



**PSEUDOSTABILNY LOT NADDŹWIĘKOWEGO POCISKU
MOŹDZIERZOWEGO**

SEMI STABLE FLIGHT OF SUPERSONIC MORTAR PROJECTILE

Tomasz MERDA

Wojskowy Instytut Techniczny Uzbrojenia, ul. Wyszyńskiego 7, 05-220 Zielonka
Military Institute of Armament Technology, 7 Wyszyński St., 05-220 Zielonka, Poland
Author's e-mail address: merdat@witu.mil.pl; ORCID: 0000-0003-2309-4508

DOI 10.5604/01.3001.0013.3769

Streszczenie: W trakcie prac nad opracowywaniem naddźwiękowych pocisków moździerzowych, podczas strzelań jednym z typów pocisku, zaobserwowano bardzo duży rozrzut. Wykorzystując model balistyki zewnętrznej traktujący pocisk jako bryłę sztywną wyznaczono tory lotu badanych pocisków oraz określono ich parametry i przyczyny rozrzutu ich punktów upadku. Analiza uzyskanych wyników wykazała, że przyczyną powstałego rozrzutu nie był podrzut aerodynamiczny tylko inne, nie opisane dotąd w literaturze, zjawisko, które w niniejszej pracy zostało nazwane „pseudostabilnym lotem pocisku”. W pracy przedstawiono opis, określono przyczyny i czynniki mające wpływ na jego występowanie oraz przedstawiono metodę wyznaczania kąta nutacji równowagi, który jest kluczowy dla tego zjawiska.

Słowa kluczowe: naddźwiękowy pocisk moździerzowy, balistyka zewnętrzna, rozrzut, lot pseudostabilny pocisku.

1. Wstęp

Wojskowy Instytut Techniczny Uzbrojenia (WITU) bierze udział w pracach badawczo-rozwojowych 120 mm naboju z pociskiem naddźwiękowym. Jednym z ważnych aspektów projektu jest analiza zagadnień związanych z balistyką zewnętrzną naddźwiękowych pocisków moździerzowych.

Abstract: Significantly large dispersion of projectiles was observed at firing a specific type of a supersonic mortar projectile being developed. The flying paths, parameters and reasons of falling points dispersion were determined for tested projectiles with a model of external ballistics describing the projectile as a rigid body. Analysis of received results has indicated that the dispersion was not caused by an aerodynamic jump but by an effect which has not been described yet in the literature and is named here as “projectile’s semi-stable flight”. The paper includes a description of the effect with reasons and parameters affecting its occurrence, and a method for determination of the equilibrium nutation angle which plays a key role in this effect.

Keywords: supersonic mortar projectile, exterior ballistic, dispersion, projectile’s semi-stable flight.

1. Introduction

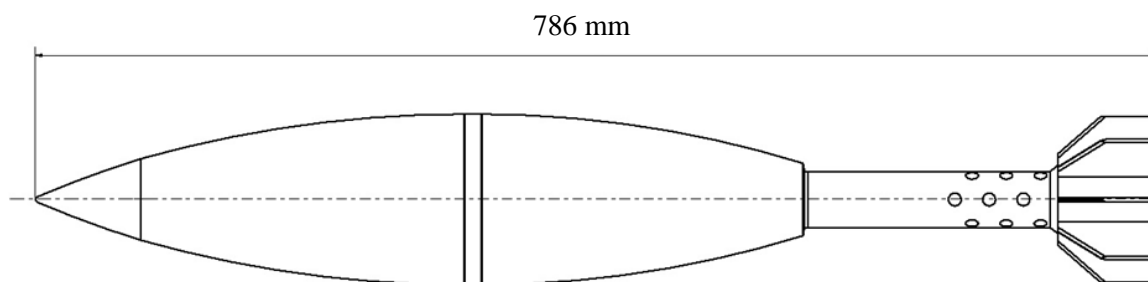
The Military Institute of Armament Technology (MIAT) is involved in a researchdevelopment work on 120 mm ammunition for a supersonic projectile. Analysis of questions of external ballistics for the mortar supersonic projectiles is one of important aspects of the project.

Wiele źródeł krajowych (Gacek 1999a, 1999b) oraz zagranicznych (McCoy, 1999) szczegółowo opisuje zagadnienia lotu pocisków moździerzowych w poddźwiękowym zakresie prędkości, jednakże brakuje informacji na temat lotu tych pocisków z prędkościami naddźwiękowymi. Jednym z wyjątków jest raport (Floroff i Salatino, 2000) opisujący m. in. zagadnienia stabilizacji i rozrzutu pocisku M984 dla prędkości naddźwiękowych. Ważnym wnioskiem zawartym w tym raporcie jest stwierdzenie, że przy wzroście prędkości początkowej pocisków powyżej pewnej wartości zaczyna gwałtownie rosnać jego rozrzut. Na zwiększenie rozrzutu wpływa bezpośrednio pogorszenie się stabilizacji pocisków dla dużych prędkości w wyniku wzrostu ich tzw. wrażliwość na podrzut (ang. jump sensitivity). Informacje przedstawione w raporcie zostały wykorzystane podczas prac badawczo-rozwojowych w WITU.

Podczas realizacji programu powstało kilka wariantów pocisku, które były badane dynamicznie strzelaniem na maksymalną donośność przy prędkości początkowej $V_0 \approx 500$ [m/s]. Jeden z wariantów przedstawiony na rysunku 1 cechował się bardzo dużym rozrzutem, wielokrotnie przekraczającym wymagania stawiane docelowemu pociskowi. Jednocześnie charakter rozrzutu pocisku różnił się znacznie od przedstawionego w pracy (Stołboszyński, 1956).

Many sources from the country (Gacek 1999a, 1999b) and abroad (McCoy, 1999) describe in details the questions of mortar projectiles flight for subsonic velocities whereas the information on the flight of these projectiles at supersonic velocities is not available. A report (Floroff & Salatino, 2000) presenting questions relating to stabilisation and dispersion of M984 projectile for supersonic velocities is one of exceptions. The report includes an essential conclusion saying that the dispersion increases rapidly when the initial velocity of projectiles crosses a certain value. The increased dispersion is connected directly with the worsening of projectiles stabilisation at great velocities caused by the increased level of so called jump sensitivity. The information provided in the report was used for the research-development work in MIAT.

A few options of projectiles were prepared for the program to pass dynamic tests by firings at the maximal range for muzzle velocity $V_0 \approx 500$ [m/s]. One of the options, presented in Fig. 1, has featured by very high dispersion which exceeded by many times the values included in the specifications prepared for the final projectile. At the same time the character of projectiles dispersion was significantly different from presented in (Stołboszyński, 1956).



