

Adam OWCZARKOWSKI, Jarosław GOŚLIŃSKI, Piotr OWCZAREK, Dominik RYBARCZYK
POLITECHNIKA POZNAŃSKA,
ul. Piotrowo 3a, 60-965 Poznań

Badanie i porównanie algorytmów LQR i backstepping do sterowania wahadła odwróconego z napędem inercyjnym

Mgr inż. Adam OWCZARKOWSKI

W 2011 roku ukończył studia o kierunku Automatyka i Robotyka na Wydziale Elektrycznym Politechniki Poznańskiej. Od tego czasu, jest studentem studiów doktoranckich na tej samej uczelni. Jego praca głównie skupia się na teorii sterowania nieliniowego i implementacji jej w rzeczywistych układach robotycznych.



e-mail: adam.j.owczarkowski@doctorate.put.poznan.pl

Mgr inż. Piotr OWCZAREK

Doktorant i asystent na wydziale Budowy Maszyn i Zarządzania w Zakładzie Urządzeń Mechatronicznych Politechniki Poznańskiej. W 2011 roku ukończył Automatykę i Robotykę na Wydziale Elektrycznym Politechniki Poznańskiej. Jego zainteresowania skupiają się wokół przetwarzania obrazów, sztucznej inteligencji, projektowaniu urządzeń elektronicznych i mechatronicznych oraz na robotach mobilnych jak i sterownikach przemysłowych.



e-mail: piotr.owczarek@put.poznan.pl

Mgr inż. Jarosław GOŚLIŃSKI

W 2011 roku ukończył studia na kierunku Automatyka i Robotyka. Podjął pracę w korporacji gdzie zajmował się wdrażaniem systemów pomiarowych, uzyskał certyfikat CLAD (Certified LabVIEW Associate Developer). Powrócił na Politechnikę Poznańską, gdzie zaczął studia doktoranckie. Zajmuje się estymacją stanu przy wykorzystaniu bezśladowych filtrów Kalmana. Pracuje nad robotami latającymi, modelowaniem dynamiki oraz identyfikacją parametrów modeli matematycznych.



e-mail: jaroslaw.a.goslinski@doctorate.put.poznan.pl

Mgr inż. Dominik RYBARCZYK

Urodzony 13.05.1986 r. w Poznaniu. Ukończył studia w 2010 r. na Wydziale Budowy Maszyn i Zarządzania Politechniki Poznańskiej. Jest zatrudniony od 2011 r. (obecnie na stanowisku asystenta) na Wydziale Budowy Maszyn i Zarządzania w Zakładzie Urządzeń Mechatronicznych Politechniki Poznańskiej. Jego zainteresowania obejmują urządzenia mechatroniczne, sterowniki mikroprocesorowe oraz nowoczesne metody sterowania układami hydraulicznymi.



e-mail: dominik.rybarczyk@put.poznan.pl

Streszczenie

W artykule przedstawiono rezultaty działania sterowania liniowo-kwadratowego LQR (ang. *Linear Quadratic Regulator*) i nieliniowego backstepping na realnym obiekcie. Obiektem sterowania jest wahadło odwrócone z napędem inercyjnym (IWP - ang. *Inertia Wheel Pendulum*). Posiada ono dwa stopnie swobody: kąt odchylenia od pionu oraz kąt obrotu koła zamachowego. Wirująca masa napędza wysokomomentowy silnik umieszczony wewnątrz konstrukcji. Obiekt posiada mniej wymuszeń (jedno) niż stopni swobody (dwa) i dlatego nazywany jest *underactuated*. Celem układu regulacji jest utrzymywanie urządzenia w pozycji pionowej stanowiącej punkt równowagi. Zastosowano sterowanie nieliniowe backstepping. Kąt obrotu koła zamachowego mierzony jest przez enkoder inkrementalny. Do pomiaru poziomu odchylenia od pionu zastosowano jednostkę IMU (ang. *Inertial Measurement Unit*) zawierającą akcelerometr i żyroskop. Chcąc stworzyć efektywnie działającą fuzję sensoryczną, zastosowano filtrację Kalmana. Dzięki temu możliwe jest ustalenie odpowiedniego stopnia zaufania odpowiednim potokom pomiarowym i odfiltrowanie szkodliwych zakłóceń. Wykonano testy na obiekcie rzeczywistym i udowodniono poprawność działania zastosowanych algorytmów.

