.A. Guthrie oraz J.E. Nyman w pracy [14], niestety z błędami skorygowanymi później w pracy [26]. Jeśli $\mathbf{a} \subset \mathbb{R}_+$ jest ciągiem $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takim, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, to zbiór $E(\mathbf{a})$ albo jest zbiorem skończonym, albo jest sumą mnogościową skończonej rodziny przedziałów domkniętych i ograniczonych, albo jest homeomorficzny z trójkowym zbiorem Cantora, albo jest (tej możliwości brakowało w oryginalnej wersji pracy [14]) tzw. M-Cantordziałem (od angielskiej nazwy M-Cantorval). Po szczegóły, w tym definicję M-Cantordziału, odsyłamy zainteresowanego Czytelnika do pracy [4].

26. Niech $\{a_n\} \in \mathbf{z}$. Połóżmy $r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas dla każdego $p \in (0,1)$ mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n^{-p} < (1-p)^{-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^{1-p},$$

przy czym stała $(1-p)^{-1}$ po prawej stronie znaku nierówności jest najlepsza (AMM, problem E 2996, 1983). Innymi słowy, dla każdego $p \in (0,1)$ zachodzi nierówność:

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n r_n^{-p}}{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right)^{1-p}} < \frac{1}{1-p}$$

i oszacowania tego nie da się poprawić.

Uwaga. Podaną powyżej nierówność znaleźć można w wielu standardowych podręcznikach, np. w [13], jednak bez zaakcentowania faktu, że stała $(1-p)^{-1}$ jest najlepsza.

27. Podaj przykład ciągu $\{a_n\}$ liczb rzeczywistych zbieżnego do zera, takiego że:

    a) szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^k = \infty$ dla pozostałych $k \in \mathbb{N}$;

    b) szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^k$ jest zbieżny dla wszystkich $k \in (2\mathbb{N}-1)$ zaś dla wszystkich $k \in 2\mathbb{N}$ jest rozbieżny. (George Pólya [3]). Dla dowolnego $M \subset \mathbb{N}$ skonstruuj ciąg $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ zbieżny do zera, taki że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{2k-1}$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, jest zbieżny dokładnie wtedy, gdy $k \in M$.

28. a) (Andrew Lenard, AMM). Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że jeśli $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są liczbami zespolonymi spełniającymi warunki:

    $$\sum_{i=1}^{n} a_i^r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

    to wszystkie te liczby muszą być równe zero. Podaj przykład ciągu $\{a_n\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ takiego, że każdy z szeregów $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^r$, $r \in \mathbb{N}$, jest zbieżny do zera.

    b) (Jacob Sturm, AMM, problem E 3384, 1990). Niech $\{a_n\}$ będzie różnowartościowym ciągiem liczb zespolonych takim, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny. Niech $\{c_n\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ będzie ciągiem ograniczonym. Udowodnij, że wtedy dla nieskończenie wielu liczb naturalnych r mamy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n a_n^r \neq 0$.

29. Niech $\pi = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 : n \leqslant m\}$ oraz zdefiniujmy przedział liczb naturalnych $I(n,m)$, kładąc $I(n,m) = \{k \in \mathbb{N} : n \leqslant k \leqslant m\}$ dla każdej pary $(n,m) \in \pi$. Z kolei każdy zbiór postaci $\{k \in \mathbb{N} : k \geqslant n\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, będziemy nazywali półosią na $\mathbb{N}$.

    Niech $\sigma \subset \pi$, $\sigma \neq \emptyset$. Jeśli ciąg $\{a_n\}$ liczb rzeczywistych spełnia następujący warunek:

    $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall (n,m) \in \sigma) : n > k_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a_m| \leqslant \varepsilon,$$

    to powiemy, że ciąg $\{a_n\}$ jest σ–ciągiem Cauchy'ego.

    Udowodnij poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Niech $\sigma \subset \pi$. Na to, by każdy monotoniczny σ–ciąg Cauchy'ego $\{a_n\}$ liczb rzeczywistych był zbieżny (tj. by był również π–ciągiem Cauchy'ego) potrzeba i wystarcza, by dla każdego $N \in \mathbb{N}$ zbiór:*

$$J(N,\sigma) = \bigcup\{I(n,m) : (n,m) \in \sigma \text{ oraz } n > N\}$$

zawierał półoś na $\mathbb{N}$.