Rys. 1. Schemat aerodynamiczny badanego pocisku

Fig. 1. Aerodynamic outline of tested projectile

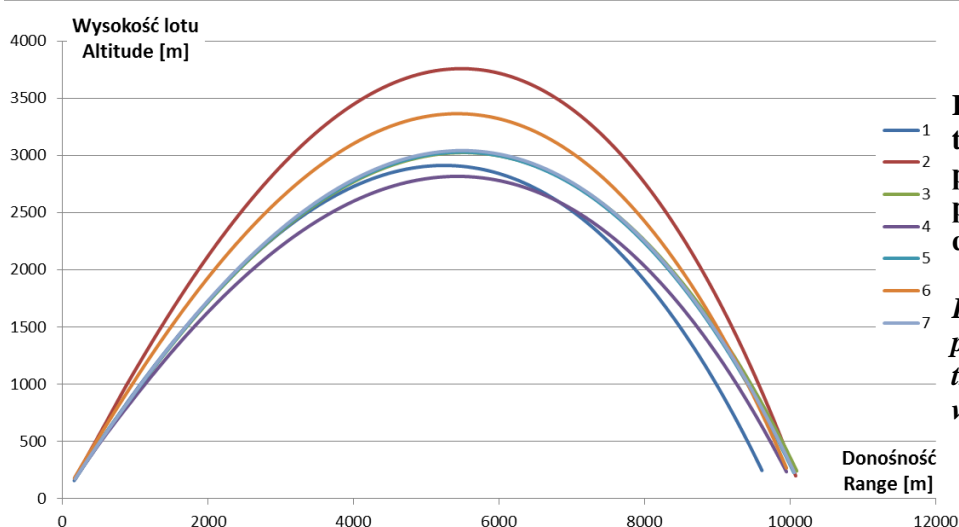
Równolegle, w czasie opisywanych badań strzelaniem, testowany był dla takich samych warunków inny wariant pocisku, którego rozrzut był możliwy do zaakceptowania z punktu widzenia praktyki artyleryjskiej tego rodzaju pocisków. To oznacza, że należy odrzucić wpływ działa oraz atmosfery jako przyczynę zbyt dużego rozrzutu prezentowanego pocisku. Dodatkowo zaobserwowano duże różnice w wartościach wierzchołkowych dla poszczególnych strzałów oddanych dla tego samego kąta podniesienia lufy. Na rysunkach 2 oraz 3 przedstawiono wykresy trajektorii pocisków rzutowane na płaszczyznę pionową ziemską, odpowiednio dla odległości odpowiadającej całej trajektorii oraz pierwszych 1000 m. Z kolei na rysunkach 4 i 5 przedstawiono rzuty tych trajektorii na poziomą płaszczyznę ziemską. W opisywanym układzie ziemskim kierunek i zwrot osi x jest zgodny z osią anteny radaru i kierunkiem strzału, oś y jest osią pionową o zwrocie przeciwnym do wektora przyspieszenia grawitacyjnego, a oś z dopełnia układ do prawoskrętnego. Początek układu współrzędnych jest w punkcie wylotu lufy. Wartości prędkości początkowych rozważanych pocisków przedstawione są w tabeli 1.

At the time of described firing tests another option of the projectile was also tested at identical conditions and its dispersion was on the acceptable level of gun firing practice for this type of projectiles. It means that impact of the gun and atmosphere has to be eliminated as a reason of the projectile excessive dispersion. Moreover great differences were observed for top altitudes of particular shots fired at the same barrel elevation angle. Fig. 2 and 3 show trajectories of projectiles in a plane vertical to earth surface for ranges corresponding respectively to the whole trajectory and the first 1000 m. Fig. 4 and 5 illustrate the projection of these trajectories into the plane horizontal to earth surface. Described system of coordinates connected with the earth has the direction and sense of x-axis along the radar antenna axis and direction of firing, the y-axis as the vertical axis with the sense in opposite direction to the earth gravitation, and the z-axis which completes the right-handed system. The muzzle of the barrel is the origin of coordinate system. The muzzle velocities of considered projectiles are presented in table 1.

Tabela 1. Zestawienie wartości prędkości początkowych wystrzelonych pocisków

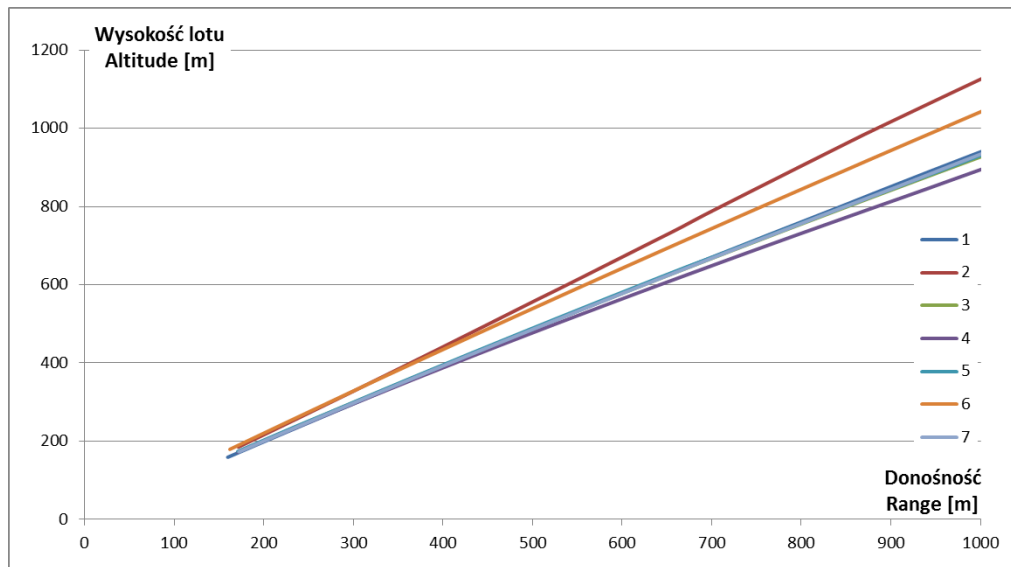
Table 1. Muzzle velocities of fired projectiles

Numer strzału Shot no.	1	2	3	4	5	6	7	8
V_0 [m/s]	468,0	528,0	519,0	504,4	504,0	506,7	504,6	506,4



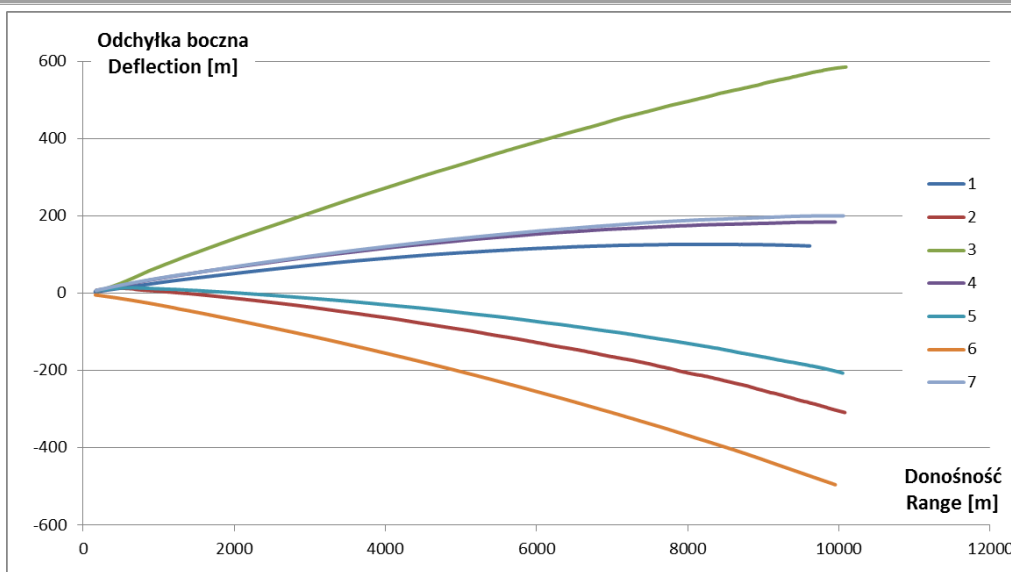
Rys. 2. Rzut trajektorii lotu pocisków na pionową płaszczyznę ziemską dla całego toru

Fig. 2. Projection of projectiles whole flight trajectory into the vertical globe plane



Rys. 3. Rzut początkowej części trajektorii (do odległości lotu $D = 1000$ [m]) lotu pocisków na pionową płaszczyznę ziemską

Fig. 3. Projection of projectiles initial flight trajectory (to distance of $D = 1000$ [m]) into the vertical globe plane



