



**KONCEPCJA „CICHEGO” POCISKU MOŹDZIERZOWEGO.  
CZĘŚĆ II – ROZWIĄZANIE PROBLEMU GŁÓWNEGO BALISTYKI  
WEWNĘTRZNEJ**

**CONCEPTION OF A “SILENT” MORTAR PROJECTILE.  
PART II – CALCULATIONS OF INTERNAL BALLISTIC PARAMETERS**

Marcin GUTOWSKI, Mariusz MAGIER

Zakład Mechaniki i Techniki Uzbrojenia, Instytut Mechaniki i Poligrafii,  
Wydział Inżynierii Produkcji, Politechnika Warszawska,  
ul. Narbutta 85, 02-524 Warszawa

*Department of Mechanics and Armament Technologies, Institute of Mechanics and Printings,  
Faculty of Production Engineering, Warsaw University of Technology,  
85 Narbutta St., 02-524 Warsaw, Poland*

*Author's e-mail address: mariusz.magier@pw.edu.pl; ORCID: 0000-0002-4431-9537*

DOI 10.5604/01.3001.0015.5042

**Streszczenie:** Publikacja zawiera teoretyczny opis stworzonych programów do rozwiązania problemu głównego balistyki wewnętrznej „cichego” pocisku moździerzowego. Utworzone programy udowodniły swoją przydatność, umożliwiając otrzymanie charakterystyk strzału dla każdej poprawnej konfiguracji pocisku oraz automatycznie odrzucając rozwiązania niespełniające założeń. Dodatkowo, struktura programu umożliwia wygodną modyfikację układów równań oraz parametrów modelu, co pozwala na wykorzystanie go do wspomagania projektowania innych układów broni palnej.

**Słowa kluczowe:** moździerz, pocisk moździerzowy, balistyka wewnętrzna

## 1. Wprowadzenie

Balistyka (z gr. βάλλειν *ballein* „rzut”) to dziedzina nauki zajmująca się opisem zja-

**Abstract:** The paper presents a theoretical description of computer codes for solution of the major question of internal ballistics for a “silent” mortar projectile. The computer codes proved their usefulness by providing the characteristics of a shot for each correct configuration of the projectile and eliminating automatically the solutions not complying with the accepted specifications. Additionally, the structure of the code facilitates the modifications of a system of equations and parameters of the model to assisting a designing process of other systems of firearms.

**Keywords:** mortar, mortar projectile, internal ballistics

## 1. Introduction

The ballistics (in Greece βάλλειν *ballein* „projection”) is a scientific discipline dealing

wisk związanych z miotaniem obiektów. Na przykład: strzał z łuku lub broni palnej, rzut kamieniem. Przyjęto podział na balistykę:

- wewnętrzną – obejmującą wszystkie zjawiska do czasu separacji pocisku i broni,
- przejściową – opisującą działanie gazów na pocisk, po opuszczeniu przez niego lufy,
- zewnętrzną – zajmującą się wyznaczeniem toru lotu pocisku w powietrzu, uwzględniając wszystkie czynniki fizyczne i atmosferyczne,
- końcową – określającą oddziaływanie pocisku na cel, w który trafił.

W publikacji przedstawiono sposób wyznaczenia parametrów balistyki wewnętrznej „cichego” pocisku moździerzowego. To na ich podstawie zostaną określone siły i naprężenia, którym poddany będzie projektowany pocisk, a w efekcie końcowym optymalne wymiary konstrukcyjne spełniające sformułowane wcześniej założenia.

Na rozwiązanie problemu głównego balistyki wewnętrznej (PGBW) składa się wiele wartości, które ze skończoną dokładnością opisują procesy zachodzące podczas strzału. Za minimum potrzebne do uznania problemu za rozwiązany przyjęto określenie zależności ciśnienia w przewodzie lufy i prędkości pocisku od czasu oraz drogi pocisku w lufie. Choć w teorii są one wystarczające do poprawnego zaprojektowania lufy broni palnej, charakterystyki te często uzupełniane są o informacje dodatkowe takie jak: przyśpieszenia działające na pocisk, odrzut broni, rozkład temperatury wewnątrz lufy, czas dopalenia się prochu. Ich znajomość jest niezwykle przydatna przy określaniu długości lufy lub przy projektowaniu amunicji. W dobie superszybkich komputerów oraz powszechnej dostępności mnogich narzędzi do prowadzenia obliczeń, metody numeryczne są bezkonku-

with description of effects connected with the projection of objects. For instance, it can be shooting with a firearm or a bow, or throwing a stone. The ballistics was divided on:

- Internal – comprising all effects before separation of a projectile with the weapon,
- Transitional – describing the action of gases against the projectile after leaving the barrel,
- External – dealing with determination of projectile trajectory in the air and accounting all physical and atmospheric factors,
- Terminal – determining the reaction of projectile with a target that was hit.

The paper presents a method for identification of the internal ballistics parameters for the “silent” mortar projectile. They are the base for identification of forces and stresses to which the designed projectile shall be subjected to, and in the final step the optimal design dimensions which can meet the earlier accepted specifications.

There is a lot of parameters constituting the solution of the Major Question of Internal Ballistics (MQIB) and describing with a finite accuracy the processes occurring at the shot. It was accepted that a minimal solution of the question has to comprise a dependence of pressure inside the barrel and velocity of projectile on the time and on the projectile displacement. In principle they are sufficient for a correct design of the firearm barrel, but usually these parameters are supplemented by such additional data as the acceleration acting against the projectile, the recoil of gun, distribution of temperature inside the barrel, time for finishing the powder combustion. They are useful at determination of the barrel length, or at the designing of ammunition. Now, when the high performance computers are available together with numerous tools

rencyjne pod względem dużej zgodności wyników z rzeczywistością oraz możliwości dostosowywania rozwiązania do swoich potrzeb.

## 2. Charakterystyka metod numerycznych

Jako metody numeryczne rozumieć można zbiór sposobów pozwalających na rozwiązanie problemu matematycznego, przeprowadzając obliczenia na liczbach. Drugim rodzajem metod matematycznych są obliczenia symboliczne. O ich zastosowaniu mówimy, gdy działania wykonywane są nie na liczbach a na symbolach. W praktyce w celu rozwiązania realnego problemu zazwyczaj najpierw formułujemy problem korzystając ze wzorów i ich przekształceń, a następnie nadajemy symbolom wartości liczbowe by otrzymać jednoznaczny wynik.

Metody numeryczne znajdują swoje główne zastosowanie tam, gdzie nie da się uzyskać rozwiązania analitycznego. Nie jest to jednak warunkiem koniecznym do ich użycia.

Stosowanie metod numerycznych obarczone jest jednak błędami, wynikającymi zarówno z ich cech jak i z ich implementacji. Mówiąc o metodach numerycznych zakładamy wykorzystanie ich przy pomocy komputera. Napotkać możemy błąd zaokrąglenia (Pańczyk, 2012), który wynika ze stosowania w technice komputerowej dla liczb rzeczywistych reprezentacji zmiennoprzecinkowej. Polega ona na zapisie liczby w postaci:

gdzie:

$Z$  – znak liczby, plus lub minus,

$M$  – mantysa, czyli liczba ułamkowa z zakresem od 1 do  $P$ ,

$P$  – podstawa systemu liczbowego, w kom-

puterze dla wykonania obliczeń, metody numeryczne są niepokonane w wysokim stopniu zgodności z rzeczywistością i w możliwościach adaptacji rozwiązań do własnych wymagań.

## 2. Description of Numerical Methods

The numerical methods can be defined as a set of procedures for finding a solution of a math question by carrying out the calculations on the numerals. Symbolic calculations belong to the second type of mathematical methods. They are used when the operations are performed not on the numerals but on the symbols. In practice, first the equations and their transformations are used to formulate a problem and to find out its solution, and in the next step the symbols are replaced by the numerals to get a definite result.

The numerical methods are mainly used in the cases when an analytical solution cannot be received. Anyway, it is not a necessary condition for using them.

Nevertheless, the application of numerical methods is burdened by the errors caused both by their features and their implementation. Dealing with the numerical methods assumes the use of computers. Then, following types of errors may be spotted (Pańczyk, 2012). Error of approximation – it is caused by using a representation of real numerals with altering-comma in computer calculations. The numeral can be put in the form:

$$y = Z * M * P^W \quad (2.1)$$

where:

$Z$  – sign of the numeral, plus or minus

$M$  – mantissa, i.e. a fractional numeral on the range from 1 to  $P$

$P$  – foundation of the numeral system, it is

puterach jest to 2.

$W$  – wykładnik, oznacza potęgę, do której podstawa systemu jest podnoszona.

Najczęściej stosowanym typem zmiennej w obliczeniach numerycznych jest zmienna typu *double*. Oznacza ona zapis liczby rzeczywistej z podwójną precyzją co przekłada się na zapisywanie jednej liczby za pomocą 64 bitów. Pierwszy oznacza znak, kolejne 11 wykładnik a ostatnie 52 mantysę. Odpowiada temu zakres wskazywanych liczb wynoszący  $\pm 10^{308}$ . Innym zagadnieniem jest precyzja takiego zapisu, która zależy od wartości tzw. Epsilonu maszynowego. Jest to najmniejsza dodatnia liczba rzeczywista która spełnia zależność:  $1 + \varepsilon = 1$ . W przypadku zmiennej *double* wynosi on  $1,11 * 10^{16}$ . Oznacza to, że  $\varepsilon$  jest wartością błędu bezwzględnego obliczeń numerycznych, który nakłada się na siebie z każdym kolejnym krokiem obliczeń, wynikający z niedokładności modelu matematycznego oraz założonych warunków początkowych.

Metody numeryczne są tylko narzędziem w rękach inżyniera, które może być wykorzystane w celu rozwiązania napotkanego problemu. Ze względu na stopień skomplikowania oraz czas potrzebny do wykonania obliczeń jedynym wyjściem jest zastosowanie komputera. W kontekście metod numerycznych w tym momencie należy wprowadzić podział na: programy napisane w celu rozwiązywania konkretnego, często niszowego problemu oraz na programy bardziej wszechstronne, oferujące użytkownikowi narzędzia matematyczne które on sam wykorzystuje w wybrany przez siebie sposób.

W przypadku programów typu pierwszego, program może być napisany w dowolnym języku programowania, na przykład: C, C++, Python, Delphi. Większość takich programów pisana jest od podstaw lub wykorzystując biblioteki do obliczeń numerycznych. Tego typu

2 for computers.

$W$  – exponent, means the exponent to which the foundation of the system is raised.

At numerical calculations the variable of *double* type is used in the most. It means that the real numeral is recorded at a doubled precision what can be translated into the recording of one numeral by 64 bytes. The first one defines the sign, the consecutive 11 ones the exponent, and the last 52 define the mantissa. It corresponds to the range of indicated numbers equal to  $\pm 10^{308}$ . The precision of this record is another question as it depends on the so called machine's Epsilon. It is a lowest positive number meeting the relation:  $1 + \varepsilon = 1$ . In the case of the double variable it is  $1.11 * 10^{16}$ . It means that  $\varepsilon$  is the value of an absolute error of numerical calculations which accumulates over itself at each consecutive step of calculations, and is caused by an inaccurate math model and accepted original conditions.

The numerical methods are only some tools which may be used by engineers for finding out the solutions of encountered problems. Due to a high degree of complexity and the time needed for execution of calculations the use of computers is the only outcome. Considering the numerical methods they can be divided into computer codes developed for solution of a specific question, which is often a peripheral one, or more universal codes offering for the users some mathematical tools which are implemented in individual way.