30. (Erwin Kronheimer, problem A 6516, AMM). Czy istnieją liczby rzeczywiste $s_1, s_2, s_3, \ldots$, nie wszystkie równe zero, takie że każdy z następujących szeregów jest zbieżny:

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots,$$

$$s_1 + (s_1 + s_2) + (s_1 + s_2 + s_3) + \ldots,$$

$$s_1 + [s_1 + (s_1 + s_2)] + [s_1 + (s_1 + s_2) + (s_1 + s_2 + s_3)] + \ldots,$$

itd.

31. a) Albert Wilansky sformułował w Mathematics Magazine ciekawy problem. Czy następujące stwierdzenie może służyć jako kryterium zbieżności dowolnego szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o składnikach rzeczywistych? Jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ taki, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny oraz $|1 - b_n| < \varepsilon$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Odpowiedź brzmi: „NIE MOŻE". W związku z tym podaj przykład szeregu rozbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, dla którego istnieje ciąg $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ zbieżny do 1, taki że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny. Udowodnij również następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. *Niech $\{a_n\}, \{b_n\} \in \mathbf{r}$. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n^{-1} = 1$, to dla dowolnych $x \in \mathbb{R}$ oraz $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ istnieją ciągi $\{\delta_n\}, \{\sigma_n\} \subset \mathbb{R}$, obydwa zbieżne do 1 i spełniające warunki:*

$$x = a_1\delta_1 - b_1\sigma_1 + a_2\delta_2 - b_2\sigma_2 + \ldots + a_n\delta_n - b_n\sigma_n + \ldots$$

oraz $|1 - \delta_n| < \varepsilon$ i $|1 - \sigma_n| < \varepsilon$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

b) Należy podkreślić, że nawet dość radykalne wzmocnienie założeń w rozważanym w podpunkcie a) stwierdzeniu Wilansky'ego, w dalszym ciągu nie prowadzi do otrzymania skutecznego kryterium badania zbieżności szeregów, o czym przekonuje nas następujący fakt. Dla każdej przeliczalnej rodziny ciągów $\{\varepsilon_{k,n}\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbf{r}$, $k \in \mathbb{N}$, istnieje szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ rozbieżny taki, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje ciąg $\{b_{k,n}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ dla którego szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_{k,n}$ jest zbieżny i jednocześnie $|1 - b_{k,n}| < \varepsilon_{k,n}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Na zakończenie zwróćmy uwagę, że dopiero pełne wzmocnienie założeń w stwierdzeniu Wilansky'ego, tak jak w twierdzeniu poniżej, prowadzi do otrzymania kryterium zbieżności obejmującego wszystkie szeregi liczb rzeczywistych.

Twierdzenie 3. *Niech* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *będzie szeregiem liczb rzeczywistych. Jeśli dla pewnego ciągu* $\{\varepsilon_n\} \in$ $\mathbf{z}$ *istnieje ciąg* $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ *taki, że szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *jest zbieżny oraz* $|1 - b_n| < \varepsilon_n$ *dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *też jest zbieżny.*

32. Dany jest ciąg zerowy $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. Udowodnij, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieją ciągi $\{\lambda_n\}$ oraz $\{\mu_n\}$ liczb całkowitych, dla których:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n = \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n a_n$$

(AMM, problem A 6240, 1978).

Udowodnij również następujące, częściowe uogólnienie tego rezultatu. Dany jest ciąg $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ taki, że $x_0 = 0$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Jeśli $\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n)x_n^{-1} = 0$, to dla każdego ciągu zerowego $\{a_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje ciąg $\{\varepsilon_n\}$, którego każdy element należy do zbioru $\{\varepsilon x_n : n \in \mathbb{N}_0 \text{ i } \varepsilon = \pm 1\}$, taki że $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n = x$ oraz $\varepsilon_n \neq 0$ dla nieskończenie wielu indeksów $n \in \mathbb{N}$.

Z powyższego twierdzenia wynika między innymi następujący wniosek. Niech $s \in \mathbb{R}_+$. Wtedy dla każdego ciągu zerowego $\{a_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje ciąg $\{\varepsilon_n\}$, którego wszystkie elementy należą do zbioru $\{\pm n^s : n \in \mathbb{N}_0\}$, taki że $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n = x$.