Rys. 4. Rzut trajektorii lotu pocisków na poziomą płaszczyznę ziemską

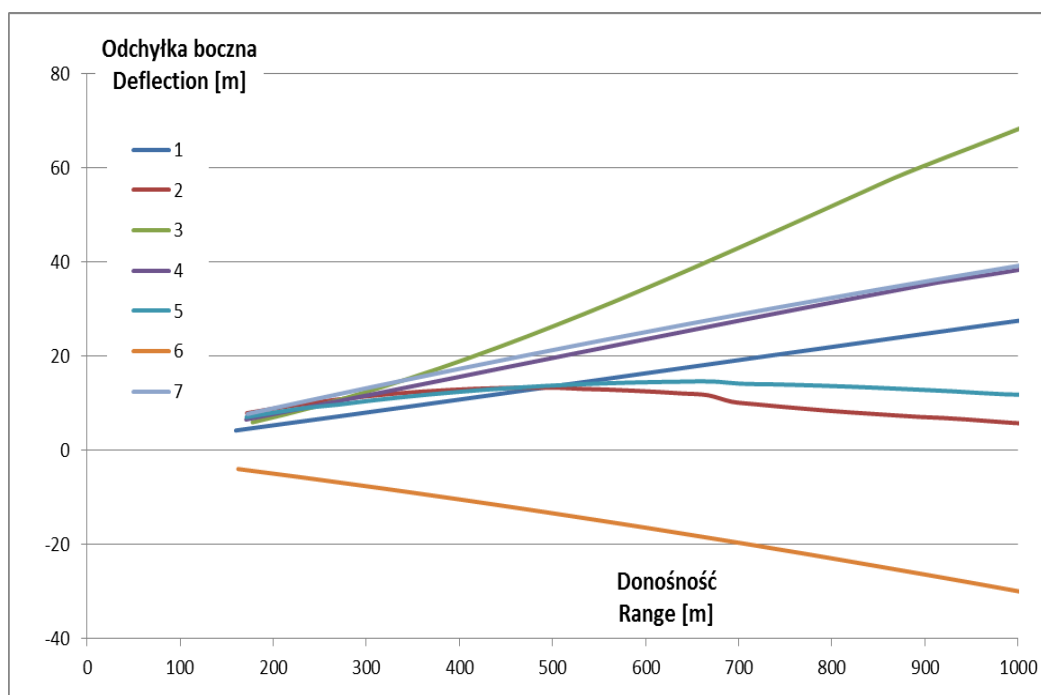
Fig. 4. Projection of projectiles flight trajectory into the horizontal globe plane

Pierwszą założoną przyczyną tak dużego rozrzutu wartości zarówno odchyłki bocznej jak i wierzchołkowej była asymetria aerodynamiczna badanych pocisków. Po wykonaniu modyfikacji kształtu brzechw w pocisku, tak aby nadawały pociskowi obroty własne w czasie lotu oraz zapewniając wysoką dokładność wykonania pocisków powtórzono badania strzelaniem. Wyniki powtórnego badania strzela-

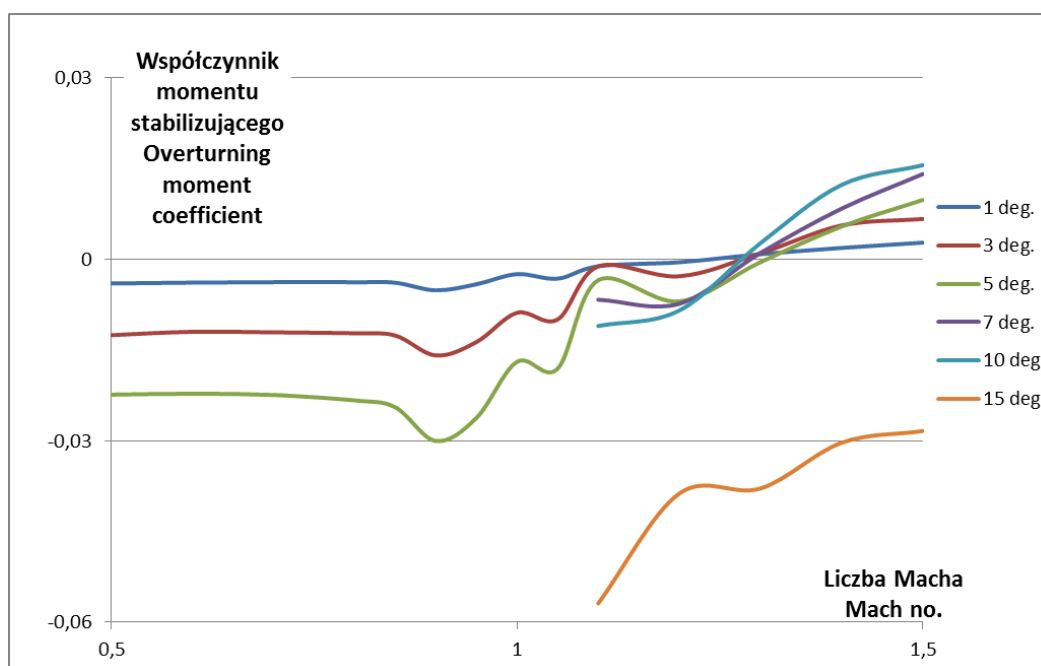
It was firstly assumed that such significant dispersion of values for both lateral and top deflections was caused by an aerodynamic asymmetry of tested projectiles. Then some modifications of shapes on projectile's fins were made to secure its self-rotation during the flight and after precise assembling the projectiles were tested again by firing. Results of repeated tests were

niem były zbliżone do przedstawionych w pracy (Magier i Merda, 2017).

similar to those presented in publication (Magier & Merda, 2017).



Rys. 5. Rzut początkowej części trajektorii lotu pocisków na poziomą płaszczyznę ziemską
Fig. 5. Projection of projectiles initial flight trajectory into the horizontal globe plane



Rys. 6. Przebiegi współczynnika momentu aerodynamicznego stabilizującego badanego pocisku
Fig. 6. Course of the aerodynamic stabilising moment coefficient for the tested projectile

Ze względu na brak danych dotyczących parametrów atmosfery, wyniki z powtórnego badania strzelaniem nie zostały uwzględnione w niniejszej pracy. Ponieważ zjawisko asymetrii aerodynamicznej zostało odrzucone jako przyczynę przedstawionego rozrzutu, zwrócono uwagę na zjawisko podrzutu aerodynamicznego (ang. aerodynamic jump). Analogicznie jak w pracy (Floroff i Salatino, 2000) przeanalizowano wartości współczynnika momentu stabilizującego. Wartości tego współczynnika wyznaczono wykorzystując metodę numerycznej mechaniki płynów (CFD). Na rysunku 6 przedstawiono wykres współczynników momentu stabilizującego pocisku dla różnych kątów nutacji. Wartość ujemna współczynnika oznacza działanie stabilizujące momentu aerodynamicznego.