In the case of the first computer code, it can be written in any programming language like C, C++, Python, Delphi. Majority of such codes are written starting from the base or using the libraries for numerical calculations. A program of this kind named Bal-Wew-ZW was described by Z. Wrzesiński

program o nazwie BalWew-ZW został opisany przez Z. Wrzesińskiego (Wrzesiński, 2018). Jego funkcjonalność obejmuje wykonanie obliczeń balistyki wewnętrznej (w oparciu o geometryczne prawo spalania) i przedstawienie ich wyników na wykresach. Interfejs użytkownika pozwala na zdefiniowanie każdego parametru oraz stałej przed wykonaniem obliczeń co skutkuje dużą elastycznością w kwestii zastosowania. Do wad można zaliczyć to, że jego modyfikacja wiąże się z edycją kodu źródłowego, do którego typowy użytkownik może nie mieć dostępu.

Programy typu drugiego, często określane mianem środowisk obliczeniowych, dają większą swobodę działania. Można powiedzieć, że użytkownik w przeznaczony do tego przestrzeni formułuje swój problem za pomocą poleceń interpretowanych przez program. Jeśli wprowadzone polecenia są zrozumiałe, program wygeneruje rozwiązanie. Zaletą tego rozwiązania jest możliwość dowolnego doboru metody rozwiązania, sposobu interpretacji wyników oraz rozbudowania programu o dodatkowe funkcje. Ich stosowanie wymaga jednak od użytkownika wiedzy w zakresie pisania kodu dla konkretnego programu (Krzyżanowski, 2012).

Wiodącymi na rynku środowiskami obliczeniowymi są: MATLAB, dystrybuowany przez firmę The MathWorks oraz Mathematica oferowana przez Wolfram Research. Nazwa programu MATLAB to skrót od MATrix LABoratory. Ma to związek z tym, że pierwsze wersje tego programu ograniczone były do wykonywania operacji na macierzach. Ze względu na szybkość, nadal jest to preferowana metoda obliczeń w tym środowisku. Program Mathematica powstał w zupełnie innym celu. Służy on do prowadzenia obliczeń symbolicznych i jest nazywany systemem algebry komputerowej. Ważnym elementem tego typu środowisk jest interpreter – program odpowiadający

(Wrzesiński, 2018). The functionality of it comprises the performance of calculations for internal ballistics (basing on the geometric principle of combustion) and presentation of results in the graphs. The user's interface allows a definition of each parameter and a constant value before calculations what provides high flexibility at using. The edition of the source code is required at its modification and it may be deemed as a disadvantage whereas it is usually not available by common users.

The programs of the second type are often named as the calculating environments and provide greater possibilities of operation. It can be said that the user formulates a problem within the space designated for it by using orders which are interpreted by the program. If the applied orders are understandable then the computer program provides the solution. The advantage of this approach is that the method of solution, and the way of presenting the results, can be freely selected, and the program can be added by new functions. But the user has to possess qualifications for creating the codes for specific programs (Krzyżanowski, 2012).

MATLAB distributed by The MathWorks company and Mathematica offered by Wolfram Research belong to leading calculating environments on the market. The name of MATLAB program is the abbreviation of MATrix LABoratory. It is connected with the fact that first versions of this program were designed for operations on the matrixes. Because of the high speed it still is a preferred method of calculations in this environment. Program Mathematica was developed for quite a different purpose. It is used for symbolic calculations and is named as a system of computer algebra. An interpreter is the important component of envi-

wiedzialny za interpretacje wyrażeń algebraicznych wpisanych przez użytkownika i przekształcenie ich do postaci rozwiązywalnej numerycznie.

Wszystkie wyżej wymienione typy programów, nadają się do rozwiązywania układów równań różniczkowych. Na podstawie analizy wad i zalet poszczególnych rozwiązań, do przeprowadzenia obliczeń wybrany został MATLAB.

Problem główny balistyki wewnętrznej często przedstawiany jest w postaci układu równań różniczkowych. Równania te wyprowadzone są przy wykorzystaniu fundamentalnych praw: prawa zachowania energii, masy oraz pędu. Rozwiązanie takiego układu równań osiąga się poprzez całkowanie numeryczne. Prosty do zobrazowania przykładem jest metoda całkowania Eulera. Wychodząc od warunków początkowych, obliczane są wartości pochodnych funkcji w momencie  $t_0 = 0$ . Następnie stosując definicję pochodnej:

$$y' = \frac{\Delta y}{h} \quad (2.2)$$

przekształconą do postaci:

$$\Delta y = h * y' \quad (2.3)$$

gdzie:  $h$  – krok całkowania, obliczana jest wartość funkcji w momencie  $t_0 + h$ .

Schemat ten jest powtarzany aż do osiągnięcia końca przedziału całkowania. Poniżej przedstawiono graficzną interpretację tej metody. W celu zwizualizowania roli stycznej w procesie obliczeń założono że wartość pochodnej w danym punkcie czasu nie zależy od wartości funkcji  $x1$ . Błąd metody na każdym kroku oznaczono jako  $\Delta$ .

Błąd przybliżenia, wynikający z zastosowania tej metody jest ściśle związany z

ronments of this kind – it is a program responsible for interpretations of algebra relations entered by the user and for transforming them into a form which can be calculated numerically.

All types of programs mentioned above are suitable for finding out solutions of differential equation systems. After analysing the pros and cons of particular solutions the MATLAB was selected for execution of calculations.

The major problem of the internal ballistics is often represented in the form of a differential equation system. The equations are derived by using fundamental laws: law on conservation of energy, mass and momentum. The solution of such system of equations is found out by the numerical integration. The Euler's method of integration can be used as an example of it. Starting from the original conditions the values of function's derivatives are calculated for the instance of  $t_0 = 0$ . Next, using the definition of derivative:

transformed to the form:

where:  $h$  – step of integration, the value of function for the time  $t_0 + h$  is calculated.

The schematic is repeated until the end of the integration interval. Below, a graphical representation of this method is shown. In order to visualise the meaning of the tangent in the process of calculations it was assumed that the value of the derivative for a specific instance of time does not depend on the value of the function  $x1$ . The error of the each step is marked as  $\Delta$ .

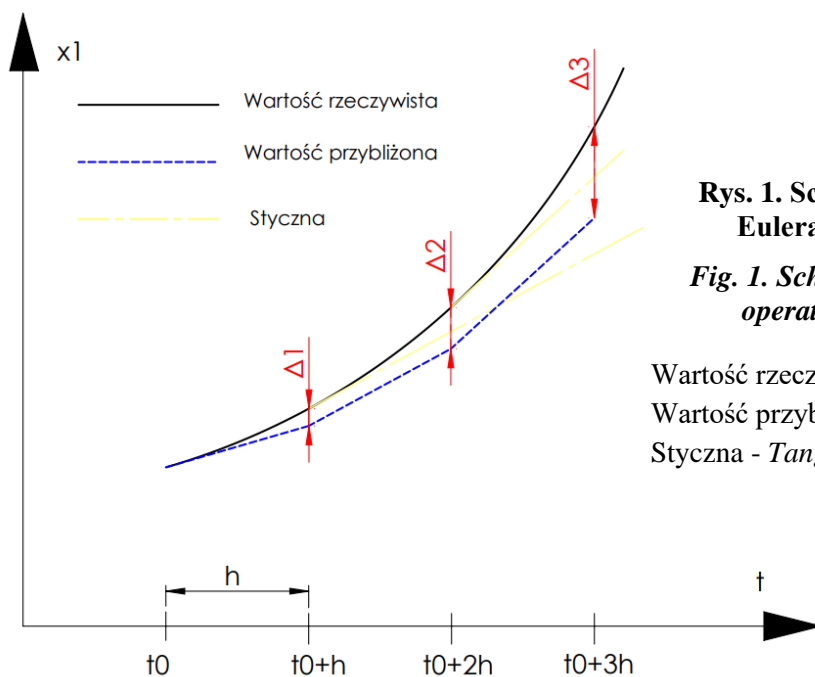
The error of approximation arising from

wielkością kroku całkowania. Teoretycznie, możliwe jest uzyskanie dowolnie dużej dokładności przy zastosowaniu odpowiednio małego kroku. Niestety ze względu na błąd bezwzględny zapisu zmiennopozycyjnego możliwe jest uzyskanie tylko pewnej skończonej dokładności obliczeń. Wiąże się to dodatkowo ze znacznym wzrostem czasu trwania obliczeń.

Przy skończonej wielkości kroku całkowania duże znaczenie w kontekście wielkości błędu ma rząd stosowanej metody. Rząd metody określany jest poprzez sprawdzenie ile kolejnych pochodnych błędu przybliżenia równe jest 0. W praktyce oznacza to, że im wyższy rząd metody tym większa dokładność przy tym samym kroku całkowania.

the application of this method strictly depends on the value of the integration step. In theory, it can be possible to get any high accuracy by using a relevant small step. Unfortunately, due the absolute error of altering-position recording only a certain definite accuracy of calculations can be received. Additionally, it extends significantly the time of calculations.

Concerning the values of errors, the order of the applied method has a great meaning at a definite value of the integration step. The order of the method can be defined by checking the number of consecutive derivatives of the approximation error equal to 0. It means in practice that the higher order of the method provides greater accuracy at the same step of integration.



**Rys. 1. Schemat działania metody Eulera [opracowanie własne]**

**Fig. 1. Schematic of Euler's method operation [own development]**

Wartość rzeczywista – Real value  
 Wartość przybliżona – Approximated value  
 Styczna - Tangent

Przykładowy układ równań różniczkowych ma postać:

An exemplary system of differential equations has a form:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_2 - ax_3^2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_3 + b \\ \frac{dx_3}{dt} = cx_1 \end{array} \right. \quad (2.4)$$

gdzie:

$x_1, x_2, x_3$  – zmienne równania,  $a, b, c$  – stałe.

Duża część modeli fizycznych może być opisana w ten sposób, że żaden program stworzony w celu rozwiązywania równań różniczkowych nie powinien mieć problemu z jego rozwiązaniem.

Innym typem układów jest układ równań różniczkowo-algebraicznych. Różni się od poprzednio opisanego tym, że w co najmniej jednym jego równaniu nie występuje różniczka, lecz zwykle wyrażenie algebraiczne. Na przykładzie modyfikacji wcześniej przedstawionego układu:

where:

$x_1, x_2, x_3$  – the variables of the equation,  $a, b, c$  – constant values.

A great number of physical models may be represented in a way which can be suitable for solution by each computer code created for differential equations.

A system of differential-algebraic equations belongs to another category of systems. It differs from the former one by the presence of a regular algebraic expression, instead of the differential one, within at least one of its equations. For instance, the earlier presented system can be modified:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_2 - ax_3^2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_3 + b \\ 0 = x_1 + x_2 + x_3 - c \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Trzecie równanie,  $0 = x_1 + x_2 + x_3 - c$  jest równaniem algebraicznym. Tego typu równania znajdują zastosowanie przy formułowaniu modelu matematycznego bilansu pewnych wartości. Nie wszystkie metody rozwiązywania równań różniczkowych są w stanie rozwiązać tego typu układy. W takim przypadku równanie algebraiczne powinno być przekształcone do postaci różniczkowej. Przykład takiego przekształcenia opisany jest w literaturze (Wrzesiński, 2018).