33. Niech $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}_+$, gdzie k jest ustaloną liczbą naturalną. Udowodnij, że następujący szereg jest zbieżny:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^{k/n} - k \left(\prod_{i=1}^{k} a_i \right)^{1/n} \right).$$

34. Niech $\{a_n\}, \{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}_+$. Udowodnij, że jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony, $a_{n+1} \geqslant a_n - \varepsilon_n$ dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ oraz $\{\varepsilon_n\} \in \mathbf{z}$, to ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny. Natomiast, jeśli $\{\varepsilon_n\} \in \mathbf{r}$, to dla każdego domkniętego i niepustego przedziału $I \subset \mathbb{R}$ można podać przykład ograniczonego ciągu $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$, spełniającego nierówność $b_{n+1} \geqslant b_n - \varepsilon_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i którego zbiorem punktów skupienia jest przedział I.

35. Niech $s \in \mathbb{R}_+$. Połóżmy $a_n = n^s \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{-s-1} \right)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że wówczas ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do s^{-1} i zachodzą nierówności:

$$\frac{1}{2}s(1-s) \leqslant \liminf_{n\to\infty} n^{-2}(a_n a_{n+1}^{-1} - 1)$$

oraz:

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-2}(a_n a_{n+1}^{-1} - 1) \leqslant \frac{1}{2}s(s+1).$$

Pokaż, że jeżeli $s \leqslant 1$, to ciąg $\{a_n\}$ jest malejący.

36. Niech $\{b_n\} \subset \mathbb{R}_+$. Udowodnij, że jeśli ciąg $\{b_n b_{n+1}^{-1}\}$ jest zbieżny do liczby $\alpha < 1$, to:

$$\lim_{n\to\infty} b_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} b_k^{-1}\right) = (1-\alpha)^{-1}.$$

37. (Albert Wilansky, AMM, problem A 6469, 1984). Czy istnieje przeliczalna rodzina E ciągów liczb rzeczywistych, dla której zachodzi równość:

$$E^* = \left\{\{x_n\} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\right\},$$

gdzie rodzina E^* określona jest następująco:

$$E^* = \left\{\{x_n\} \subset \mathbb{R} : \text{ szereg } \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \text{ jest zbieżny dla każdego } \{y_n\} \in E\right\}.$$

Odpowiedź na ten problem jest negatywna. By się o tym przekonać, proponujemy Czytelnikowi udowodnienie następujących dwóch twierdzeń.

Twierdzenie 4. *Dla każdej przeliczalnej rodziny* $\left\{t_n^{(i)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $i \in \mathbb{N}$, *ograniczonych ciągów liczb rzeczywistych, istnieje szereg rzeczywisty* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, *warunkowo zbieżny taki, że każdy szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n^{(i)} x_n$, $i \in \mathbb{N}$, *również jest zbieżny.*

Twierdzenie 5. *Dla każdego nieograniczonego ciągu* $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$, *istnieje szereg rzeczywisty* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, *bezwzględnie zbieżny taki, że szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ *jest rozbieżny.*

38. Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ będzie liczbą algebraiczną stopnia $\geqslant 2$, tj. taką liczbą rzeczywistą dla której istnieje wilomian φ nad $\mathbb{Q}$ stopnia drugiego taki, że $\varphi(\alpha) = 0$, ale $\psi(\alpha) \neq 0$ dla każdego wielomianu ψ nad $\mathbb{Q}$ stopnia pierwszego. Niech $\{p_n q_n^{-1}\} \subset \mathbb{Q}$ będzie ciągiem zbieżnym do α, przy czym $\{p_n\} \subset \mathbb{Z}$ oraz $\{q_n\} \subset \mathbb{N}$. Udowodnij, że wówczas:

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha - p_n q_n^{-1}|^{q_n^{-1}} = 1.$$

39. Niech γ będzie stałą Eulera, tj. liczbą określoną jako granica ciągu $\{D_n\}$, gdzie:

$$D_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

a) (Laszlo Toth, problem E 3432, 1991). Udowodnij, że wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}$, zachodzą nierówności:

$$\frac{1}{2n + 2/5} < D_n - \gamma < \frac{1}{2n + 1/3},$$

przy czym $1/3$ nie może być zastąpiona przez liczbę większą, natomiast liczba $2/5$ może być pomniejszona.