Słowa kluczowe: sterowanie nieliniowe, backstepping, LQR, filtr Kalmana.

Comparison of LQR control and nonlinear backstepping control using an inertia wheel pendulum

Abstract

This paper presents the results and comparison of linear quadratic control LQR and nonlinear backstepping on a real device. This device is the inverted pendulum driven by an accelerating inertia – inertia wheel pendulum. It has two degrees of freedom: the angle of inclination and the angle of rotation of the flywheel and one actuator – a high torque DC electric engine. Thus it is called *underactuated*. The purpose of the control system is to maintain the device in a vertical position which is the unstable equilibrium point. The angle of rotation of the flywheel is measured by an incremental encoder. To measure the angle from the vertical position, there was used the IMU (Inertial Measurement Unit) containing an accelerometer and a gyroscope. In order to create an effectively functioning sensory fusion, Kalman filtering was used. This made it possible to determine the

appropriate level of trust for sensors and to filter out harmful noise. The correct effect of the used algorithms is presented.

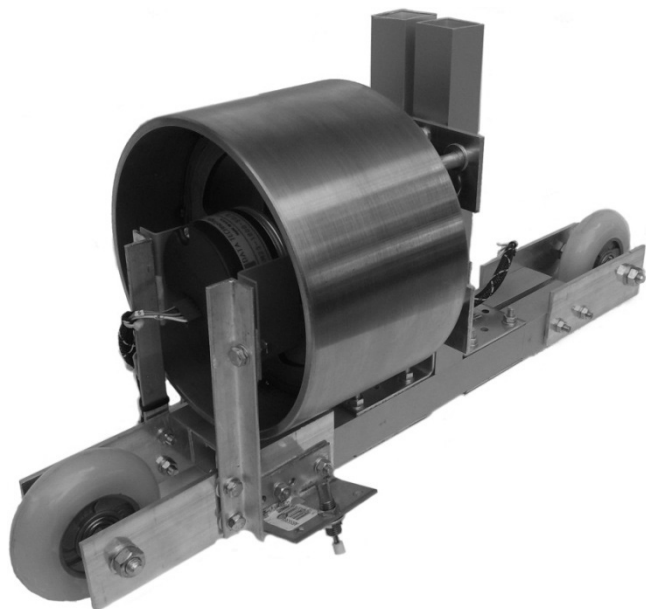
Keywords: nonlinear control, backstepping, LQR, Kalman filter.

1. Wstęp

Sterowanie układami *underactuated*, a więc posiadającymi mniej wymuszeń niż sterowań w obecnych czasach staje się coraz częstszym zadaniem stawianym elektronicznym układom. Szczególnie jest to istotne, gdy urządzenie ma za zadanie funkcjonowanie w punkcie pracy pozbawionym stabilności trwałej. Wahadło odwrócone jest klasycznym przykładem obiektu niestabilnego i nieliniowego [5, 6]. W wielu bardziej złożonych układach, takich jak np. maszyny kroczące, działanie pewnych ich fragmentów (np. nóg) jest analogiczne do prezentowanego układu.