The third equation,  $0 = x_1 + x_2 + x_3 - c$  is the algebraic one. Such equations are used to formulate mathematical models for balancing some parameters. Such systems cannot be solved by each method used for solving the differential equations. In such case the algebraic equation has to be transformed into a differential form. An example of such transformation is described in (Wrzesiński, 2018).

A simplified Van der Waals' equation



Dane jest uproszczone równanie van der Waalsa opisane:

is given:

$$p(t) = R \frac{N(t)T(t)}{W_s(t)} \quad (2.6)$$

Nie występuje w nim różniczka, więc jest to równanie algebraiczne. Po różniczkowaniu równania względem czasu otrzymujemy:

Any differential is not present in it, then it is an algebraic equation. After differentiating the equation versus the time we can get:

$$\dot{p}(t) = p \left( \frac{1}{N} \dot{N} + \frac{1}{T} \dot{T} + \frac{1}{W_s} \dot{W}_s \right) \quad (2.7)$$

Do rozwiązania tego równania niezbędna jest znajomość trzech kolejnych pochodnych, co powoduje komplikację zapisu równań w komputerze oraz zwiększa ilość operacji arytmetycznych potrzebnych do wyznaczenia jego wartości liczbowej. Nie ma to dużego znaczenia w przypadku jednokrotnego rozwiązania równania, lecz metody numeryczne opierają się na obliczaniu tych samych wartości wielokrotnie dla kolejnych chwil czasowych. Wynika z tego, że w celu przyspieszenia obliczeń powinno się dążyć do zastosowania równań algebraicznych wszędzie tam, gdzie to możliwe.

Three following derivatives have to be known for solving the equation what complicates the notation of equations into computer and increases the number of arithmetical operations needed for finding out its numerical value. It is not of a great importance when the equation has to be solved one time, but the numerical methods are based on calculating the same values for many times at consecutive instances. It means that the algebraic equations have to be used at every possible chance to accelerate the calculations.

Niektóre układy równań różniczkowych można rozwiązywać łatwiej niż inne. Łatwość rozwiązywania rozumiana jest jako czas wykonywania obliczeń wymagany do uzyskania rozwiązania. W literaturze opisywany jest wyjątkowo trudny do rozwiązania typ układów. Trudność ta wynika z pozornie nieuzasadnionego zaniżenia kroku całkowania przez większość znanych algorytmów, co bezpośrednio przekłada się na czas całkowania. Opracowania w języku angielskim nazywają takie układy równań „stiff”, co w bezpośrednim tłumaczeniu oznacza „sztywne”. Autor słusznie zauważa, że nie ma podstaw by stosować takie tłumaczenie ponieważ nie odnosi się ono do natury problemu (Krupowicz, 1986). W zamian proponuje używanie określenia „układy równań różniczkowych źle uwarunkowane”. Jednym z kryteriów określania uwarunkowania układu rów-

Some systems of differential equations may be solved easier than others. The solvability is interpreted as the time needed for calculations of the solution. The literature describes a type of equation systems which is especially difficult for solution. The difficulty is caused by an unsubstantiated decrease of the integration step in common algorithms what translates directly into the time of integration. Proceedings made in English name these systems of equations as „stiff”, but the author notes reasonably that using of that word is rather baseless as it does not refer to the nature of the problem (Krupowicz, 1986). In return the author proposes the term „wrongly conditioned systems of differential equations”. Examination of the scattering of own values of a system of differential equations is one of

nań różniczkowych jest sprawdzenie rozrzutu jego wartości własnych. Duży rozrzut może oznaczać że niewielkie zmiany w wartościach wejściowych będą powodowały duże zmiany wyników obliczeń. W przypadku rozwiązywania problemu głównego balistyki wewnętrznej występuje dokładnie taka sytuacja. Grubość spalonej warstwy ziarna w trakcie jednego kroku całkowania może być mniejsza niż  $10^{-7}m$ . W trakcie tego samego kroku odpowiada jej wzrost ciśnienia o  $10^5 Pa$ . Pozwala to sklasyfikować rozwiązywany układ równań różniczkowych jako źle uwarunkowany. Powinno być to brane pod uwagę w momencie wybierania algorytmu całkowania numerycznego.

### 3. Metody całkowania numerycznego

Wraz z szybkim wzrostem mocy obliczeniowej komputerów, pojawiło się wiele nowych, bardziej skomplikowanych algorytmów numerycznych. Celem stało się nie uzyskanie jak największej dokładności obliczeń a uzyskanie zadowalającej dokładności przy jak najszybszym wykonaniu programu. Dwie najszerzej stosowane metody to metoda jednokrokowa, reprezentowana przez rodzinę algorytmów Rungego-Kutty oraz metoda Adamsa o zmiennym kroku całkowania.

Napisanie własnego algorytmu numerycznego do rozwiązywania równań różniczkowych jest zadaniem dosyć skomplikowanym. Z tego względu wybór algorytmu został zawężony do wyboru napisanej już funkcji, wywoływanej w MATLAB-ie. Funkcje te nazywane są solverami, ponieważ napisane zostały w celu rozwiązywania konkretnych problemów matematycznych.

W publikacji (Mathworks) zawarto porównanie właściwości najpopularniejszych, dostępnych w środowisku MATLAB solverów rozwiązujących układy równań różnicz-

criteria determining its condition. High scattering can mean that small changes in input values will generate great changes of calculated results. Definitely such situation exists at solving the major problem of the internal ballistics. Thickness of a burnt powder grain layer may be below  $10^{-7}m$  within the time of one integration step. Within the same time the increase of the pressure may surge by  $10^5 Pa$ . It justifies the classification of the system of solved differential equations as a wrongly conditioned. It has to be taken into account when the algorithm of numerical integration is selected.

### 3. Methods of Numerical Integration

Along with rapid increasement of computer calculating powers many new and more sophisticated numerical algorithms become available. They were not focused on providing a possibly high accuracy of calculations but on receiving a satisfactory accuracy at possibly quick execution of the program. A single step method, represented by the family of Runge-Kutty's algorithms, and the Adam's method with an altering step of integration belong to most commonly used methods.

Preparation of an own numerical algorithm for solving differential equations is a relatively complicated task. For that reason the selection of an algorithm was limited to selection of a function which has been already written, and can be called up in the MATLAB. These functions are named as solvers because they were written to solve specific mathematical problems.

Publication (Mathworks) includes an arrangement of performances of the most common solvers available in the MATLAB

kowych. Są to między innymi:

- Ode45 – jednokrokowy, oparty o metodę Rungego-Kutty 4 i 5 rzędu, Jego użycie zazwyczaj zalecane jest jako pierwsze ze względu na jego wysoką szybkość w połączeniu z dopuszczalną dokładnością. Dopiero gdy rozwiązywany problem okazuje się być źle uwarunkowany, poleca się sięgać po inne solvery.
- Ode113 – wielokrokowy, oparty o metodę Adamsa-Bashfortha-Moultona rzędów od 1 do 12 gdzie 13 rząd wykorzystywany jest do estymacji błędu. Wykorzystywany ponieważ, w porównaniu do ode45, wykazuje większą sprawność dla bardzo ścisłych tolerancji błędu.
- Ode15s – oparty na formułach NDF, z możliwością wykorzystania metody wstecznego całkowania (metoda Gearsa). Jest to solver wielokrokowy. Zaleca się jego wykorzystanie w przypadku równań źle uwarunkowanych. Umożliwia również rozwiązywanie układów równań zawierających równania algebraiczne.
- Ode23s – jednokrokowy, oparty o metodę Rosenbrocka drugiego rzędu. Wykorzystanie takie samo jak ode15s lecz jest sprawniejszy w problemach o wysokiej tolerancji błędu. Nie dopuszcza równań algebraicznych. Do sprawnego działania wymaga, aby użytkownik zdefiniował jacobian układu. W przeciwnym wypadku solver oblicza go przy każdym kolejnym kroku.

Głównym kryterium wyboru była wysoka zgodność rozwiązania z rzeczywistością przy możliwie łatwej implementacji. Mniejszy nacisk położono na to, by wybrana metoda mogła być łatwo dostosowana do rozpatrywanego problemu. Jest to istotne ze względu na możliwość częstych zmian koncepcji w zakresie

environment for solving the systems of differential equations. There are following ones among others:

- Ode45 – single-step, based on Runge-Kutty's method of the 4<sup>th</sup> and 5<sup>th</sup> order. It is usually recommended to use it as a first one due to its high speed connected with an acceptable accuracy. Just only when the considered problem proves to be a wrongly conditioned one, then other solvers have to be tried.
- Ode113 – multi-step, based on Adams-Bashforth-Moulton's method for orders between 1 to 12 where the 13<sup>th</sup> order is used for error estimation. It is used because it is more efficient for very strict error tolerances than ode45.
- Ode15s – based on NDF formula, with an option of a reverse integration (Gears' method). It is a multi-step solver. It is recommended for wrongly conditioned equations. It can be used for solving the systems of equations with the algebraic ones, as well.
- Ode23s – single-step, based on Rosenbrock's method of the second order. It can be used like ode15s but it is more efficient for problems with a high error tolerance. It does not accept any algebraic equations. The Jacobian of the system has to be defined by the user for its effective implementation. If not, then the solver calculates it at each following step.

High compliance of a solution with the reality at possibly simple implementation was the main criterium of selection. A lesser attention was put on adaptability of the selected method to the considered problem. It is essential for frequent changes of concepts over the designs of a projectile. Each

konstrukcji pocisku. Każda taka zmiana wymagała będzie modyfikacji stosowanego układu równań opisujących model fizyczny.

Wnioski z analizy prezentują się następująco: do rozwiązania PGBW wybrano metody numeryczne. Układ równań różniczkowych opisujący zjawisko strzału zostanie rozwiązany wykorzystując środowisko obliczeniowe MATLAB. Spośród wielu solverów dostępnych w środowisku MATLAB wybrany został solver ode15s. Na ten wybór wpływ miały następujące jego cechy:

- wysoka efektywność przy rozwiązywaniu układów równań źle uwarunkowanych,
- możliwość rozwiązywania układów równań różniczkowo-algebraicznych.

Funkcja ode15s oparta jest o metodę NDF. Nazwa ta, nadana jej przez autorów: W. Klopfensteina oraz T. Reihera, w języku angielskim jest skrótem *od numerical differentiation formulas*, co można tłumaczyć jako formuły różniczkowania numerycznego. Są to algorytmy o zmiennym kroku oraz rzędzie, potrafiące samoczynnie dostosowywać powyższe wartości w celu zwiększenia efektywności. Dokładniejsze poznanie tych algorytmów nie jest konieczne z punktu widzenia użytkownika, więc nie zostało zawarte w niniejszej pracy. Poniżej zamieszczone są informacje dotyczące zastosowania ode15s w praktyce. Funkcję ode15s wywołuje się w następujący sposób:

`[t,y] = ode15s(odefun,tspan,y0,options)`

Argumenty funkcji:

- odefun - w tym miejscu umieszczany jest układ równań różniczkowych, który ma zostać rozwiązany. Wszystkie zmienne równania muszą zostać zapisane stosując oznaczenie  $y(1)$ ,  $y(2)$ , ...,  $y(n)$ . Jako przykład równanie różniczkowe prędkości:

$$dv(t) = \frac{s * p_s(t)}{\varphi m} dt \quad (3.1)$$

Przy założeniu, że zmienna  $v$  zapisana jest

such change will require a modification of the applied system of equations.