b) (Duane W. DeTemple [10], [9]). Przyjmijmy teraz:

$$R_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, zachodzą nierówności:

$$\frac{1}{24(n+1)^2} < R_n - \gamma < \frac{1}{24n^2}.$$

Warto jeszcze nadmienić, że Duane DeTemple oraz Shun–Hwa Wang udowodnili w pracy [11] następującą zależność asymptotyczną (zob. stopkę na stronie 22):

$$\begin{aligned} R_n \sim \gamma &+ \frac{1}{24}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2} - \frac{7}{960}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-4} + \frac{31}{8064}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-6} + \\ &- \frac{127}{30720}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-8} - \frac{B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)}{2k}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2k} + p_k(n), \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie $B_n(x)$ oznacza n–ty wielomian Bernoulliego (zob. [2]) oraz dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności:

$$0 < (-1)^k p_k(n) < \frac{\left|B_{2k+2}\left(\frac{1}{2}\right)\right|}{2k+2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2k-2}.$$

Niezwykle interesujący jest tu fakt odkryty przez Weiping Wanga w pracy [29], że dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ zachodzi następująca zależność asymptotyczna:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2}\ln\left(2m+\frac{1}{4}\right) + \gamma + \frac{1}{24}\left(2m+\frac{1}{4}\right)^{-1} + \\ - \frac{7}{960}\left(2m+\frac{1}{4}\right)^{-2} + \frac{31}{8064}\left(2m+\frac{1}{4}\right)^{-3} - \frac{127}{30720}\left(2m+\frac{1}{4}\right)^{-4} + \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

mamy tu szereg potęgowy względem wyrażenia $\left(2m+\frac{1}{4}\right)^{-1}$, gdy $n \to \infty$, gdzie przy kolejnych potęgach wyrażenia $\left(2m+\frac{1}{4}\right)^{-1}$ mamy te same współczynniki co przy kolejnych potęgach wyrażenia $\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2}$ we wzorze (4). Wzór (5) jest szczególnym przypadkiem następującej zależności asymptotycznej W. Wanga [29]: dla dowolnego $h \in \mathbb{R}$ oraz $m \in \mathbb{N}$ mamy:

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2}\ln(2m+h) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k(h)}{(2m+h)^k}$$

gdy $n \to \infty$, gdzie ciąg $\{\alpha_k(h)\}_{k=1}^{\infty}$ określony jest rekurencyjnie:

$$\begin{aligned} \alpha_1(h) &= \frac{1-3h}{6}, \\ \alpha_k(h) &= 2^k R_k + \frac{(-h)^k}{2k} - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i}\binom{k-1}{k-i}\alpha_i(h)h^{k-i} \end{aligned}$$

dla każdego $k = 2, 3, \ldots$ oraz gdzie $R_1 = \frac{1}{12}$,

$$2^k R_k = \frac{1}{4k} - \frac{B_{2k}}{2k} - \sum_{j=1}^{k-1} 2^j R_j \binom{2k-j-1}{j-1}$$

dla każdego $k = 2, 3, \ldots$ Symbolem B_{2k} oznaczamy liczby Bernoulliego o parzystych indeksach.

c) (Marian Tetiva, Abdelhak Berkane, problem 12194 AMM **129** (2022), 386–387). Udowodnij, że:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(D_n - \gamma - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1 + \gamma - \ln(2\pi)}{2}.$$

Uwaga końcowa. Stałej Eulera poświęcona jest książka [17] autorstwa Juliana Havila.

40. (Paul Erdős, AMM, problem E 3200, 1987). Dany jest ciąg $\{x_n\} \subset \mathbb{R}_+$ rosnący i nieograniczony. Udowodnij, że jeśli $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/a_n \to \infty$, to $N(x)/\ln(x) \to \infty$ gdy $x \to \infty$, gdzie $N(x) = \sum\limits_{\mathbb{N} \ni n:\, a_n < x} 1$.

41. (Paul Erdős, Nieuw Archief voor Wiskunde, problem 589). Niech $\{a_n\}$ będzie rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Połóżmy:

$$N(x) = \sum_{\mathbb{N} \ni n:\, a_n < x} 1 \quad \text{oraz} \quad f(n) = \sum_{\mathbb{N} \ni i:\, a_i < n} (n - a_i)^{-1}.$$

Udowodnij, że:

a) jeśli $\lim\limits_{x \to \infty} x^{-1} N(x) = c > 0$, to $f(n) \to \infty$,

b) warunek $N(x) > cx$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}_+$, gdzie c jest pewną stałą dodatnią nie implikuje zależności $f(n) \to \infty$ gdy $n \to \infty$,

c) (J. Pach) jeśli $\limsup\limits_{x \to \infty} x^{-1} N(x) \ln(x) \geqslant c$, to $\limsup\limits_{n \to \infty} f(n) \geqslant c$.