Podczas przeprowadzonego badania strzelaniem prędkość początkowa pocisków odpowiadała liczbie Macha $\approx 1,5$. Wartości przedstawione na rysunku 6 wskazują, że dla kątów nutacji w zakresie $(1\div 10)^\circ$ współczynniki momentu stabilizującego mają wartości dodatnie dla liczb Macha z zakresu $1,3\div 1,5$. Dla kąta nutacji 15° wartości współczynnika w całym badanym zakresie są ujemne. Otrzymane wyniki są zgodne z zawartymi w pracy (Floroff i Salatino, 2000). Jednakże dokładny opis zjawiska podrzutu aerodynamicznego zawarty w pracach (McCoy, 1999) oraz (Bundy, 1999) wskazuje, że zjawisko to zachodzi na początkowej części trajektorii w odległości odpowiadającej zaburzeniom początkowym wynikającym z procesu wystrzału lub oddzielania się sabotu. W dalszej części trajektorii położenie pocisku oscyluje w sposób tłumiony wokół ustalonego kierunku lotu. Analiza danych zawartych na rysunkach 2÷5 wskazuje, że pociski zmieniają swój kierunek lotu jeszcze w odległości kilkuset metrów od wylotu lufy. Szczególnie widoczne jest to na rysunku 5, gdzie dla donośności w zakresie $(300\div 500)$ [m] trajektoria strzału nr 3 zakrzywia się w stronę dodatnich wartości odchyłek bocznych, natomiast dla strzałów 2 i 5 odchylenie to nastąpiło w stronę ujemnych wartości. Wyniki te są niezgodne z opisem zjawiska podrzutu aerodynamicznego. W związku z tym należy przeanalizować

The results of repeated firing tests are not considered in the present paper as the parameters of atmosphere are not available. After putting out the responsibility of aerodynamic asymmetry effect for the presented dispersion the attention was turned into an aerodynamic jump effect. Values of the stabilising moment coefficient were studied identically as in (Floroff & Salatino, 2000). The values of this coefficient were determined by using a method of computerised fluids dynamics (CFD). Fig. 6 shows the plots of projectile stabilising moment coefficients for different angles of nutation. Negative value of the coefficient indicates a stabilising action of the aerodynamic moment.

During the firing tests the muzzle velocity of tested projectiles corresponded to Mach number ≈ 1.5 . Values presented in Fig. 6 indicate that for the nutation angles within $(1\div 10)^\circ$ the coefficients of stabilising moment have the positive values for Mach numbers between $1.3\div 1.5$. At the nutation angle of 15° the coefficient values are negative within the whole investigated interval. Received results comply with those included in (Floroff & Salatino, 2000). But a detailed description of the aerodynamic jump effect included in (McCoy, 1999) and (Bundy, 1999) indicates that it occurs at the initial part of trajectory at distances corresponding to initial disturbances caused by the process of firing or separation of the sabot. Within the remaining part of trajectory the position of the projectile is characterised by damped oscillations around a settled flight path. Analysis of data included in Fig. 2÷5 shows that the projectiles still change their flying paths on the ranges of a few hundred metres from the muzzle. It is especially visible in Fig. 5 where for the ranges within $(300\div 500)$ [m] the trajectory of shot No 3 bends towards positive values of lateral deflections whereas for shots 2 and 5 the deflection goes into the negative values. These results are not in line with the description of the aerodynamic jump effect. For this reason it seems sensible to study the described effect (behaviour).

wać dokładniej opisane zjawisko (zachowanie się pocisku na torze lotu).

2. Modelowanie lotu pocisków

Do dalszych analiz wykorzystano model balistyki zewnętrznej o pięciu stopniach swobody, w którym pocisk potraktowano jako bryłę sztywną (Merda, 2019). Pomijając strzał nr 1 (tab. 1) jako posiadający znacznie mniejszą od pozostałych prędkość początkową, postanowiono zamodelować lot pocisków dla strzałów 2, 3, 4 oraz 6 (tab. 1) posiadających skrajne wartości wierzchołkowych oraz odchyłek bocznych. W tym celu zadano, odpowiadające tym pociskom, prędkości początkowe i tak dobierano prędkości kątowe pochylenia i odchylenia pocisku aby otrzymać trajektorie zbieżne z wyznaczonymi eksperymentalnie. Parametry atmosfery były zgodne z wynikami sondowania atmosfery przeprowadzonymi w czasie opisywanego badania strzelaniem. Dodatkowo wyznaczono trajektorię lotu pocisku dla prędkości początkowej odpowiadającej strzałowi 2 (tab. 1) nie posiadającej zaburzeń początkowych. Trajektorią tę oznaczono jako wynik strzału zerowego (trajektorii 0). Na podstawie wyników strzelania ustalono, że kąt odchylenia pomiędzy osią przewodu lufy, a osią anteny radaru wynosi $\approx 1,8^\circ$ i zadano tę wartość w warunkach początkowych. Porównanie rzutów na płaszczyznę pionową ziemską obliczonych trajektorii oraz trajektorii strzałów otrzymanych w trakcie badań eksperymentalnych przedstawione jest na rysunku 7.

Z kolei na rysunku 8 przedstawiony jest rzut tych trajektorii na poziomą płaszczyznę ziemską. W tabeli 2 przedstawione są wartości podstawowych parametrów toru lotu wyznaczone eksperymentalnie i obliczone oraz wartości zadanych zaburzeń początkowych.

Wartości błędów wskazują na dużą zbieżność wyników obliczeń i wyników badań eksperymentalnych. Jednocześnie zależność uzyskanych zmian wierzchołkowych i odchyłek bocznych względem prędkości kątowych pochylenia i odchylenia jest nieliniowa.

Na rysunku 9 przedstawiono zmianę kąta

viour of the projectile on the flying path) in more detailed way.

2. Projectiles Flight Modelling

Following studies employ the model of external ballistics with five degrees of freedom where the projectile is treated as a rigid body (Merda, 2019). Neglecting the shot No 1 (Table 1), which has much lower muzzle velocity than the other ones, it was decided to prepare a model of projectile flight for shots 2, 3, 4 and 6 (Table 1) having the extreme values of top values and lateral deflections. In order to do so the projectiles with corresponding muzzle velocities were attributed with relevant angular velocities of projectile's pitch and yaw to get the same trajectories as received in experiments. The parameters of atmosphere were identical to the results of atmosphere probing during the live firings. Additionally a projectile flight trajectory without initial disturbances was determined for the muzzle velocity corresponding to shot No 2 (Table 1). This trajectory was marked as the result of a No zero shot (trajectory 0). It was established on the basis of firing results that the declination angle between the barrel bore axis and the radar antenna pattern axis is $\approx 1.8^\circ$ and this value was taken to the initial conditions. The comparison of projections onto the globe vertical plane for the calculated and experimental trajectories is shown in Fig. 7.

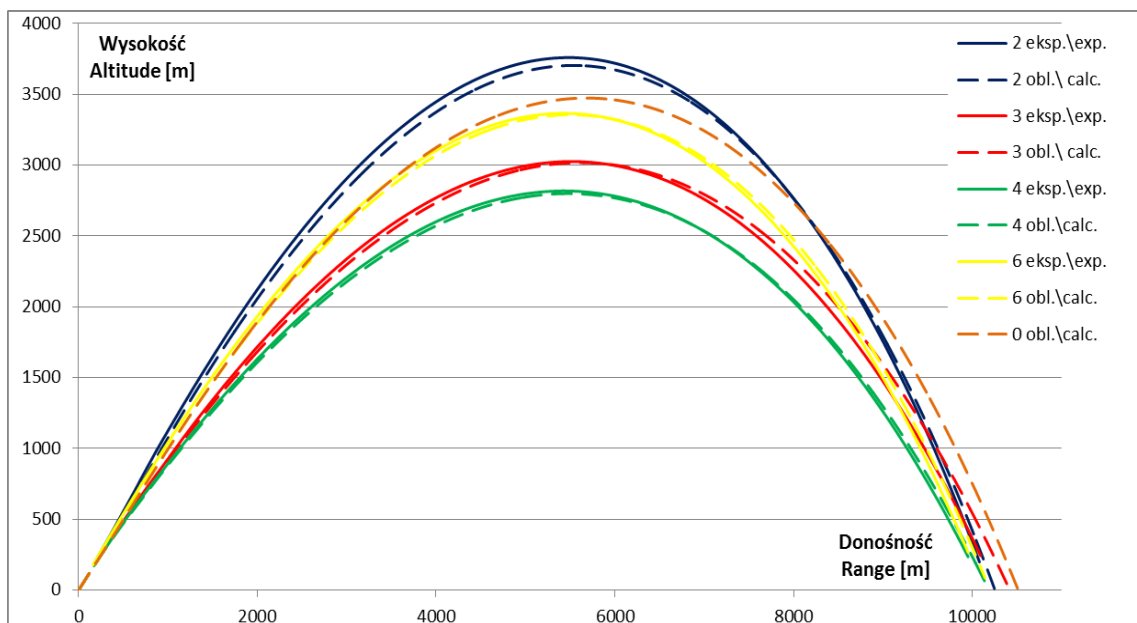
On the other hand the Fig. 8 shows the projection of these trajectories on the globe horizontal plane. Table 2 presents the values of accepted initial disturbances and basic parameters of the flight paths received in experiments and calculations.