Niniejszy artykuł przedstawia rezultaty działania dwóch algorytmów sterowania: LQR i backstepping. Badania zostały wykonane na rzeczywistym wahadle odwróconym z napędem inercyjnym IWP (ang. *Inertia Wheel Pendulum*) – przedstawiono go na rysunku 1. Rozważany obiekt posiada dwa stopnie swobody: kąt odchylenia od pionu α i kąt obrotu koła inercyjnego ϕ , oraz jedno wymuszenie: prąd w silniku i . Przez mniejszą liczbę wymuszeń od liczby stopni swobody można go zaliczyć do układów *underactuated*. Do opisu matematycznego tego obiektu zastosowano różniczkowe równania Lagrange'a zawierające elementy nieliniowości. Powyższe aspekty sprawiają, że sterowanie tym układem nie jest trywialne.

Przetestowano dwa algorytmy sterowania. Pierwszym z nich to algorytm liniowo-kwadratowy LQR (ang. *Linear Quadratic Regulator*). Pomimo tego, że jest on z natury liniowy to nadaje się on do sterowania układów nieliniowych w wąskim obszarze wokół punktu linearyzacji. W dalszej części artykułu będą przedstawione jego najważniejsze równania oraz obiecujące wyniki działania. Jako drugi zostanie przedstawiony algorytm backstepping. Zostaną ukazane jego zalety i wady oraz możliwe dalsze rozwinięcia.



Rys. 1. Zdjęcie obiektu, na którym prowadzono badania
Fig. 1. Photography of the object

Oprócz algorytmów sterowania został zaimplementowany estymator stanu – filtr Kalmana. Pozwala on utworzyć z akcelerometru i żyroskopu fuzję sensoryczną. Wychodzący z niego sygnał trafia bezpośrednio do regulatora.

Na potrzeby badań wykonano realną konstrukcję. W artykule zamieszczono wyniki pomiarów działającego urządzenia.

2. Model matematyczny

Korzystając z algorytmów sterowania nieliniowego przedstawionych w niniejszym artykule należało wyznaczyć model matematyczny obiektu. Do pełnego opisu wystarczy układ dwóch równań różniczkowych:

$$\ddot{\alpha} = \psi_1 \ddot{\phi} + \psi_2 \dot{\alpha} + \psi_3 \sin(\alpha) \quad (1)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{k_s i - b_\phi \dot{\phi}}{I_k} \quad (2)$$

gdzie: α - kąt odchylenia konstrukcji od pionu, ϕ - kąt obrotu wału silnika, k_s - stała silnika, b_ϕ - współczynnik tarcia na wale silnika, i - prąd płynący przez uzwojenia silnika, I_k - moment bezwładności koła zamachowego, ψ_1 , ψ_2 i ψ_3 - stałe współczynniki.

Współczynniki ψ_1 , ψ_2 i ψ_3 przyjmują następującą postać:

$$\psi_1 = \frac{I_k}{I_k + I_r} \quad (3)$$

$$\psi_2 = \frac{b_\alpha}{I_k + I_r} \quad (4)$$

$$\psi_3 = \frac{g l_p m_c}{I_k + I_r} \quad (5)$$

gdzie: I_r - moment bezwładności całej konstrukcji, b_α - współczynnik tarcia wahadła względem podłoża, g - przyspieszenie ziemskie, l_p - wysokość wahadła, m_c - masa wahadła.

Więcej na temat modelu matematycznego można odnaleźć w podanych referencjach [1, 2].

3. Sterowanie LQR

Najważniejsze równania związane z regulatorem LQR zostały zamieszczone poniżej:

$$u_{LQR} = -Kx_{LQR} \quad (6)$$

$$J = \sum_{i=0}^n [x_{LQR}^T Q x_{LQR} + R u_{LQR}^2] \quad (7)$$

$$x_{LQR} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \dot{\alpha} \\ \phi \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$P_{k-1} = Q + A_d^T (P_k - P_k B_d (R + B_d^T P_k B_d)^{-1} B_d^T P_k) A_d \quad (9)$$

$$K = (R + B_d^T P_k B_d)^{-1} B_d^T P_k A_d \quad (10)$$

$$K = [51.57 \quad 17.19 \quad -0.40] \quad (11)$$

$$R = 100 \quad (12)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

gdzie: u_{LQR} - sterowanie (prąd w uzwojeniach silnika), x_{LQR} - wektor stanu, n - horyzont sterowania, Q - macierz wag stanu, R - waga sygnału sterującego, A_d i B_d - macierze dyskretnych równań stanu obiektu, K - wektor wzmocnień, P_{k-1} - wynik obliczeń równania Riccatiego, k - liczba iteracji w procesie obliczania równania Riccatiego.