42. (Warren Stenberg [28]). Rozważmy ciąg $\{a_n\} \in \mathbf{r}$. Dla każdego $x \in \mathbb{R}_+$ przyjmijmy:

$$N(x) := \left| \left\{ n \in \mathbb{N} : \; a_n \geqslant \frac{1}{x} \right\} \right|.$$

Uzasadnij, że funkcja ta jest funkcją niemalejącą zmiennej $x \in \mathbb{R}_+$, przy czym $\lim\limits_{x \to \infty} N(x) = \infty$.

a) Udowodnij następujący fakt. Niech $N(x) \neq o(x)$, czyli nie zachodzi warunek $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{N(x)}{x} = 0$. Niech $m, p \in \mathbb{R}_+$, $p > 1$ oraz $0 < K < \limsup\limits_{x \to \infty} \frac{N(x)}{x}$. Wówczas istnieje $t > m$ dla którego:

$$N(pt) - N(t) > \frac{k}{2}(p-1)t.$$

b) Na podstawie powyższego faktu udowodnij, że dla każdej permutacji h na $\mathbb{N}$ istnieje podciąg $\{c_n\}$ ciągu $\{a_{h(n)}\}$ spełniający warunek:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \infty \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n - c_{n+1}| < \infty.$$

43. a) Dany jest ciąg niemalejący $\{b_n\} \subset \mathbb{R}_+$ spełniający warunki: $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-1} = \infty$. Pokaż, że na to, by dla każdego nierosnącego ciągu $\{a_n\} \in \mathbf{z}$ zachodziła równość $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ potrzeba i wystarcza, by:

$$\liminf_{n\to\infty} n b_n^{-1} > 0.$$

b) (Donald A. Darling, AMM, problem 10412 – zob. [8]). Dany jest ciąg $\{a_n\} \subset \mathbb{R}_+$. Udowodnij, że na to, by dla każdego ciągu nierosnącego $\{b_n\} \subset \mathbb{R}_+$ dla którego nierówność $b_n \geqslant a_n$ zachodzi dla nieskończenie wielu indeksów $n \in \mathbb{N}$ spełniony był warunek $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ potrzeba i wystarcza, by:

$$\liminf_{n\to\infty} n a_n > 0.$$

Uwaga. Podpunkt b) stanowi w pewnym sensie odwrotny wariant punktu a). Należy jedynie zastąpić tu ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ przez odpowiednio ciągi $\{b_n\}$ i $\{a_n\}$ z punktu a).

44. (Grahame Bennet, AMM, problem E 3201, 1987). Niech $\{a_n\} \in \mathbf{z}$. Powiemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szybko zbieżny, jeśli istnieje ciąg $\{b_n\} \subset \mathbb{R}_+$ taki, że:

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \left(\sum_{m=1}^{N} b_m \right) = O(b_N).$$

45. a) Załóżmy, że liczba $\alpha \in \mathbb{R}$ spełnia warunek $2^n\alpha \neq k\pi$ dla dowolnych $k \in \mathbb{Z}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że wtedy ciąg $\{\sin(2^n\alpha) \colon n \in \mathbb{N}\}$ nie jest zbieżny.

b) Czy istnieje $\alpha \in \mathbb{R}_+$ takie, że zero jest punktem skupienia ciągu $\{n^\alpha \sin(n)\}$? Zauważmy tylko, że gdy $\alpha > 41$, to jedynymi punktami skupienia tego ciągu są $\pm\infty$. Wynika to m.in. z następującego rezultatu Kurta Mahlera z pracy [22] z 1953 roku, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geqslant 2$, zachodzi oszacowanie:

$$\left| \pi - \frac{n}{m} \right| \geqslant m^{-42}.$$

Podkreślmy, że wykładnik 42 w tym oszacowaniu był następnie redukowany – poprawnie – przez Mahlera do 30, gdy m jest dostatecznie duże, przez M. Mignotte'a do 20, G.V. Chudnovsky'ego do 19,8899944... i wreszcie przez Masayoshiego Hatę do 13,394 w pracy [15]. Jako ciekawostkę przytoczmy jeszcze jeden fakt, że gdy $\beta > 6$, to jedynymi punktami skupienia ciągu $\{n^\beta \sin(\sqrt{3}n) \colon n \in \mathbb{N}\}$ są $\pm\infty$. Wynika to podobnie jak poprzedni fakt z oszacowania udowodnionego tym razem przez M. Hatę w pracy [16], a pozostającego w tym samym stylu co oszacowanie Mahlera: dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $q_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, takie że:

$$\left| \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{p}{q} \right| \geqslant q^{-\xi-\varepsilon}$$

dla dowolnych $p, q \in \mathbb{N}$, gdzie $q \geqslant q_0(\varepsilon)$ oraz $\xi = 4{,}601579\ldots$

c) (Paul R. Chernoff, AMM, problem A 6336, 1981). Niech $k \in \mathbb{N}$ i niech $a_1, a_2, \ldots, a_k$ będą liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że jeśli:

$$\lim_{n\to\infty} \sin(na_1)\sin(na_2)\ldots\sin(na_k) = 0,$$

to co najmniej jedna z liczb a_i, $1 \leqslant i \leqslant k$ jest całkowitą wielokrotnością liczby π.

d) Następujący problem, jednak w nieprawidłowym sformułowaniu, zaproponował Vladimir Naroditsky w AMM (problem A 6442, 1983). Tutaj podajemy wesję skorygowaną. Niech $N \in \mathbb{N}$ oraz $a_k, \lambda_k \in \mathbb{R}$, dla $k = 1, \ldots, N$. Udowodnij, że jeśli następująca granica istnieje:

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_k \exp(i\lambda_i t),$$

to albo $a_k\lambda_k = 0$ dla każdego $k = 1, \ldots, N$, albo wszystkie lambdy są identyczne i $a_1 + a_2 + \ldots + a_N = 0$.

46. Połóżmy $S(\tau) = \{|\sin n|^{n^\tau} : n \in \mathbb{N}\}$ dla każdego $\tau \in \mathbb{R}$.

a) (Robert Curry oraz James O. Friel, AMM, problem A 6379, 1982). Pokaż, że ciąg $S(-1)$ jest zbieżny do 1 (wskazówka – zobacz wynik Mahlera z punktu b)).

b) (Gerald Weinstein, AMM, problem A 6564, 1988). Udowodnij, że ciąg $S(2)$ nie jest zbieżny. Jeśli $C \in \mathbb{R}_+$ jest stałą o własności $|p/q - \pi| > q^{-C}$ dla dostatecznie dużych $p, q \in \mathbb{N}$, to ciąg $S(\tau)$ jest zbieżny do 0 dla każdego $\tau > C$.

Uwaga. W nawiązaniu do powyższego zadania proponujemy jeszcze zapoznać się z zawartością podrozdziałów 11.2–11.4 w książce [1].

47. (John von Neumann [24] – jako prekursor, a ponadto: Descovich, Niederreiter, van der Corput, Hlawka). Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną i niech $\{x_n\} \subset X$.

Definicja 1. *Zbiorem punktów akumulacji $A(\{x_n\})$ ciągu $\{x_n\}$ nazywamy zbiór:*

$$A(\{x_n\}) := \{x \in X : \textit{dla każdego zbioru otwartego } U \textit{ zawierającego } x \\ \textit{istnieje nieskończenie wiele } n \in \mathbb{N} \textit{ takich, że } x_n \in U\}.$$

Udowodnij następujące twierdzenie o przegrupowaniu ciągów w (X, ρ).

Twierdzenie 6 (Harald Niederreiter [25]). *Jeśli (X, ρ) jest przestrzenią metryczną zwartą, $\{x_n\} \subset X$ i $\{y_n\} \subset X$, to następujące warunki są równoważne:*

a) istnieje permutacja τ na $\mathbb{N}$ taka, że:

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(x_n, y_{\tau(n)}\right) = 0,$$

b) $A(\{x_n\}) = A(\{y_n\})$.