The values of errors indicate that there is a great correlation between the results of calculations and experiments. At the same time there is a nonlinear dependence of received changes for top altitudes and lateral deflections on the angular velocities of the pitch and yaw.

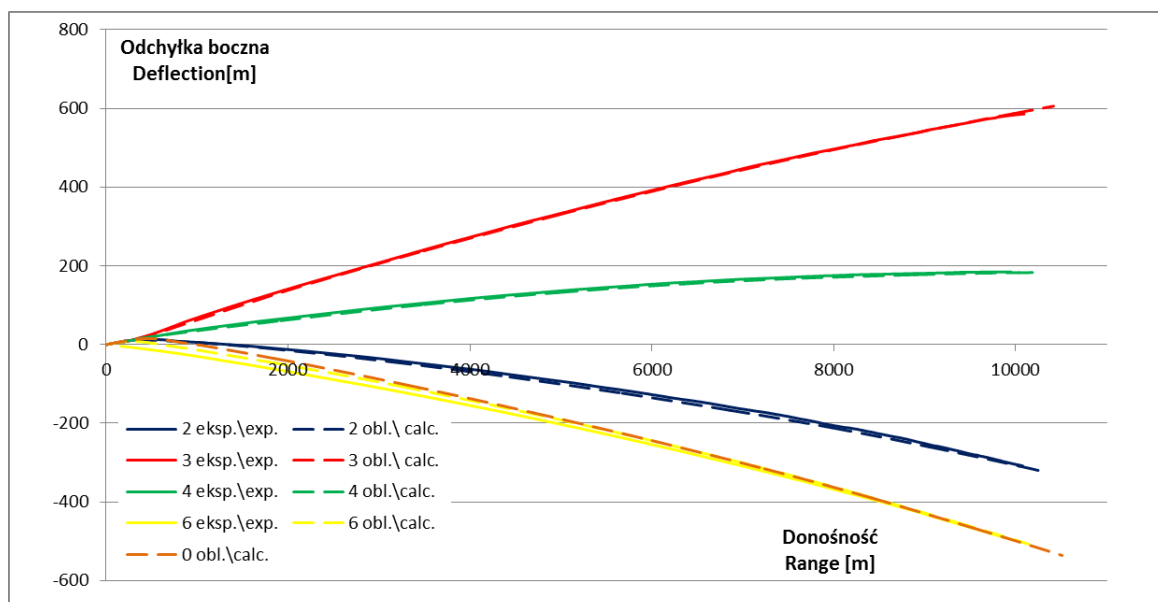
Fig. 9 shows the changes of projectile

nutacji pocisku dla analizowanych strzałów. Wyniki te uzyskano w trakcie obliczeń z uwzględnieniem zmiennych parametrów atmosfery (w tym wiatru), które wpływają na zmianę kąta nutacji w czasie lotu pocisku.

nutation angle for analysed shots. The results were calculated at consideration of changeable parameters of the atmosphere (including wind) affecting the change of the nutation angle at the projectile flight.



Rys. 7. Rzut trajektorii lotu pocisków na pionową płaszczyznę ziemską
Fig. 7. Projection of projectiles complete flight trajectories onto the globe vertical plane

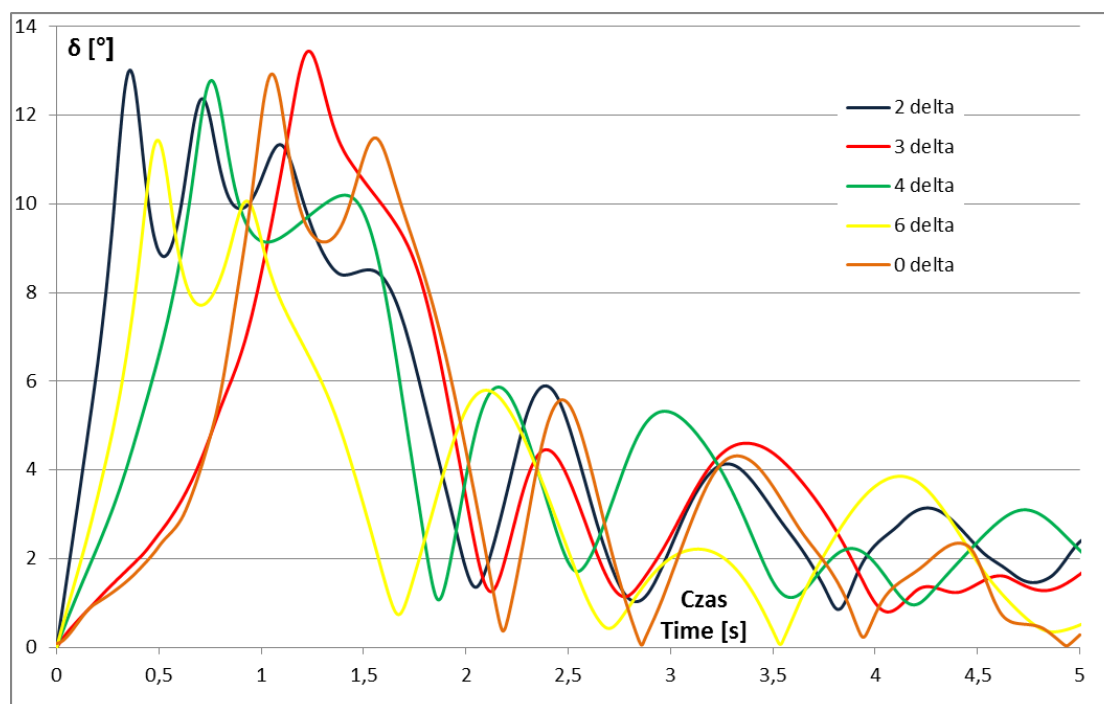


Rys. 8. Rzut trajektorii lotu pocisków na poziomą płaszczyznę ziemską
Fig. 8. Projection of projectiles flight trajectories on the globe horizontal plane

Tabela 2. Porównanie wyników obliczeń i badań eksperymentalnych

Table 2. Comparison of results received from experiments and calculations

Nr strzału / shoot no.	prędkość kątowna pochylenia/itch velocity [rad/s]	prędkość kątowna odchylenia/yaw velocity [rad/s]	Doność /range [m]	wierzchołkowa/ max. altitude [m]	odchyłka boczna/ deflection [m]
2 eksp.\ exp.			10272	3759	-315
2 obl.\ calc.	0,5	0,145	10253	3703	-319
Błąd/ error [%]			-0,19	-1,50	1,25
3 eksp.\ exp.			10230	3025	591
3 obl.\ calc.	-0,095	-0,1	10416	3017	602
Błąd/ error [%]			1,79	-0,27	1,83
4 eksp.\ exp.			10181	2817	184
4 obl.\ calc.	-0,29	-0,45	10186	2799	183
Błąd/ error [%]			0,05	-0,64	-0,55
6 eksp.\ exp.			10205	3365	-507
6 obl.\ calc.	0.15	0,25	10196	3355	-511
Błąd/ error [%]			-0,09	-0,30	0,78
0 obl.\ calc.	0	0	10513	3473	-536



Rys. 9. Przebiegi kąta nutacji wyznaczone metodą symulacji komputerowej

Fig. 9. Graphs of the nutation angle established by the method of computer simulation

Wyniki przedstawione na rysunku 9 wskazują, że kąty nutacji pocisków narastają do wartości 10÷12°.