Model matematyczny regulacji LQR został szczegółowo omówiony w podanej literaturze [1, 2]. Algorytm ten głównie opiera się o minimalizację wskaźnika jakości J . Chcąc spełnić prawo sterowania należy obliczyć wektor wzmocnień K . Do tego wymagane jest obliczenie iteracyjnego, dyskretnego, macierzowego równania Riccatiego, którego wynikiem jest macierz P_{k-1} . Istnieje możliwość zmiany charakterystyki działania regulatora poprzez zmiany wag Q oraz R . Uzasadnienie wyboru przyjętych wartości zamieszczono w referencjach [2].

4. Sterowanie backstepping

Na potrzeby sterowania backstepping przyjęto następujące zmienne stanu:

$$\begin{bmatrix} b x_1 \\ b x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Zredukowano liczbę stopni swobody i przyjęto jako wielkość sterującą przyspieszenie kątowe koła zamachowego:

$$u = \ddot{\phi} \quad (15)$$

Wyznaczono nowe równanie obiektu zgodnie z przyjętymi oznaczeniami.

$$\begin{bmatrix} {}_b x_1 \\ {}_b x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_b x_2 \\ \psi_2 {}_b x_2 + \psi_3 \sin({}_b x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_1 \end{bmatrix} u \quad (16)$$

Sterowanie backstepping bazuje na teorii stabilności w sensie Lapunowa. Przyjęto następującą funkcję Lapunowa:

$$V_1(z_1, z_2) = \frac{1}{2} {}_b x_1^2 + \frac{1}{2} ({}_b x_2 + k_1 x_1^2)^2 \quad (17)$$

Na koniec wyznaczono prawo sterowania:

$$u = \frac{1}{\psi_1} \left(-{}_b x_1 - \psi_2 {}_b x_2 - \psi_3 \sin({}_b x_1) - k_1 {}_b x_2 - k_2 ({}_b x_2 + k_1 x_1^2) \right) \quad (18)$$

gdzie: k_1 i k_2 - współczynniki konfiguracyjne [4].

Tak wyglądają najważniejsze równania algorytmu backstepping zimplementowanego w działającym urządzeniu. Więcej informacji można odnaleźć w przytoczonej literaturze [3, 7].

5. Filtr Kalmana

Istotną kwestią pod względem działania realnego urządzenia jest właściwe interpretowanie sygnałów pomiarowych. Rozwiązano problem filtracji sygnałów pochodzących z czujników (akcelerometru, żyroskopu i enkodera) poprzez zastosowanie filtra Kalmana. Pozwala na efektywną realizację fuzji sensorycznej. Jego działanie składa się z dwóch faz. Pierwsza faza (faza predykcji) opisana jest następującymi równaniami:

$$\hat{x}_k^- = A_k \hat{x}_{k-1}^- + B_k u_{k-1} \quad (19)$$

$${}^k P_k^- = A_k {}^k P_{k-1}^- A_k^T + {}^k Q \quad (20)$$

a druga faza (faza korekcji):

$$K_k = {}^k P_k^- C_k^T (C_k {}^k P_k^- C_k^T + {}^k R)^{-1} \quad (21)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - C_k \hat{x}_k^-) \quad (22)$$

$${}^k P_k = (I - K_k C_k) {}^k P_k^- \quad (23)$$

gdzie: A_k , B_k i C_k - macierze zlinearyzowanego obiektu, u_{k-1} - sterowanie, ${}^k P_k^-$ - macierz kowariancji, ${}^k R$ i ${}^k Q$ - wariancje szumu czujników i procesu, K_k - wzmacnienie Kalmana.