Literatura

1. Adam M., Bajorska-Harapińska B., Hetmaniok E., Ludew J., Pleszczyński M., Różański M., Słota D., Słowik R., Smoleń B., Uryga J., Wituła R., *Szeregi liczbowe w analizie matematycznej i w teorii liczb*, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 2021.
2. Adam M., Bajorska-Harapińska B., Hetmaniok E., Ludew J., Pleszczyński M., Różański M., Słota D., Słowik R., Smoleń B., Uryga J., Wituła R., *Wybrane zagadnienia z teorii szeregów potęgowych*, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 2020.
3. Aleksiejew W.M. (red.), *Wybrane zadania z czasopisma „American Mathematical Monthly"*, Wyd. Mir, Moskwa 1977 (wydanie po rosyjsku, angielska wersja jest znacznie uboższa).
4. Bartoszewicz A., Filipczak M., Prus-Wiśniowski F., *Topological and algebraic aspects of subsums of series*, 345–366, w monografii dedykowanej profesorowi Janowi Stanisławowi Lipińskiemu pod tytułem: *Traditional and Present–day Topics in Real Analysis*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2013.
5. Batir N., Cancan M., *Sharp inequalities involving the constant e and the sequence $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$*, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. **40** No 8 (2009), 1101–1109.
6. Boyer C. (revised by Merzbach U.), *History of Mathematics*, Wiley, 1991.
7. Chmielowska A., Różański M., Smoleń B., Sobstyl I., Wituła R., *Asymptotic relations for the products of elements of some positive sequences*, Open Math. **18** (2020), 886–893.
8. Darling D.A., Lindsey J. H., *A partial comparison test for divergence*, Amer. Math. Monthly **104** No 10 (1997), 975–975.
9. DeTemple D.W., *A geometric look at sequences that converge to Euler's constant*, College Math. J. **37** No 2 (2006), 128–131.
10. DeTemple D.W., *A quicker convergence to Euler's constant*, Amer. Math. Monthly **100** (1993), 468–470.
11. DeTemple D.W., Wang S–H., *Half integer approximations for the partial sums of the harmonic series*, J. Math. Anal. Appl. **160** (1991), 149–156.
12. Farhadian R., *A generalization of Euler's limit*, Amer. Math. Monthly **129** No 4 (2022), 384–384.
13. Fichtenholz G.M., *Rachunek różniczkowy i całkowy, tom II*, PWN, Warszawa 1999.
14. Guthrie J.A., Nymann J.E., *The topological structure of the set of subsums of an infinite series*, Colloq. Math. **55** (1988), 323–327.
15. Hata M., *A lower bound for rational approximation to π*, J. Number Theory **43** No 1 (1993), 51–67.
16. Hata M., *Rational approximations to π and some other numbers*, Acta Arith. **63** No 4 (1993), 335–349.
17. Havil J., *Gamma–Exploring Euler's Constant*, Princeton University Press, 2003.
18. Hu X., Lu D., Wang X., *New quicker sequences and inequalities with continued fraction towards Euler's constant*, Results Math. 73:28 (2018).
19. Hu Y., Mortici C., *Sharp inequalities related to the constant e*, J. Ineq. Appl. (2014), 2014:382.
20. Khattri S.K., Witkowski A., *Euler's number and some means*, Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences **28** No 4 (2012), 369–377.
21. Lubeck B., Ponomarenko V., *Subsums of the harmonic series*, Amer. Math. Monthly **125** No 4 (2018), 351–356.

22. Mahler K., *On the approximation of* π, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **56** (1953), 30–42 (artykuł został zamieszczony także w znanej monografii: Berggren L., Borwein J., Borwein P., *Pi: A Source Book*, 2nd ed., Springer, New York 2000).
23. Mitrinovic D., *Elementarne nierówności*, PWN 1972.
24. von Neumann J., *Charakterisierung des Spektrums eines Integraloperators*, Hermann, Paris 1935, 11–12.
25. Niederreiter H., *A general rearrangement theorem for sequences*, Arch. Math. **43** (1984), 530–534.
26. Nymann J.E., Sáenz R.A., *On a paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series*, Colloq. Math. **83** (2000), 1–4.
27. Rabsztyn S., Słota D., Wituła R., *Funkcje gamma i beta, tomy 1 i 2*, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 2012.
28. Stenberg W., *On rearrangements of infinite series*, Proceedings of the Netherlands Academy of Sciences (poprzednik topowego dziś holenderskiego czasopisma matematycznego Indagationes Mathematicae) **64** (1961), 459–475.
29. Wang W., *Harmonic number expansions of the Ramanujan type*, Results Math. **73**: 161 (2018).
30. Wituła R., *Continuity and the Darboux property of nonatomic finitely additive measure*, in: *Generalized Functions and Convergence*, Memorial Volume for Professor Jan Mikusiński (eds. P. Antosik and A. Kamiński), World Scientific, 1990.