Results presented in Fig. 9 indicate that the projectiles nutation angles increase to values of 10÷12°.

Można zauważyć, że dla czterech z pięciu trajektorii wykresy mają przynajmniej dwa lokalne maksima kąta nutacji o wartości ponad 10° . Sposób zmiany kąta nutacji dla przedstawionych strzałów różni się wyraźnie od tego, jaki zaobserwowano dla torów, w których wystąpiło zjawisko podrzutu aerodynamicznego. Według prac (McCoy, 1999) oraz (Bundy, 1999) podrzut aerodynamiczny występuje, gdy pociskowi nadane są zaburzenia początkowe kątów i prędkości kątowych pochylenia i odchylenia. Dla strzału 0 nie nadano żadnych zaburzeń początkowych, w związku z tym nie powinna następować zmiana kierunku lotu pocisku po wystrzale. Jednakże wyniki obliczeń wskazują, że charakter zachowania się kąta nutacji i trajektorii lotu pocisku podobny jest do przypadków z zadanymi zaburzeniami początkowymi. W związku z tym należy domniemywać, że otrzymane wyniki są efektem innego zjawiska. Poszukiwania w literaturze przedmiotu opisu innego zjawiska, które mogłoby być przyczyną gwałtownych wzrostów kąta nutacji i zmiany kierunku lotu nie przyniosły rezultatu, dlatego założono, że nie jest ono przedstawione w literaturze.

3. Zjawisko pseudostabilnego lotu

W dalszej części artykułu, terminem znaczny kąt nutacji będzie określony kąt nutacji o wartości większej od 5° . Jako kąt równowagi dynamicznej δ_r określony będzie kąt nutacji, dla którego występuje stan równowagi dynamicznej. Natomiast jako stan równowagi dynamicznej rozumiana będzie sytuacja, w której siły i momenty działające na pocisk będą dążyły do utrzymania wartości kąta δ_r w trakcie lotu (uwzględniając oscylacje wokół wartości tego kąta). W dalszej części pracy zjawisko osiągnięcia stanu równowagi dynamicznej dla znacznego kąta nutacji (które jest przyczyną opisywanego dużego rozrzutu pocisków) zostało nazwane lotem „pseudostabilnym”. Nazwę taką uzasadnia się tym, że w przypadku niesterowanego stabilnego lotu pocisku stabilizowanego aerodynamicznie stan równowagi dynamicznej ma miejsce w przypadkach, kiedy kąt nutacji

It may be noted that for the four of five graphs there are at least two local maximal values of the nutation angle exceeding 10° . The character of changes of the nutation angle for presented shots is visibly different than for the paths where the effect of the aerodynamic jump has occurred. According to (McCoy, 1999) and (Bundy, 1999) the aerodynamic jump takes place when the initial disturbances of angles and angular velocities for the pitch and yaw are enforced on the projectile. The 0 shot has not got any initial disturbances and after firing there should not be any changes of the projectile flying path. But the results of calculations show that the projectile angle of nutation and flight trajectory is similar to the cases with the enforced initial disturbances. It seem reasonable then to maintain that the received results are caused by another effect. The studies of the subject literature have not discovered any suitable effect which could be responsible for rapid increases of the nutation angle and the changes of flight paths, so the conclusion was taken that such effect is not presented in the literature.

3. The Effect of Semi stable Flight

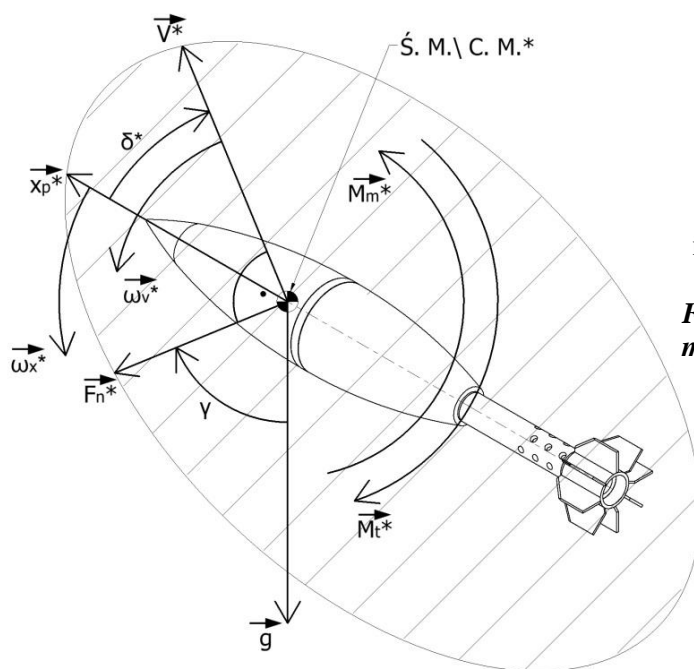
A term for significant nutation angle refers for values greater than 5° . The angle of dynamical equilibrium δ_r is defined as the nutation angle of a dynamical balance. The state of the dynamical equilibrium is understood as a situation when the forces and moments acting against the projectile tend to sustain the value of angle δ_r during the flight (considering fluctuations around the value of this angle). The following parts of the paper describe the effect of reaching the state of dynamical equilibrium for significant angles of nutation (which is the reason of the discussed great dispersion of projectiles) as the “semi-stable” flight. This term is substantiated by the fact that for an uncontrolled stable flight of a projectile that is aerodynamically stabilised the state of dynamical equilibrium takes place when the nutation angle

przyjmuje wartości bliskie 0° . Na podstawie otrzymanych wyników symulacji komputerowej stwierdzono, że w przypadku analizowanego zjawiska równowaga dynamiczna ruchu wokół środka masy pocisku może występować także dla znacznych wartości kątów nutacji (nawet przekraczających 10°), co sugeruje, że nie powinno się traktować tego lotu jako stabilnego. Jednak z uwagi na to, że występuje kąt równowagi dynamicznej δ_r , można przyjąć, że nie jest to lot całkowicie niestabilny.

Na użytek dalszych analiz stosowany będzie układ sił i momentów oraz nazewnictwo przedstawione na rysunku 10. Wielkości znajdujące się na płaszczyźnie kąta nutacji oznaczone są przez *. Płaszczyzna kąta nutacji jest to płaszczyzna wyznaczona przez wektor jednostkowy osi wzdłużnej pocisku \vec{x}_p^* oraz wektor prędkości pocisku względem atmosfery \vec{V}^* .

takes values close to 0° . On the basis of received results of computer simulation it was stated that in the case of the discussed effect the dynamical equilibrium of displacements against the projectile mass centre may also happen for significant values of the nutation angle (exceeding even 10°), what suggests that such flight should not be treated as the stable one. But considering the existence of dynamical equilibrium angle δ_r , it may be accepted that it is not a completely unstable flight.

The system of forces and moments and terminology presented in Fig. 10 will be deployed in later discussion. The parameters placed onto the plane of the nutation angle are marked by *. The plane of the nutation angle is created by the unit vector \vec{x}_p^* of the projectile main axis and by the projectile velocity vector \vec{V}^* against the atmosphere.



Rys. 10. Przyjęty schemat sił i momentów działających na pocisk

Fig. 10. Accepted system of forces and moments acting against the projectile

W prezentowanym układzie sił i momentów uwzględniono: siłę normalną F_n^* wynikającą z kąta nutacji δ^* , moment stabilizujący M_m^* , moment M_t^* tłumiący prędkość kątową pocisku ω_x^* oraz przyspieszenie grawitacyjne \vec{g} .