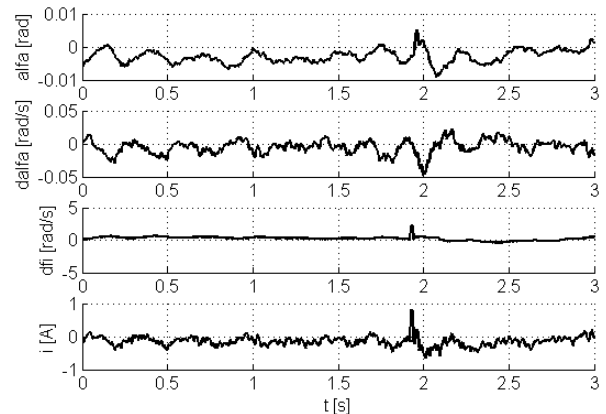
Parametry ${}^k R$ i ${}^k Q$ pozwalają dopasować stopnie zaufania odpowiednim sensorom [1].

6. Wyniki badań

Wyżej opisane algorytmy zimplementowano w rzeczywistym obiekcie. Wykonano testy działania obu regulatorów: LQR i backstepping. W trakcie badań układ poddano różnym zakłóceniom chcąc sprawdzić jakość procesu regulacji.

Zaprojektowany regulator LQR poddano pierwszej próbie. Nie działano na niego żadnymi zakłóceniami z zewnątrz. Jego zadaniem było utrzymanie pozycji pionowej zachowując przy tym jak najmniejsze oscylacje. Na rysunku rys. 2 przedstawiono wyniki tej próby.

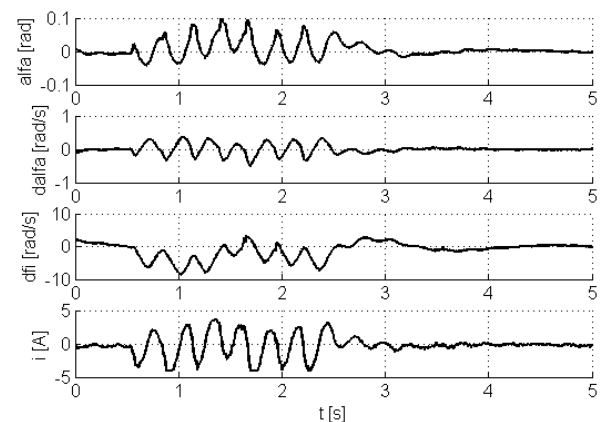
Jak widać w trakcie normalnej pracy kąt odchylenia od pionu α osiąga amplitudy nie większe niż 0.01 radianów. Prędkość kątowa $\dot{\alpha}$ również oscyluje wokół niewielkich wartości sięgając maksymalnie do wychylenia równego 0.05 radianów na sekundę. Prędkość obrotowa koła zamachowego jest bliska zeru, a z obserwacji wynika, że wykonuje delikatne ruchy obracając się co jakiś czas o kilka setnych części radianów w jedną stronę a potem w drugą. Inaczej mówiąc jakość regulacji jest na tyle wysoka, że obserwującemu człowiekowi trudno zauważyć wahania urządzenia.



Rys. 2. Przebieg trzech zmiennych stanu i prądu przy regulacji LQR – brak sztucznie generowanych zakłóceń

Fig. 2. The graph of the state space variables and the control - LQR regulator without additional disruption

Prąd płynący przez uzwojenia silnika wykonuje oscylacje, których amplitudy osiągnęły wartość 0.2 A. Biorąc po uwagę gabaryty urządzenia i maksymalny prąd ciągły (wynoszący 4 A), to przebieg prądu widoczny na wykresie jest relatywnie małej wartości.