The analysis leads to following conclusions: the numerical methods were selected for solution of the Major Question of Internal Ballistics (MQIB). The MATLAB calculating environment will be used for solving the system of differential equations describing the effect of shooting. Solver ode15s was selected among many solvers available in the MATLAB environment. The selection was decided by its following features:

- High efficiency at solving the wrongly conditioned equation systems,
- Possibility of solving the systems of differential-algebraic equations.

The ode15s function is based on NDF method. The name was given by its inventors: W. Klopfenstein and T. Reiher and it goes from the words *Numerical Differentiation Formulas*. They are the algorithms with altering steps and orders which are automatically matched to get maximal efficiency. More detailed knowledge of these algorithms is not needed from the user's point of view, and it is not included in the present paper. Information referring to practical use of ode15s is presented below. Function ode15s is called out in the following way:

`[t,y] = ode15s(odefun,tspan,y0,options)`

Arguments of the function:

- odefun - here is placed a system of differential equations to be solved. All variables of the equation have to be recorded by using the designations  $y(1)$ ,  $y(2)$ , ...,  $y(n)$ . For instance, the differential equation of velocity:

Assuming that the variable  $v$  is rec-

jako  $y(6)$  a zmienna  $p_s$  jako  $y(13)$  otrzymujemy:

ordered as  $y(6)$  and variable  $p_s$  as  $y(13)$  we can get:

$$dy(6) = s*y(13)/(f_i*m) * dt \quad (3.2)$$

- $tspan$  – jest to wektor zawierający informacje o punktach czasowych, w których zapisywane będą wartości zmiennych. Nie należy mylić tego z krokiem całkowania, który jest automatycznie dobierany przez algorytm;
  - $y0$  - jest to wektor wartości początkowych wszystkich zmiennych;
  - $options$  - konfigurowany przez użytkownika argument zawierający informacje o ustawieniach solvera.
- Do najważniejszych ustawień należą:
- $RelTol$ ,  $AbsTol$  – ustawienia tolerancji błędów. Pozwalają na zdefiniowanie maksymalnego relatywnego oraz całkowitego błędów między wartością obliczoną na każdym kroku a szacowaną wartością rzeczywistą. Zawężenie tolerancji jest wskazane do pewnych wartości granicznych, po których przekroczeniu dodatkowy koszt obliczeń nie jest wart niewielkich zysków w dokładności.
  - $Events$  – Zawiera ustawienia dotyczące warunków przerwania całkowania. Pozwala zdefiniować wartości graniczne wielu zmiennych oraz kierunku, z którego ta wartość ma być osiągnięta.
  - $MaxStep$ ,  $MaxOrder$  – Ustawienia pozwalające ograniczyć dobierany przez algorytm krok oraz rząd metody w celu przyspieszenia działania.
  - $Mass$  – Zawiera zdefiniowaną przez użytkownika macierz mas. W przypadku  $ode15s$  służy między innymi do zdefiniowania które z równań są różniczkowe, a które algebraiczne.

Wartości funkcji:

- $tspan$  – is the vector containing the information about time points when the values of the variables will be recorded. It cannot be mistook with the step of integration which is taken automatically by the algorithm;
- $y0$  - is the vector of original values for all variables;
- $options$  - the argument configured by the user containing the information about solver's settings.

There are following most important settings:

- $RelTol$ ,  $AbsTol$  – settings of error tolerance. It allows the definition of maximal relative and total errors between the value calculated at each step and the estimated real value. The narrowing of the tolerance is recommended up to some boundary values, whereas the trespassing of them generates the additional costs of calculations at small gains in the accuracy.
- $Events$  – includes the settings referring to conditions for interruption of integration. It allows the definition of boundary values for many variables and the direction from which that value has to be reached.
- $MaxStep$ ,  $MaxOrder$  – the settings allowing the limitation of the step selected by the algorithm and the order of the method for acceleration of calculations.
- $Mass$  – includes the matrix of masses defined by the user. In the case of  $ode15s$  it is used above all for defining if the equation is a differential or algebraic one.

Values of the function:

- $y$  – macierz wartości zmiennych w kolejnych punktach czasowych,
- $t$  – wektor zawierający kolejne punkty czasowe którym przypisane są wartości zmiennych  $y$ .

#### 4. Rozwiązanie PGBW dla „cichego” pocisku moździerzowego

Aby uzyskać rozwiązanie PGBW metodami numerycznymi należy:

- stworzyć fizyczny model zjawiska i zdecydować które zjawiska mają wpływ na rozwiązanie, a które można pominąć, zastępując współczynnikami lub całkowicie pomijając,
- na podstawie utworzonego modelu fizycznego, stworzyć model matematyczny, czyli układ równań różniczkowych, który będzie opisywał model fizyczny,
- skorzystać z narzędzi umożliwiających rozwiązanie utworzonego układu równań co jest równoznaczne z rozwiązaniem PGBW.

##### 4.1. Model fizyczny zjawiska strzału

Zagadnienie balistyki wewnętrznej klasycznych pocisków moździerzowych komplikuje się ze względu na konstrukcję pocisku. W takim pocisku ładunek prochowy umieszczony jest wewnątrz trzonu ogona, a gazy prochowe wydostają się do przestrzeni zapociskowej przez wykonane w nim otwory. Wymusza to rozpatrywanie takiego układu jako układu dwukomorowego, w którym przepływ gazowych produktów spalania zależy od ciśnień w obu komorach.

W przypadku cichego pocisku moździerzowego, ta komplikacja nie występuje. Ładunek miotający nadal umieszczony jest wewnątrz ogona. Zauważyć można jednak

- $y$  – matrix of variable values in following time points.
- $t$  – vector containing following time points to which the values of  $y$  variables are attached.

#### 4. Solution of Major Question of Internal Ballistics (MQIB) for a “Silent” Mortar Projectile

Solution of the MQIB by the numerical methods requires:

- Creation of a physical model of the phenomenon and making decision which effects influence on the solution and which ones may be omitted and replaced by coefficient or rejected completely,
- Creation of a mathematical model on the basis of the physical model, i.e. the system of differential equations describing the physical model,
- Application of tools for solution of the created system of equations what equals to solution of the MQIB.

##### 4.1. Physical Model of Shooting Effect

Question of internal ballistics for conventional mortar projectiles is complicated due to their designs. A powder charge of such projectile is put inside a stem of the tail and powder gases travel into the space behind the projectile through the openings made in it. The consequence is that such system has to be considered as a two-chambered system where the flow of gaseous products of combustion depends on the pressures existing in the two chambers.

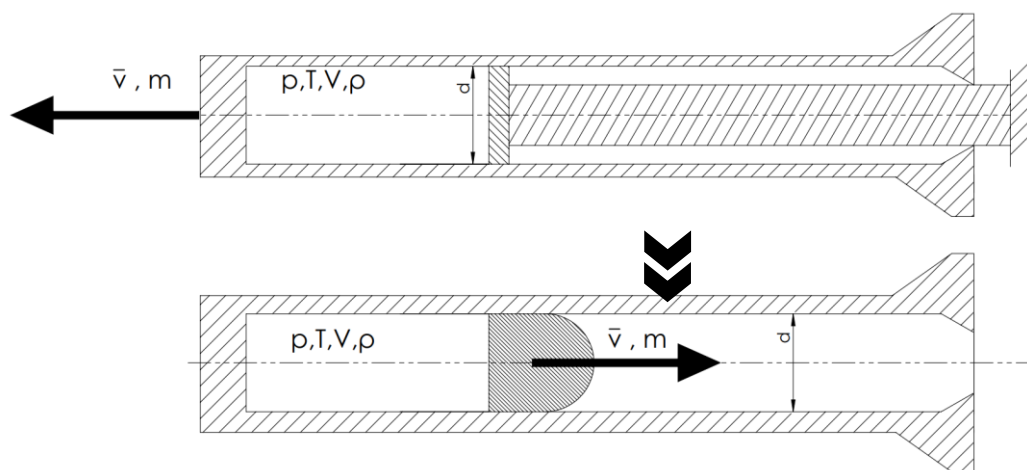
In the case of the silent mortar projectile this complication is not present. The propelling charge is placed inside the tail. It may be noted that the combustion chamber is not divid-

brak podziału na komory spalania. Przez cały okres strzału, spalanie przebiega w jednej, cylindrycznej komorze, co znacząco upraszcza rozwiązanie.

Z punktu widzenia balistyki wewnętrznej, taki układ można sprowadzić do zagadnienia ruchu pocisku w lufie gładkiej. W tym celu należy potraktować tłok jako pocisk, a ogon pocisku jako lufę. Istotną różnicą takiego modelu względem rzeczywistości będzie przypisanie tłokowi masy reszty pocisku. Taki model przedstawiony jest na rys. 2.

ed. The combustion takes place in one cylindrical chamber during the whole time of shooting what simplifies significantly the solution.

Such system may be considered from the point of view of internal ballistics as the movement of projectile inside a smooth barrel. For this reason the piston has to be treated as the projectile and the tail of the projectile as the barrel. An essential difference between this model and the reality lies in ascribing the remaining mass of projectile to the piston. Such model is presented in Fig. 2.



**Rys. 2. Schemat przejścia z modelu rzeczywistego na uproszczony. Zastąpienie tłoka „wirtualnym” pociskiem o masie całego pocisku moździerzowego [opracowanie własne]**

**Fig. 2. Schematic of transition from the real to simplified model. Replacement of the piston by a virtual „projectile” having the mass of the whole mortar projectile [own development]**

Zjawisko strzału podzielone zostało na 5 faz:

- faza nr 1 – trwająca od zbitcia spłonki do osiągnięcia ciśnienia zapłonu prochu;
- faza nr 2 – trwająca od końca fazy poprzedniej do momentu spalania się całej masy zapłonika;
- faza nr 3 trwająca od końca fazy poprzedniej do osiągnięcia ciśnienia forsowania, koniec tej fazy oznacza początek ruchu pocisku;

The effect of shooting was divided into 5 phases:

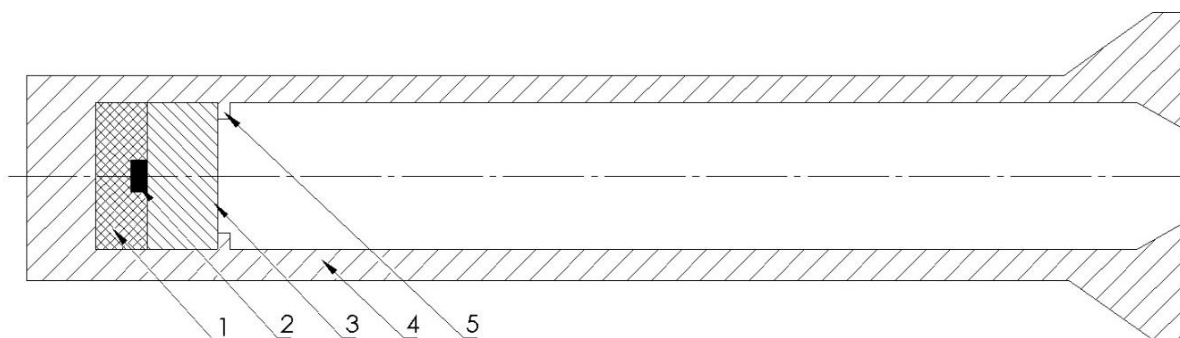
- Phase No 1 – lasting from striking the cap until building the pressure for powder ignition,
- Phase No 2 – lasting from the end of former phase until the combustion of the whole mass of the igniter,
- Phase No 3 lasting from the end of former phase until building the pressure of enforcement, the end of this phase means the beginning of projectile displacement,

- faza nr 4 – trwająca od końca fazy poprzedniej do spalenia się całego ładunku miotającego;
- faza nr 5 – trwająca od końca fazy poprzedniej do osiągnięcia przez tłok końca drogi.