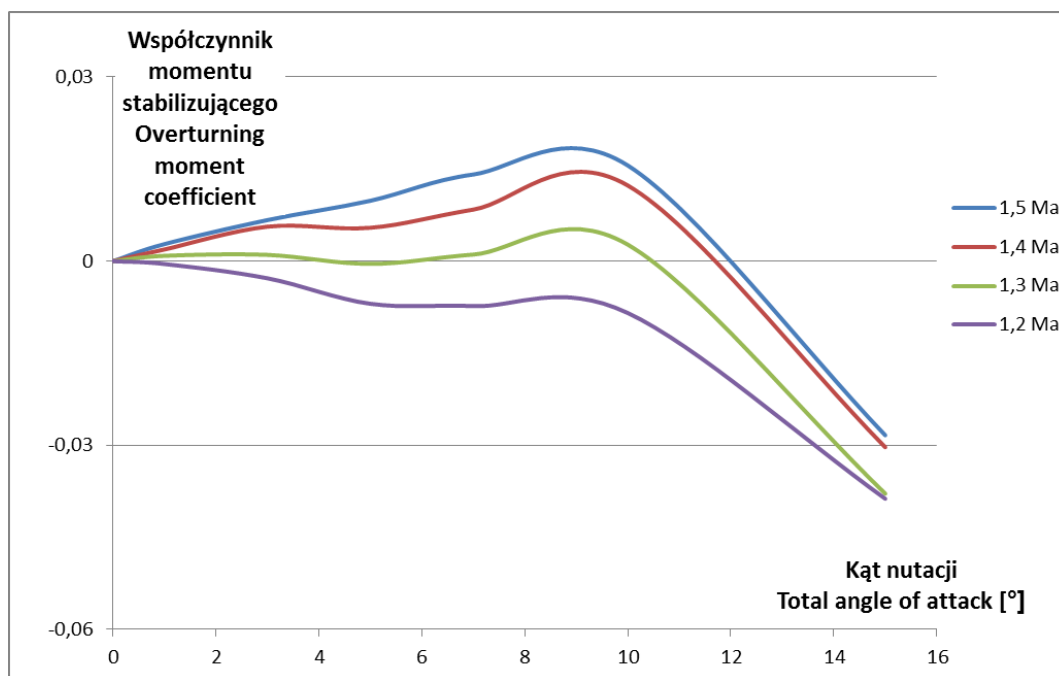
Presented system of forces and moments includes: the normal force F_n^* caused by the nutation angle δ^* , stabilising moment M_m^* , the moment M_t^* damping the projectile angular velocity ω_x^* and the acceleration of gravity \vec{g} .

Pozostałymi wielkościami przedstawionymi na rysunku 10 są: ω_V^* – prędkość kątowa wektora prędkości postępowej, γ – kąt odchylenia płaszczyzny nutacji od wektora przyspieszenia grawitacyjnego, Ś.M\ C.M. – środek masy pocisku. Uwzględnienie siły oporu aerodynamicznego nie jest konieczne do opisu zjawiska lotu pseudostabilnego, gdyż nie wpływa ona na zmianę kierunku zarówno wektora \vec{x}_p^* jak i \vec{V}^* (wpływa wyłącznie na wartość).

Dla badanego pocisku osiągnięcie stanu równowagi dynamicznej znacznego kąta nutacji możliwe jest dzięki zmianie znaku wartości współczynnika momentu stabilizującego z ujemnego dla liczb Macha (w zakresie od 0 do $\approx 1,3$ Ma) na dodatni (w zakresie od $\approx 1,3$ do 1,5 Ma) dla kątów nutacji do ok. 12° . Na rysunku 11 przedstawiono wykres ilustrujący przebiegi współczynników momentu stabilizującego w funkcji kąta nutacji dla wybranych wartości liczb Macha. Wartości te zostały wyznaczone z wykorzystaniem metod numerycznej mechaniki płynów (CFD) (Magier i Merda, 2017).

Remaining parameters presented in Fig. 10 are: ω_V^* – the angular velocity of advanced velocity vector, γ – the deviation angle between the plane of nutation and the gravitation acceleration vector, Ś.M\ C.M. – the projectile mass centre. The aerodynamic drag force is not needed for description of the effect of the semi-stable flight as it doesn't change senses of both \vec{x}_p^* and \vec{V}^* vectors (it only affects the magnitude).

Dynamical equilibrium state at great angles of nutation for the discussed projectile may be reached due to the change of the stabilising moment coefficient from the negative value for Mach numbers (from 0 to ≈ 1.3 Ma) into the positive value (from ≈ 1.3 to 1.5 Ma) at nutation angles up to ca. 12° . Fig. 11 shows the curves of stabilising moment coefficients versus the angle of nutation for selected Mach numbers. These values were determined by using the methods of computerised fluids dynamics (CFD) (Magier & Merda, 2017).



Rys. 11. Wykres zależności współczynnika momentu stabilizującego od kąta nutacji dla wybranych wartości liczb Macha

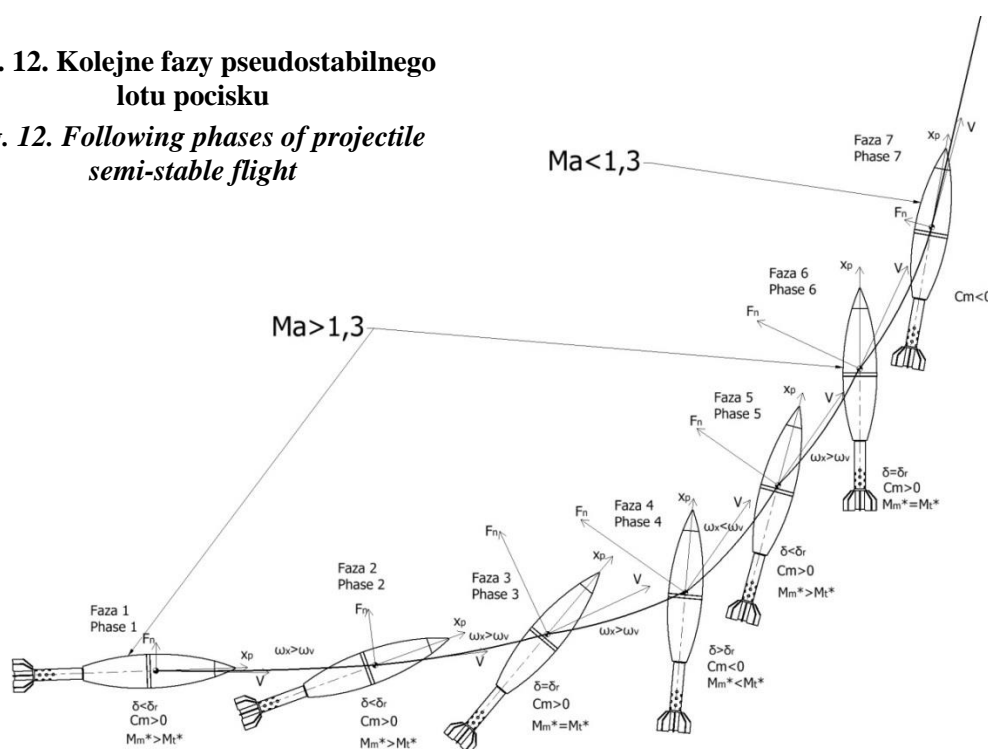
Fig. 11. Dependence of the stabilising moment coefficient on the nutation angle for selected Mach numbers

Dla liczb Macha 1,4 i 1,5 oraz dla zakresu kątów nutacji od 0° do $\approx 12^\circ$, wartości współczynnika momentu stabilizującego osiągają wartości dodatnie, natomiast dla liczby Macha 1,3 dodatnie lub bliskie zeru wartości współczynnika momentu stabilizującego występują dla zakresu kąta nutacji od 0° do $\approx 11^\circ$. Dodatnie wartości współczynnika momentu stabilizującego wskazują na wywracające działanie momentu stabilizującego. W badanym przypadku prędkości początkowa pocisku ≈ 500 m/s odpowiadała liczbie Macha $\approx 1,5$. W chwili wystrzału na pocisk oddziałują zaburzenia początkowe tj. określone wartości początkowych kątów oraz prędkości kątowych pochylenia i odchylenia, które są przyczyną powstania początkowego kąta nutacji pocisku. Kąt nutacji zawarty jest pomiędzy wektorem jednostkowym osi wzdłużnej pocisku \vec{x}_p^* , a wektorem prędkości pocisku względem powietrza \vec{V}^* . W celu uproszczenia opisu zjawiska, analizowane będzie ono jako ruch pocisku na płaszczyźnie kąta nutacji. Przy założeniu wystrzału bez zaburzeń początkowych, kąt nutacji zostanie wywołany przez inne czynniki jak np. wiatr lub krzywiznę toru lotu pocisku wynikającą z przyspieszenia grawitacyjnego.