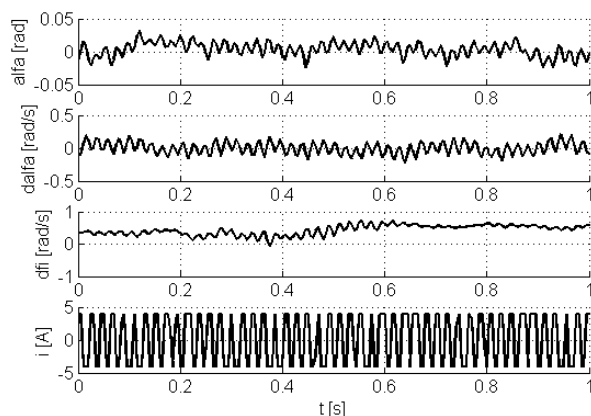
Rys. 3. Przebieg trzech zmiennych stanu i prądu przy regulacji LQR – sztucznie wprowadzone zakłócenie z zewnątrz

Fig. 3. The graph of the state space variables and the control - LQR regulator with additional disruption

Kolejny test jaki wykonano na urządzeniu polegał na sprawdzeniu jakości regulacji LQR przy wprowadzeniu sztucznego zakłócenia poprzez nagle wychylenie urządzenia o 0.1 radiana. Sytuację tę pokazano na wykresie na rys. 2. Urządzenie potrzebuje około dwóch sekund, aby powrócić do stabilności. Prąd osiąga już graniczne wartości chwilami wchodząc w poziom nasycenia (prąd równy 4 A). Jak widać wszystkie trzy zmienne przyjętego wektora stanu wraz z sygnałem wyjściowym z regulatora (prądem) z czasem dążą do zerowych wartości. Jest to zgodne z założeniami projektowymi regulatora.

Następne próby przeprowadzono na wadadle sterując go regulatorem nieliniowym typu backstepping. Na podstawie symulacji komputerowej sytemu regulacji tego obiektu dobrano wartości k_1 i k_2 . One stanowią nastawy regulatora backstepping i mocno wpływają na zachowanie urządzenia. Na rysunkach rys. 4 i rys. 5 przedstawiono wyniki działania algorytmu sterowania backstepping dla różnych nastaw k_1 i k_2 .

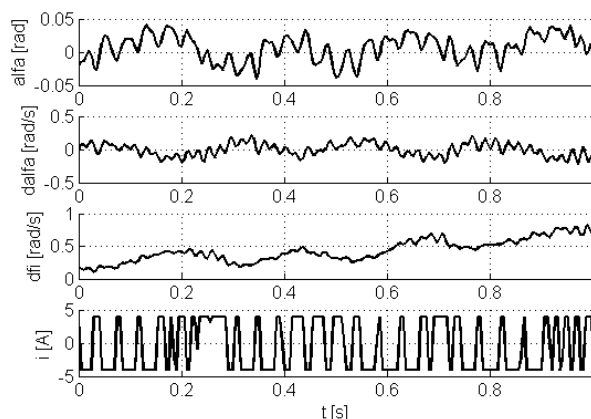
Rezultat działania tego regulatora znacznie różni się od liniowo-kwadratowego. Amplitudy oscylacji kąta α są około pięciokrotnie większe a prędkości kątowej $\dot{\alpha}$ około dziesięciokrotnie większe.



Rys. 4. Przebieg trzech zmiennych stanu i prądu przy regulacji backstepping – $k_1 = 2$, $k_2 = 50$

Fig. 4. The graph of the state space variables and the control - backstepping regulator with $k_1 = 2$, $k_2 = 50$

Koło zamachowe stale przyspiesza i zwalnia wciąż posiadając prędkość kątową $\dot{\phi}$ różną od zera. Sygnał wyjściowy z regulatora jest silnie zmienny i bardzo często osiąga poziom nasycenia. Obserwator może dostrzec poruszanie się obiektu w trakcie jego działania. Pomimo większych wahań układu jest możliwe jego ustabilizowanie.