Poniższe rysunki przedstawiają model fizyczny wnętrza pocisku w trzech chwilach czasowych: przed zapłonem, na końcu fazy trzeciej oraz na końcu fazy piątej.

- Phase No 4 – lasting from the end of former phase until combustion of the whole propelling charge,
- Phase No 5 – lasting from the end of former phase until the piston reaches the end of displacement.

Physical model of the inside of the projectile is presented in the pictures below for three time instances – before ignition, and at the ends of the third and fifth phases.

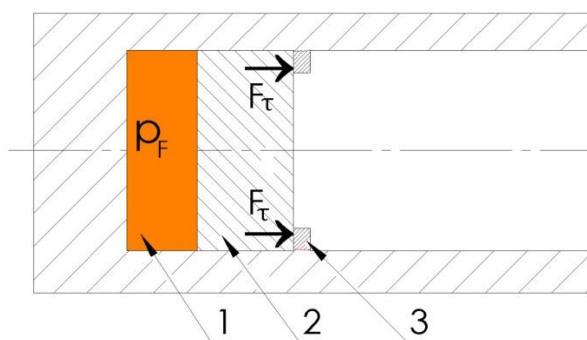


**Rys. 3. Model fizyczny elementów napędowych pocisku w chwili  $t=0$ :**

1 – ładunek miotający, 2 – spłonka, 3 – tłok, 4 – ogon pocisku (cylinder), 5 – kołki mocujące

**Fig. 3. Physical model of driving components of the projectile at time  $t=0$ :**

1 – propelling charge, 2 – primer (cap), 3 – piston, 4 – tail of the projectile (cylinder), 5 – fixing pins



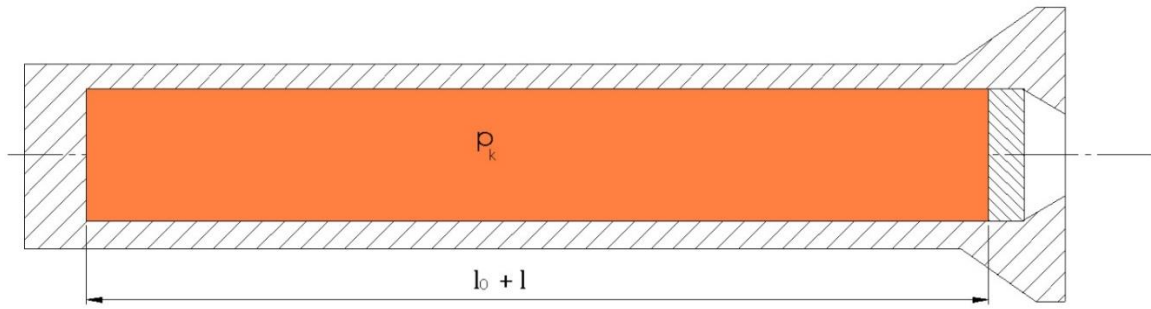
**Rys. 4. Model fizyczny elementów napędowych pocisku na końcu fazy trzeciej:**

1 – mieszanina gazowo-prochowa, 2 – tłok, 3 – kołki mocujące w momencie ścięcia,  $p_F$  – ciśnienie forsowania,  $F_T$  – siła ścinająca [opracowanie własne]

**Fig. 4. Physical model of driving components of the projectile at the end of the third phase:**

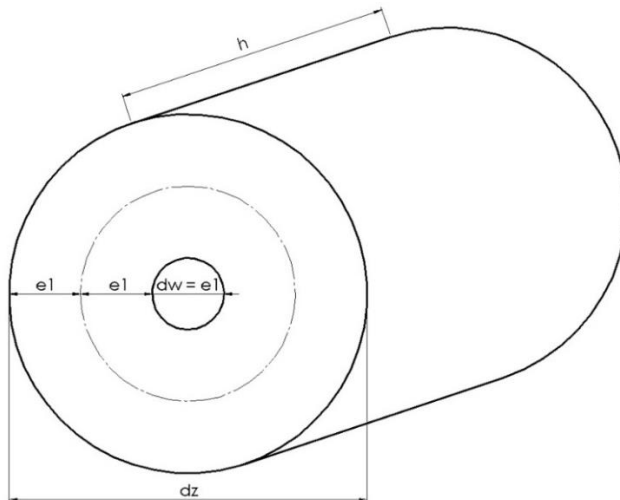
1 – gas-powder mixture, 2 – piston, 3 – fixing pins in moment of cutting,  $p_F$  – forcing pressure,  $F_T$  – shearing force [own development]





**Rys. 5. Model fizyczny elementów napędowych pocisku na końcu fazy piątej:**  
 $p_k$  – ciśnienie końcowe,  $l_0 + l$  – maksymalna długość komory spalania [opracowanie własne]

**Fig. 5. Physical model of driving components of the projectile at the end of the fifth phase:**  
 $p_k$  – terminal pressure,  $l_0 + l$  – maximal length of the combustion chamber [own development]



**Rys. 6. Wymiary ziarna prochu z zaznaczoną warstwą palną**  
 [opracowanie własne]

**Fig. 6. Dimensions of a powder grain with marked layer of burning**  
 [own development]

Na podstawie zależności geometrycznych uzyskano następujące równania:

- 1) pole powierzchni:

$$S = (h - 2e_s) * \pi * (d_z + d_w) + \frac{\pi * ((d_z - 2e_s)^2 - (d_w - 2e_s)^2)}{4} \quad (4.1)$$

gdzie  $e_s$  oznacza grubość spalanej już warstwy,

- 2) geometryczne prawo spalania zakłada że proch pali się warstwami prostopadle do powierzchni ziarna. Stąd otrzymujemy przyrost objętości spalanej:

On the base of geometrical relations following equations were received:

- 1) The size of surface:

where  $e_s$  is the thickness of already burnt layer,

- 2) The geometric law of combustion assumes that the powder burns in layers vertically to the grain surface. Hence, we can get an increment of the burnt volume:

$$\frac{dV_s}{dt} = S * \frac{de_s}{dt} \quad (4.2)$$

gdzie:  $V_s$  – objętość spalonego prochu.

#### 4.2. Model matematyczny zjawiska strzału

Przedstawiony dalej model matematyczny oparty jest o powszechnie używane prawa zachowania, w szczególności: prawo zachowania energii, pędu oraz masy. Są to fundamentalne prawa fizyki, których prawdziwości nie trzeba dowodzić, lecz przyjmuje się za pewne.

Formułując matematyczny model posłużono się założeniami przedstawionymi w publikacji L. Wolskiego (Wolski, 1986). Można określić je mianem standardowych, z punktu widzenia modelowania balistycznego.

Brzmiały one następująco:

- 1) proch pali się według geometrycznego prawa palenia. Zawiera ono wiele uproszczeń, takich jak:
  - proch pali się równoległymi warstwami, z jednakową prędkością, niezależnie od kierunku. W rzeczywistości, pęknięcia w strukturze oraz fakt stykania się ze sobą ziaren prochu, powodują różnice w prędkości palenia się między ziarnami;
  - zapłon prochu następuje w tej samej chwili czasowej, w całej objętości komory. W rzeczywistości, zapłon prochu zachodzi najpierw w obszarze bliżej spłonki, następnie płomień obejmuje dalsze warstwy prochu;
  - wszystkie ziarna prochu mają jednakowe wymiary. Jest to oczywiście niemożliwe, chociażby ze względu na proces produkcji ziaren. Przyjęty rozmiar ziarna jest swego rodzaju uśrednieniem rze-

where:  $V_s$  – volume of the burnt powder.

#### 4.2. Mathematical Model of Shooting Effect

The mathematical model is presented further and is based on commonly used principles of conservation, and especially the law of conservation of energy, momentum and mass. They are the fundamental laws of physics which have not to be proved but are taken for sure.

The mathematical model was formulated by using assumptions presented in L. Wolski's publication (Wolski, 1986).

They may be described as the standard ones for ballistic modelling. They are following ones:

- 1) Powder burns according with the geometrical law of burning. It has some simplifications such as:
  - powder burns in parallel levels at the same velocity and independently on the direction. In reality there are differences in burning velocities between the grains due to the fact that some of them stick to each other and to the cracks of the structure;
  - ignition of the powder starts at the same moment of time within the whole capacity of the chamber. In reality the ignition of the powder occurs first in the vicinity of the cap and next the further layers of the powder start to burn;
  - all powder grains have the same dimensions. Of course, it is impossible due to the production process. The accepted size of the grain is a mean one of the real values;

- czywistych wartości;
- 2) proch pali się w stałym ciśnieniu  $p$ . W rzeczywistości, wartości ciśnienia przy dnie pocisku i przy zamku są różne,
  - 3) zależność prędkości palenia się prochu od ciśnienia jest liniowa. To stwierdzenie nie jest prawdziwe dla ciśnień rzędu  $0,1 - 1 \text{ MPa}$ . Jako że praktycznie przez cały okres palenia się prochu ciśnienie w komorze jest znacznie większe, uproszczenie to jest do przyjęcia,
  - 4) pomija się straty ciepła spowodowane nagrzewaniem się lufy podczas strzału,
  - 5) wpływ prac drugorzędnych na ruch pocisku uwzględniony jest w postaci współczynnika  $\varphi \cong (1,05 \div 1,3)$ , fikcyjnie zwiększającego masę pocisku,
  - 6) kowolumen  $\alpha$  jest stały w trakcie całego okresu strzału. W rzeczywistości jest on zależny od temperatury mieszaniny gazowo-prochowej,
  - 7) wykładnik adiabaty  $k$  ma stałą wartość, będącą uśrednieniem wartości z całego okresu strzału, w rzeczywistości zmienia się on zależnie od temperatury,
  - 8) zakłada się istnienie ciśnienia forsowania – fikcyjnej granicy, której przekroczenie równoznaczne jest z początkiem ruchu pocisku,
  - 9) nie uwzględnia się odkształceń lufy, które w rzeczywistości zachodzą pod wpływem ciśnienia gazów prochowych.

Uwzględniając powyższe uproszczenia możemy stworzyć układ równań różniczkowych, których rozwiązanie tożsame będzie z rozwiązaniem PGBW. Większość z dalej wymienionych równań pojawia się pod różnymi postaciami w wielu źródłach. Wykorzystano równania, które wraz z ich wy-

- 2) Powder burns at constant pressure  $p$ . In reality the values of pressure at the projectile base and at the lock are different,
- 3) There is a linear dependence of powder burning velocity on the pressure. This statement is true for pressures between  $0.1 - 1.0 \text{ MPa}$ , As in practice the pressure in the chamber during the whole process of combustion is significantly greater, then this simplification is acceptable,
- 4) The losses of heat caused by the heating of barrel are omitted,
- 5) the influence of secondary works on the movement of projectile is considered by the coefficient  $\varphi \cong (1.05 \div 1.3)$  increasing artificially the mass of projectile,
- 6) Co-volume  $\alpha$  is constant within the whole interval of shooting. In reality it depends on temperature of the gas-powder composition,
- 7) The exponent of adiabat  $k$  has a constant value which is a mean of the values from the whole time of shooting. In reality it varies dependently on temperature,
- 8) The existence of a forcing pressure is assumed as an artificial limit allowing the start of projectile movement after its crossing.
- 9) Deformations of the barrel are not considered but they occur in reality under the influence of the powder gases pressure.

Considering the above simplifications we can create a system of differential equations the solution of which is equivalent to the solution of the MQIB. Most of the equations which are presented below appear in different forms in many sources. The applied equations are presented in pub-

prowadzeniem przedstawione są w pracy  
(Wrzesiński, 2018).

lication together with their derivations  
(Wrzesiński, 2018).

$$\frac{de_s}{dt} = u_1 * p_{ss} \quad (4.3)$$

$$S = (h - 2e_s) * \pi * (d_z + d_w) + \frac{\pi * ((d_z - 2e_s)^2 - (d_w - 2e_s)^2)}{4} \quad (4.4)$$

$$\frac{dV_s}{dt} = S * \frac{de_s}{dt} \quad (4.5)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\delta}{\omega} * \frac{dV_s}{dt} \quad (4.6)$$

$$\frac{d\psi_z}{dt} = \frac{G_z}{\omega_z} \quad (4.7)$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dV_s}{dt} * \delta + G_z \quad (4.8)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{s * p_s}{\rho_m} \quad (4.9)$$

$$\frac{dl}{dt} = v \quad (4.10)$$

$$\rho_m = \frac{\omega + \omega_z}{s * (l_0 + l)} \quad (4.11)$$

$$\frac{dW_s}{dt} = s * v + \left(\frac{1}{\delta} - \alpha\right) \omega * \frac{d\psi}{dt} - \alpha * \frac{d\psi_z}{dt} * \omega_z \quad (4.12)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{k-1}{R} \left( \frac{p_s}{\rho_m^2} * \frac{\rho_m}{dt} + q_v \frac{d\psi}{dt} + q_z \frac{d\psi_z}{dt} \right) \quad (4.13)$$

$$p = \frac{RNT}{W_s} \quad (4.14)$$

$$p_d = \frac{\rho_m v^2}{2} \quad (4.15)$$

$$p_s = p - p_d \quad (4.16)$$

$$p_{ss} = p - \frac{p_d}{3} \quad (4.17)$$

gdzie:

$d_w$  – średnica wewnętrzna rurki ziarna prochu,  
 $d_z$  – średnica zewnętrzna rurki ziarna prochu,  
 $e_s$  – grubość warstwy spalonego prochu,  
 $h$  – wysokość rurki ziarna prochu,

where:

$d_w$  – internal diameter of the powder grain tube,  
 $d_z$  – external diameter of the powder grain tube,  
 $e_s$  – thickness of the powder burnt layer,

$G_z$  – szybkość kreacji względnej masy zapłon-nika,  
 $k$  – wykładnik izentropy gazowych produktów spalania,  
 $l$  – droga pocisku,  
 $l_0$  – początkowa długość komory spalania,  
 $m$  – masa pocisku,  
 $N$  – masa gazowych produktów spalania,  
 $p$  – ciśnienie całkowite,  
 $p_d$  – ciśnienie dynamiczne,  
 $p_s$  – ciśnienie statyczne,  
 $p_{ss}$  – średnie ciśnienie statyczne,  
 $q_v$  – ciepło właściwe gazowych produktów spalania prochu,  
 $q_z$  – ciepło właściwe gazowych produktów spalania zapłonnika,  
 $R$  – indywidualna stała gazowa gazowych produktów spalania,  
 $s$  – pole przekroju lufy,  
 $S$  – pole powierzchni ziarna prochu,  
 $T$  – temperatura gazowych produktów spalania,  
 $u_1$  – prędkość palenia się prochu,  
 $v$  – prędkość pocisku,  
 $V_s$  – objętość spalonego prochu,  
 $W_s$  – objętość komory spalania,  
 $\alpha$  – kowolumen,  
 $\delta$  – gęstość ładowania,  
 $\rho_m$  – gęstość mieszaniny gazowo-prochowej,  
 $\psi$  – względna ilość spalonego prochu,  
 $\psi_z$  – względna ilość spalonego zapłonnika,  
 $\varphi$  – współczynnik prac drugorzędnych,  
 $\omega$  – masa prochu,  
 $\omega_z$  – masa zapłonnika.

### 4.3. Rozwiązanie numeryczne

W celu szybkiej realizacji etapu projektowania napisany został program, uruchamiany w środowisku MATLAB. Jego strukturę można porównać do drzewa. Główny program w trakcie pracy odwołuje się do mniejszych podprogramów oraz funkcji. Po uruchomieniu zadanego podprogramu, podprogram ten wykonuje prace na wspólnym zbiorze danych oraz ma możliwość uruchamiania kolejnych podprogramów.

Główny program, nazwany *Iteracje.m* służy do wyznaczenia najkorzystniejszych pa-

$h$  – the height of a powder grain tube,  
 $G_z$  – rate of creation of relative mass of the igniter,  
 $k$  – isentropic exponent of the gaseous products of combustion,  
 $l$  – displacement of the projectile,  
 $l_0$  – original length of the combustion chamber,  
 $m$  – the mass of projectile,  
 $N$  – the mass of gaseous products of combustion,  
 $p$  – overall pressure,  
 $p_d$  – dynamic pressure,  
 $p_s$  – static pressure,  
 $p_{ss}$  – the mean static pressure,  
 $q_v$  – specific heat of powder combustion gaseous products,  
 $q_z$  – specific heat of igniter combustion gaseous products,  
 $R$  – individual gas constant of the gaseous combustion products,  
 $s$  – surface of the barrel cross-section,  
 $S$  – size of the powder grain surface,  
 $T$  – temperature of gaseous combustion products,  
 $u_1$  – velocity of powder combustion,  
 $v$  – velocity of projectile,  
 $V_s$  – capacity of burned powder,  
 $W_s$  – capacity of combustion chamber,  
 $\alpha$  – co-volume,  
 $\delta$  – density of loading,  
 $\rho_m$  – density of gas-powder composition,  
 $\psi$  – relative quantity of burned powder,  
 $\psi_z$  – relative quantity of burned igniter,  
 $\varphi$  – coefficient of secondary works,  
 $\omega$  – mass of powder,  
 $\omega_z$  – mass of igniter.

### 4.3. Numerical Solution

A computer code working in MATLAB environment was prepared to speed the stage of designing. Its structure may be compared with a tree. The main program recalls to smaller subprograms and functions. After activation of a given subprogram it performs the operations on the common data base and can use consecutive subprograms.

The main program is called *Iteracje.m* and is used to identify the best parameters of the designed projectile. It calls out the MQIB program for many times to be per-

rametrów projektowanego pocisku. Wywołuje on wielokrotnie program *PGBW.m*, który wykonywany jest dla kolejno zmieniających się parametrów. Dla każdego wyznaczonego przebiegu ciśnienia, program *Grub\_ogona.m* określa minimalne wymiary zewnętrznie ogona pocisku, które spełniają wymagania wytrzymałościowe. Po wykonaniu obliczeń dla wszystkich kombinacji parametrów, program przedstawia najkorzystniejszą konfigurację. W dalszej części przedstawiono szczegóły działania poszczególnych programów oraz wyniki obliczeń uzyskane za ich pomocą.

*PGBW.m* to program będący głównym narzędziem całego opisanego powyżej algorytmu. Jego zadaniem jest rozwiązanie problemu głównego balistyki wewnętrznej, co zaznaczono w jego nazwie. Pierwszym wykonywanym przez niego krokiem jest wczytanie do pamięci wykorzystywanych zmiennych oraz przypisanych im wartości liczbowych. Wśród nich znajdują się dane opisujące rozpatrywany przypadek np.: średnica i długość lufy, masa i geometria prochu, wartość ciśnienia forsowania oraz stałe fizyczne niezbędne do obliczeń, takie jak: wykładnik adiabaty i indywidualna stała gazowa. Po wczytaniu wszystkich danych następuje generowanie warunków początkowych. Są one niezbędne dla rozwiązania zagadnienia początkowego równań różniczkowych zwyczajnych. Zapisywane są w postaci wektora o długości odpowiadającej ilości równań wykorzystanych do opisu modelu, w tym wypadku wynosi ona 15.

Kolejnym krokiem jest wywołanie funkcji *ode15s*, która wykonuje obliczenia na podstawie wcześniej określonych parametrów. W trakcie pracy programu *PGBW.m*, funkcja ta jest wywoływana pięć razy, po jednym dla każdej fazy strzału. Każda faza charakteryzuje się innym układem równań. Na przykład, w fazie pirostatycznej nie są wykorzystywane równania związane z ruchem pocisku w lufie.

formed for consecutively changed parameters. The program *Grub\_ogona.m* determines for each designed course of the pressure the minimal external dimensions of the projectile tail meeting the strength requirements. After execution of calculations for all combinations of parameters the program presents the most beneficial configuration. Some operating details of particular programs and results of calculations provided by them are presented in further parts.

The *PGBW.m* program is the main tool of the whole algorithm described above. It is focused on solution of the major question of internal ballistics what is reflected in its name. In the first step it records into the memory the used variables and the numerical values addressed to them. The data describing the considered case is among them, for instance: diameter and length of the barrel, mass and geometry of powder, value of forcing pressure, and the physical constants needed for calculations, such as the adiabatic exponent and the individual gas constant. After recording all the data the original conditions are generated. They are necessary for solution of the initial question of the regular differential equations. They are recorded in the form of a vector with the length corresponding to the number of equations used for description of the model, which in this case is 15.

In the next the function *ode15s* is called forth to perform the calculations basing on parameters which were earlier defined. At operation of *PGBW.m* program this function is called forth five times, each time for every phase of shooting. Each phase is characterised by another system of equations. For instant, in the pyro-statical phase the equations connected with displacement of projectile inside the barrel are not used. Therefore, it is essential for the compliance of calculations

Istotne zatem jest, z punktu widzenia zgodności obliczeń z modelem, by fazy rozpoczynały się i kończyły w ściśle określonych punktach. Zakończenie działania funkcji *ode15s* jest równoznaczne z zakończeniem fazy i uwarunkowane jest dwoma czynnikami. Pierwszym z nich jest osiągnięcie przez wybraną zmienną określonej przez użytkownika wartości. Na przykład, faza 3 (pirostatyczna) kończy się, gdy ciśnienie wewnątrz lufy osiągnie ciśnienie forsowania a pocisk zacznie się poruszać. Jeżeli więc w trakcie obliczeń spełniony zostanie taki warunek, wyniki dla danej fazy zostaną zapisane i uruchomione zostaną obliczenia kolejnej fazy. By zapewnić poprawność działania programu, monitorowane są również wartości innych krytycznych parametrów. Jeżeli warunek kończący fazę  $n$  zostanie spełniony już w trakcie obliczeń fazy  $n-1$ , obliczenia zostają przerwane i wyniki obliczeń odrzucone. Wyświetlany jest natomiast komunikat o błędzie i jego przyczynie. Oto przykład takiej sytuacji. Warunkiem zakończenia fazy 4 jest całkowite spalenie się prochu. Jeżeli całkowite spalenie prochu nastąpi już w trakcie fazy 3, program zakończy działanie i poinformuje o błędzie. Drugą przyczyną zatrzymania programu może być osiągnięcie granicy przedziału całkowania. Użytkownik sam dobiera maksymalny czas trwania każdej z faz na podstawie doświadczenia oraz wyników poprzednich obliczeń. Ograniczenie to zostało nałożone, by uniknąć sytuacji w której program po otrzymaniu nieodpowiednich parametrów, wykonuje obliczenia w nieskończoność ponieważ wartość zmiennej kończąca fazę nie może zostać osiągnięta.