Rys. 5. Przebieg trzech zmiennych stanu i prądu przy regulacji backstepping – $k_1 = 3$, $k_2 = 50$

Fig. 5. The graph of the state space variables and the control - backstepping regulator with $k_1 = 3$, $k_2 = 50$

Zauważono wpływ zmian współczynnika k_1 . Kiedy był równy 2 częstotliwość zmian sygnału wyjściowego z regulatora była

około dwukrotnie większa niż w sytuacji, kiedy współczynnik ten przyjmował wartość równą 3. Przy większej częstotliwości tych zmian, jakość regulacji była na lepszym poziomie, ponieważ oscylacje kąta α były mniejsze.

7. Wnioski

Spośród dwóch przedstawionych sposobów stabilizacji wadadła odwróconego z napędem inercyjnym regulator liniowo-kwadratowy LQR daje lepsze wyniki niż regulator backstepping. Stosując LQR udało się mocno zminimalizować oscylacje konstrukcji i wydatki energetyczne w postaci płynącego prądu przez uzwojenia silnika.

Regulator backstepping wymaga jeszcze dopracowania. Warty uwagi byłby fakt, aby w fazie projektowania regulatora wziąć pod uwagę prędkość kątową koła zamachowego $\dot{\phi}$, ażeby kontrolować ją i nie dopuszczać do zbytowego jej narastania (tak jak to zrobiono dla LQR). Wstępne założenie, że sterowaniem jest przyspieszenie kątowe wirującej masy $\ddot{\phi}$ a nie prąd płynący przez uzwojenia silnika, z jednej strony uprościło obliczenia jednak z drugiej strony mogło to negatywnie wpłynąć na jakość regulacji. Biorąc te aspekty pod uwagę jakość sterowania tego regulatora mogłaby być zbliżona albo nawet lepsza niż regulatora LQR. Prawdopodobnie ten efekt byłby widoczny, gdyby stan układu relatywnie mocno się oddalił od punktu linearyzacji

8. Literatura

- [1] Drapikowski P., Gośliński J., Owczarkowski A.: Control and model parameters identification of inertia wheel pendulum. ICINCO 9th International Conference on Informatics in Control, Rome, 2012.
- [2] Gośliński J., Owczarkowski A.: Stabilizacja wadadła odwróconego z napędem inercyjnym przy pomocy regulatora LQR. Informatyka Automatyka Pomiary w Gospodarce i Ochronie Środowiska, 4a, 10/2012, s. 7-10.
- [3] Kanellakopoulos I., Krstic M., Kokotović P.: Non-linear and Adaptive Control Design. John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [4] Lixia D., Shengxiang G.: The Design For The Controller of The Linear Inverted Pendulum Based On Backstepping. IEEE International Conference on Electronic & Mechanical Engineering and Information Technology, 2011.
- [5] Afkhami S., Yazdanpanah M.J., Maralani P.J.: Stabilization of inertia wheel pendulum using output feedback back-stepping, Control Applications, 2003. CCA 2003. Proceedings of 2003 IEEE Conference on , vol. 2, no., pp.977,982 vol.2, 23-25 June 2003.
- [6] Qaiser Nad., Iqbal N., Hussain A., Qaiser Nae.: Stabilization of non-linear Inertia Wheel Pendulum system using a new Dynamic Surface Control based Technique, Engineering of Intelligent Systems, 2006 IEEE International Conference on , vol., no., pp.1,6, 0-0 0.
- [7] Bachman P., Gośliński J., Owczarek P., Owczarkowski A., Pittner G., Regulski R.: Sterowanie nieliniowe backstepping wadadła odwróconego z napędem inercyjnym, Materiały konferencyjne WD Poronin 2013.

otrzymano / received: 08.07.2013

przyjęto do druku / accepted: 02.09.2013

artykuł recenzowany / revised paper