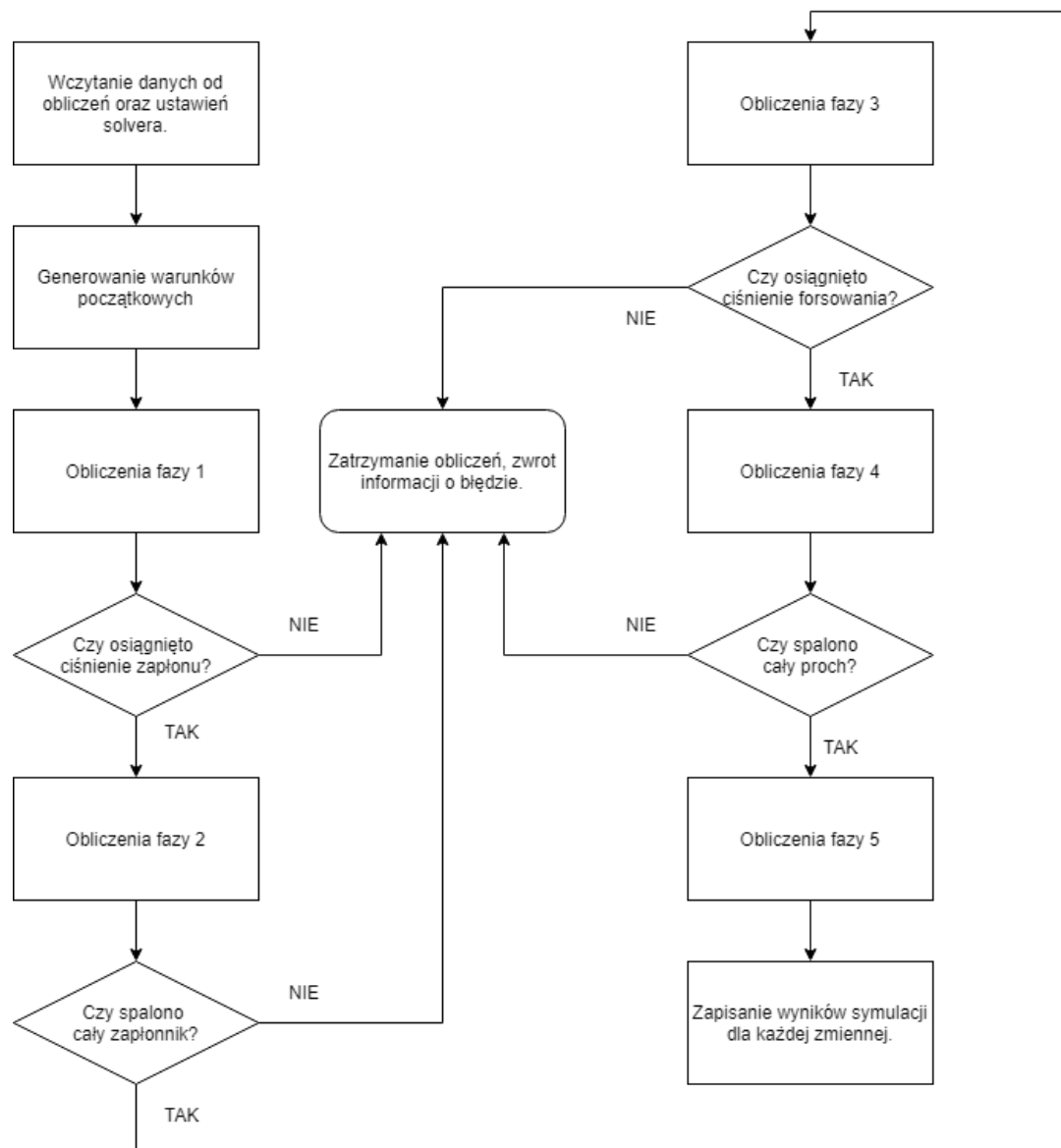
Po poprawnym wykonaniu obliczeń dla wszystkich faz, wyniki zapisywane są w postaci macierzy, w której pierwsza kolumna zawiera kolejne chwile czasowe, a kolejne kolumny zawierają odpowiadające im wartości zmiennych. Pozwala to na wygodne tworzenie

with the model to start and terminate the phases at strictly defined points. Termination of operation for function *ode15s* is equivalent to termination of a phase and is conditioned by two factors. The first of them is the reaching of user specified value by a selected variable. For instance, phase 3 (pyro-static) ends when the pressure inside the barrel builds up to the pressure of forcing and the projectile starts to move. If such condition is fulfilled at the calculations then the results for a given phase will be recorded and calculations for the next phase will start. The values of other critical parameters are also monitored to secure the correct operation of the program. If the condition terminating the phase  $n$  is already met at calculations for the phase  $n-1$  then the calculations will be interrupted and their results rejected. Instead the message is displayed about an error and its reason. Here is an example of such situation. Termination of the phase 4 is conditioned by the complete combustion of powder. If the powder burns entirely already in the phase 3 then the program stops the operation and informs about the error. The second reason for stopping the program may be the reaching of the integration limit. The user individually settles the maximal duration time of each phase on the base of the experience and the results of previous calculations. This limitation was made to avoid a situation when the program, after receiving wrong parameters, performs the calculations endlessly because the value of the variable needed for termination of the phase cannot be reached.

When the calculations are performed correctly for all phases, then the results are recorded in the form of a matrix with the first column containing the consecutive time moments and following columns the values of variables corresponding to them. It facilitates creation of graphs and the analysis of

wykresów i analizę poprawności działania algorytmu. Poniżej przedstawiono schemat blokowy działania programu *PGBW.m*.

algorithm operational correctness. Below a block schematic of program *PGBW.m* operation is presented.



**Rys. 7. Schemat blokowy programu PGBW.m [opracowanie własne]**

**Fig. 7. Block schematic of PGBW.m program [own development]**

Wczytanie danych od obliczeń i ustawień solvera  
*Entering data for calculations and solver settings*  
 Generowanie warunków początkowych  
*Generation of initial conditions*  
 Obliczenia fazy 1  
*Calculations of phase 1*  
 Czy osiągnięto ciśnienie zapłonu?  
*Is the pressure of ignition reached?*  
 TAK – NIE / YES - NO

Czy spalono cały zapłonnik?  
*Is the whole igniter burnt?*  
 Zatrzymanie obliczeń, zwrot informacji o błędzie  
*Interruption of calculations, return error message*  
 Czy osiągnięto ciśnienie forsowania?  
*Is the pressure of forcing reached?*  
 Czy spalono cały proch?  
*Is the powder burnt completely?*  
 Zapisanie wyników symulacji dla każdej zmiennej  
*Recording simulation results for each variable*



Tabela 1. Parametry przyjęte do przykładowych obliczeń

Table 1. Parameters taken for exemplary calculations

Parametr /Parameter	Symbol	Wartość/ Value	Jednostka / Unit
Szybkość palenia prochu Rate of powder combustion	$u_1$	$1 * 10^{-9}$	$\frac{m}{s * Pa}$
Grubość ziarna / Thickness of grain	$e_1$	0,00025	m
Masa zapłonika / Mass of the igniter	$\omega_z$	0,0005	kg
Gęstość strumienia masy zapłonika Density of igniter mass stream	$G_z$	100	kg/s
Gęstość ładowania / Density of loading	$\Delta$	840	kg/m <sup>3</sup>
Średnica cylindra / Diameter of cylinder	$d$	0,032	m
Pole przekroju cylindra Cylinder cross-section	$s$	$0,82 * d^2$	m <sup>2</sup>
Długość komory spalania Length of combustion chamber	$l_0$	0,0180	m
Masa prochu / Mass of powder	$\omega$	-	kg
Kowolumen MGP* Co-volume of GPM*	$\alpha$	0,0009	m <sup>3</sup> /kg
Współczynnik masy fikcyjnej Coefficient of artificial mass	$\varphi$	1,088	-
Masa pocisku / Mass of projectile	$m$	1,80	kg
Wykładnik adiabaty Exponent of adiabat	$k$	1,2	-
Indywidualna stała gazowa MGP* Individual gas constant of GPM*	$R$	340	$\frac{J}{kg} * K$
Masowa gęstość ilości ciepła wybuchu prochu / Mass density of heat for the explosion of powder	$q_v$	$4,75 * 10^6$	J/kg
Masowa gęstość ilości ciepła wybuchu zapłonika / Mass density of heat for the explosion of igniter	$q_z$	$0,29 * 10^6$	J/kg
Ciśnienie zapłonu prochu Pressure of powder ignition	$p_{zap}$	2	MPa
Ciśnienie forsowania Pressure of forcing	$p_f$	17	MPa
Droga tłoka / Displacement of piston	$l_{max}$	0,26	m
Wysokość rurki prochu Height of powder tube	$h$	0,005	m
Średnica zew. rurki prochu External diameter of powder tube	$d_z$	$5 * e_1$	m
Średnica wew. rurki prochu Internal diameter of powder tube	$d_w$	$e_1$	m

\*Mieszanka gazowo-prochowa / \*Gas-powder Mixture

W celu demonstracji działania programu PGBW.m przedstawiono obliczenia dla pocisku o przykładowych parametrach.

In order to demonstrate the operation of PGBW.m program, calculations were made for a projectile with exemplary parameters.

Tabela 2. Warunki początkowe przyjęte do przykładowych obliczeń

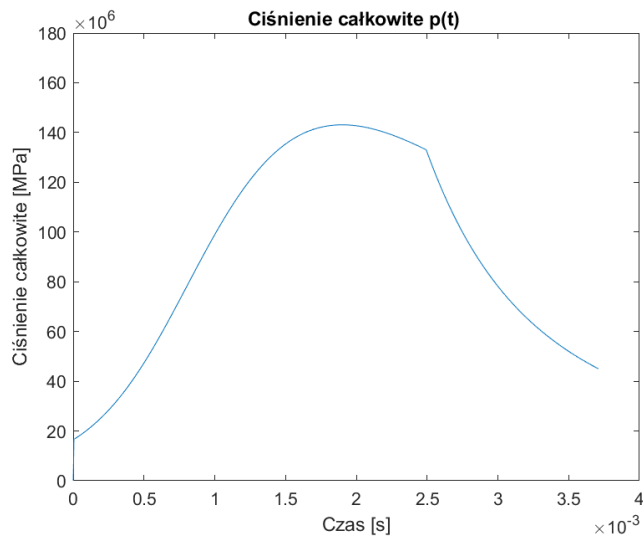
Table 2. Initial conditions taken for calculations

Zmienna / Variable	Symbol	Wartość / Value	Jednostka / Unit
Grubość spalonej warstwy ziarna <i>Thickness of grain burnt layer</i>	$e_s$	0	$m$
Pole powierzchni ziarna <i>Surface of the grain</i>	$S$	$2,4740 * 10^{-5}$	$m^2$
Spalona objętość ziarna <i>Volume of burnt grain</i>	$V_s$	0	$m^3$
Względna masa GPS* <i>Relative mass of GPC*</i>	$\psi$	0	–
Względna masa GPS* zapłonika <i>Relative mass of igniter's GPC*</i>	$\psi_z$	0	–
Masa GPS* / <i>Mass of GPC*</i>	$N$	$4,90874 * 10^{-6}$	$kg$
Prędkość pocisku / <i>Velocity of projectile</i>	$v$	0	$m/s$
Droga pocisku / <i>Displacement of projectile</i>	$l$	0	$m$
Gęstość MGP / <i>Density of GPM</i>	$\rho_m$	873,081	$kg/m^3$
Objętość swobodna komory <i>Free capacity of the chamber</i>	$W_s$	$s * l_0$	$m^3$
Temperatura MGP / <i>Temperature of GPM</i>	$T$	293	$K$
Ciśnienie całkowite / <i>Overall pressure</i>	$p$	100000	$Pa$
Ciśnienie dynamiczne / <i>Dynamic pressure</i>	$p_d$	0	$Pa$
Ciśnienie statyczne na dno pocisku <i>Static pressure to the base of projectile</i>	$p_s$	100000	$Pa$
Ciśnienie statyczne średnie <i>The mean static pressure</i>	$p_{ss}$	100000	$Pa$

\*gazowe produkty spalania / \*Gaseous Products of Combustion

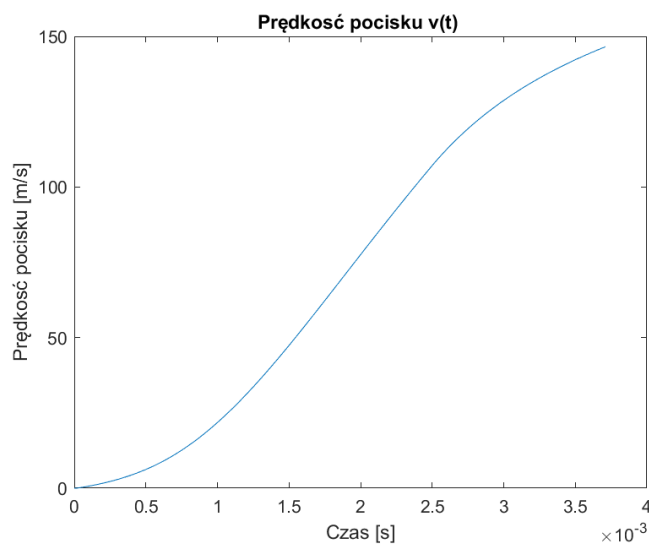
Poniżej przedstawiono wykresy wybranych zmiennych otrzymane na podstawie wyników obliczeń.

The graphs of some variables received from the calculation results are presented below.



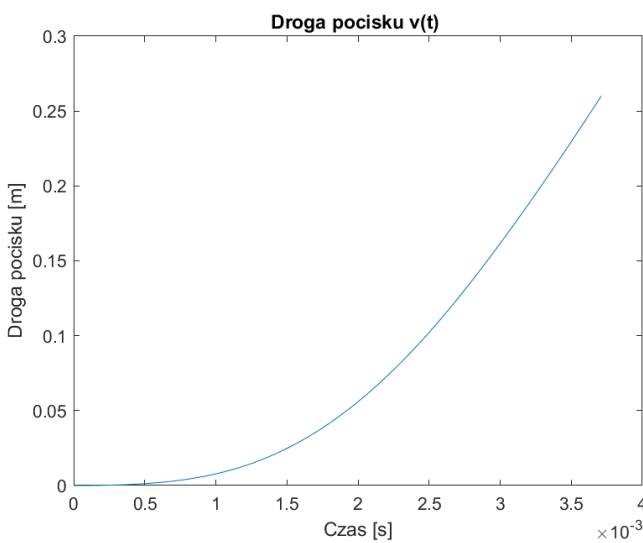
**Rys. 8. Wykres ciśnienia całkowitego w funkcji czasu**  
[opracowanie własne]

**Fig. 8. Total pressure versus time**  
[own development]



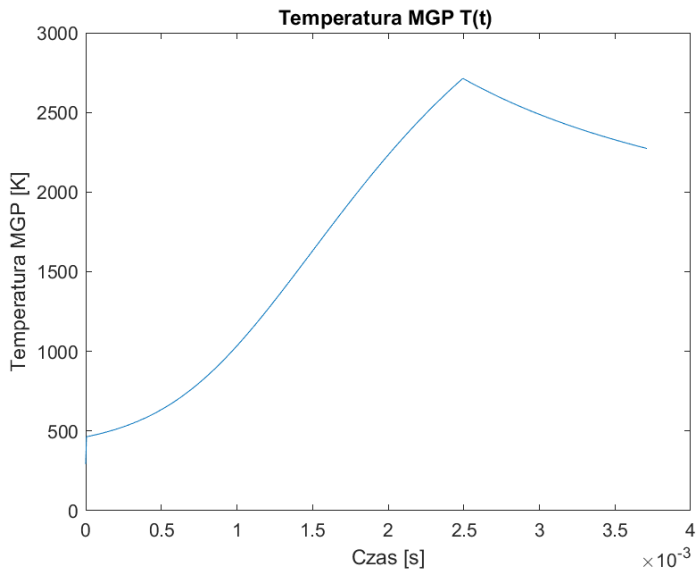
**Rys. 9. Wykres prędkości pocisku w funkcji czasu**  
[opracowanie własne]

**Fig. 9. Velocity of projectile versus time**  
[own development]



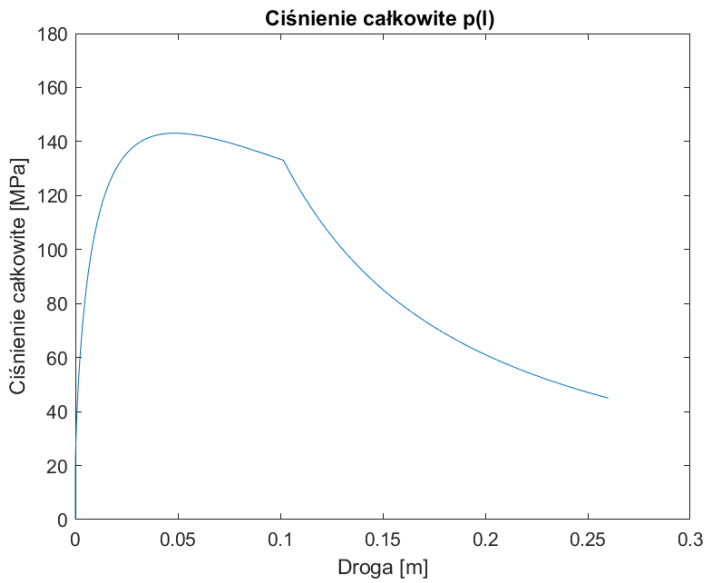
**Rys. 10. Wykres drogi pocisku w funkcji czasu**  
[opracowanie własne]

**Fig. 10. Displacement of projectile versus time**  
[own development]



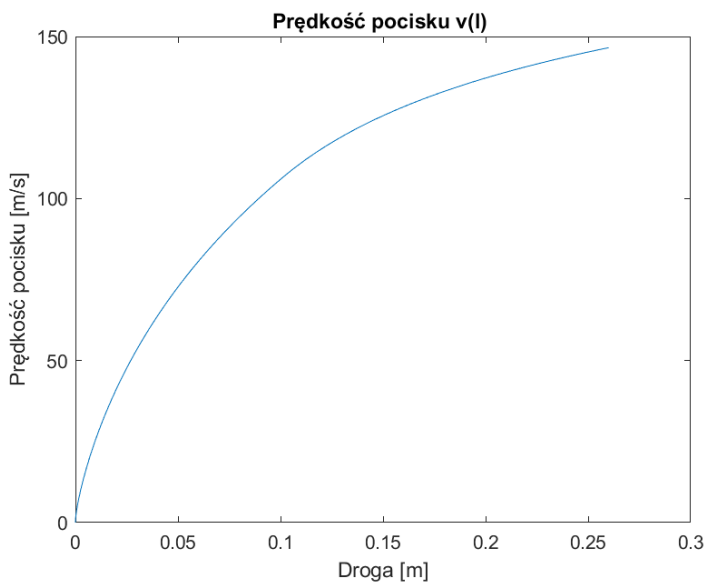
**Rys. 11. Wykres temperatury MGP w funkcji czasu**  
[opracowanie własne]

*Fig. 11. Temperature of GPM versus time*  
[own development]



**Rys. 12. Wykres ciśnienia całkowitego w funkcji drogi pocisku**  
[opracowanie własne]

*Fig. 12. Total pressure versus projectile's displacement*  
[own development]



**Rys. 13. Wykres prędkości pocisku w funkcji drogi pocisku**  
[opracowanie własne]

*Fig. 13. Velocity of projectile versus its displacement*  
[own development]

## 5. Wnioski

Utworzone programy, rozwiązujące problem główny balistyki wewnętrznej „cichego” pocisku moździerzowego, udowodniły swoją przydatność, umożliwiając otrzymanie charakterystyk strzału dla każdej poprawnej konfiguracji pocisku oraz automatycznie odrzucając rozwiązania niespełniające założeń. Dodatkowo, struktura programu umożliwia wygodną modyfikację układów równań oraz parametrów modelu, co pozwala na wykorzystanie go do wspomagania projektowania innych układów broni palnej.

Słuszność wyboru środowiska MATLAB do wykonywania obliczeń została potwierdzona poprzez szybkość obliczeń i bezawaryjność działania. Na korzyść tego programu przemawia również łatwość obsługi oraz wbudowane narzędzia do wizualizacji wyników obliczeń. W części III niniejszego cyklu publikacji przedstawiono dalsze obliczenia związane z konstrukcją „cichego” pocisku moździerzowego.

## 5. Conclusions

The programs created for solving the major question of internal ballistics of the “silent” mortar projectile have proved that they can be used successfully for receiving characteristics of shooting to each correct configuration of the projectile, and for automatic rejection of solutions not complying with the accepted specifications. Additionally, the structure of the program facilitates some modifications of system of equations and parameters of the model, what makes it can be used for assisting the designing process of other systems of firearms.

Selection of the MATLAB environment for calculations was confirmed by the speed of calculations and efficient operation. Simple handling and embedded tools for visualisation of calculation results belong to benefits of this program, as well. In the III part of this publication cycle the further calculations connected with the design of the “silent” mortar projectile will be presented.

## Literatura / Literature

- Krupowicz, A. (1986). *Metody numeryczne zagadnień początkowych równań różniczkowych zwyczajnych*. Warszawa: PWN.
- Krzyżanowski, P. (2012). *Obliczenia inżynierskie i naukowe : szybkie, skuteczne, efektywne* (wyd. I - 2 dodr.). Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Mathworks. *Choose an ODE Solver*.  
(<https://www.mathworks.com/help/matlab/math/choose-an-ode-solver.html> - 03.01.2021).
- Pańczyk, B. (2012). *Metody numeryczne w przykładach*. Lublin: Politechnika Lubelska.
- Wolski, L. (1986). *Balistyka wewnętrzna*, t. 1. (wyd. 2 popr.). Warszawa: Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej.
- Wrzeński, Z. (2018). *Balistyka wewnętrzna klasycznych broni lufowych* (wyd. I). Warszawa: Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej.