Values of the stabilising moment coefficient are positive for Mach numbers 1.4 and 1.5 and at nutation angles from 0° to $\approx 12^\circ$ whereas these values become positive or close to zero for Mach number 1.3 and within nutation angles from 0° to $\approx 11^\circ$. Positive values of the stabilising moment coefficient indicate the overturning action of the stabilising moment. In the considered case the projectile muzzle velocity of ≈ 500 m/s corresponds Mach number ≈ 1.5 . At the moment of firing the projectile is subjected to initial disturbances i.e. the specific values of initial angles and angular velocities for the pitch and yaw which generate the initial angle of projectile nutation. The angle of nutation is determined by the unit vector of the projectile main axis \vec{x}_p^* and the projectile velocity vector against the air \vec{V}^* . The phenomenon will be described as the movement of the projectile within the plane of the nutation angle for the simplicity reason. Assuming the lack of initial disturbances at firing the angle of nutation will be caused by other factors such as e.g. the wind or the curvature of the projectile flying path caused by the gravitational acceleration.

Rys. 12. Kolejne fazy pseudostabilnego lotu pocisku

Fig. 12. Following phases of projectile semi-stable flight



W celu lepszego zobrazowania zjawiska lotu pseudostabilnego na rysunku 12 zaznaczono jego kolejne fazy.

Dla fazy pierwszej, gdy kąt nutacji $\delta^* < \delta_r^*$ na pocisk działają momenty $M_m^* > M_t^*$ i wypadkowy moment aerodynamiczny dąży do zwiększenia kąta nutacji. Ponieważ siła normalna F_n^* (zależna od kąta nutacji δ^*) ma niewielką wartość, to $\omega_x^* > \omega_v^*$, co wiąże się ze zwiększaniem się kąta nutacji δ^* . Wraz ze wzrostem kąta nutacji δ^* (faza 2) zaczyna narastać siła normalna F_n^* przez co rośnie wartość ω_v^* a więc i krzywizna toru lotu. Jednocześnie wartość współczynnika C_m osiągnie maksimum, po czym wraz z dalszym wzrostem kąta nutacji δ^* zacznie zmniejszać swoją wartość (rysunek 11). Ponieważ w dalszym ciągu zachodzi zależność, że $\delta^* < \delta_r^*$ to $\omega_x^* > \omega_v^*$, to kąt nutacji δ^* będzie dalej narastał. W fazie 3 kąt nutacji osiąga wartość δ_r^* a $M_m^* = M_t^*$. Na skutek bezwładności pocisku związanej z ω_x^* w fazie 4 kąt nutacji δ^* osiągnie wartości większe od δ_r^* . Wtedy $M_m^* < M_t^*$ (M_m^* może osiągać wartości ujemne) następuje zmiana znaku ω_x^* na ujemną i ω_x^* zaczyna zmniejszać swoją wartość. Ponieważ kąt nutacji δ^* dalej narasta to rośnie również siła normalna F_n^* i ω_v^* . W związku z tym, że ω_x^* zaczyna maleć a ω_v^* dalej narasta, to po pewnym czasie $\omega_x^* < \omega_v^*$ i kąt nutacji δ^* zacznie się zmniejszać. Kiedy ponownie wartość kąta nutacji $\delta^* < \delta_r^*$ (faza 5) to $M_m^* > M_t^*$ i ω_x^* zacznie narastać. Jednocześnie na skutek zmniejszania wartości kąta nutacji δ^* zmniejszą również wartości F_n^* oraz ω_v^* . Po pewnym czasie ponownie nastąpi, że $\omega_x^* > \omega_v^*$ i kąt nutacji δ^* zacznie rosnać osiągając wartość δ_r^* (faza 6). Dopóki prędkość pocisku nie spadnie poniżej prędkości, dla której zachodzi zjawisko pseudostabilnego lotu fazy 3 i 6 są sobie tożsame i ciąg faz 3,4,5 będzie zachodził cyklicznie. Kiedy prędkość pocisku zmniejszy się do wartości odpowiadającej liczbie Macha, dla której dla całego zakresu kątów nutacji δ^* wartość współczynnika momentu stabilizującego C_m będzie ujemna (faza 7), pocisk zacznie się stabilizować prawidłowo i kąt równowagi dynamicznej będzie miał wartości $\delta_r^* \approx 0^\circ$. Należy mieć na uwadze, że w czasie stabili-

In order to illustrate better the effect of the semi-stable flight its consecutive phases are shown in Fig. 12.

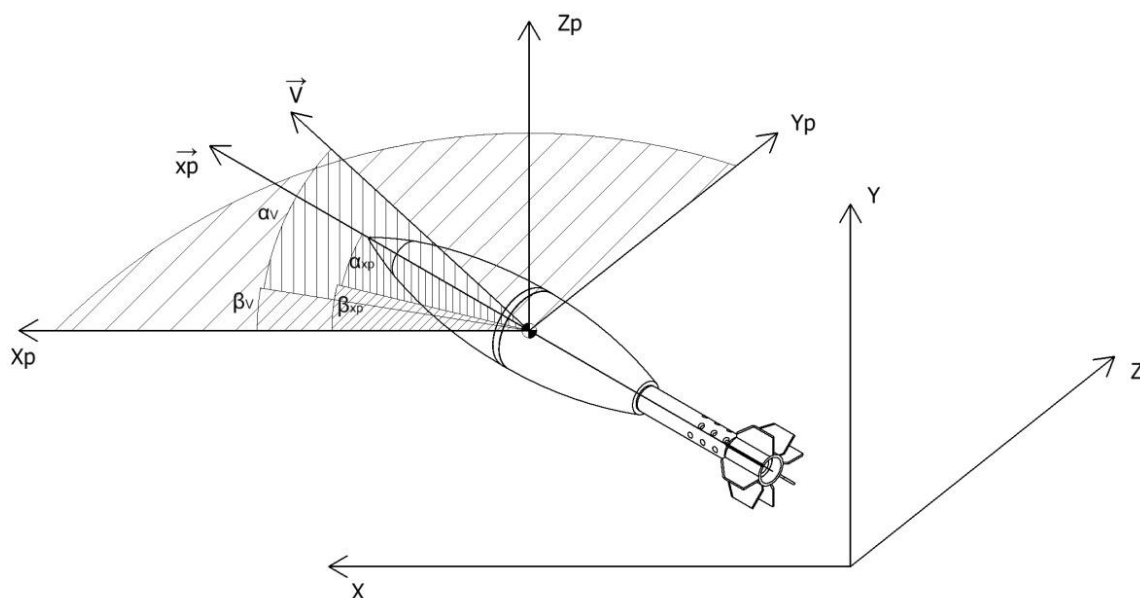
For the first phase the nutation angles $\delta^* < \delta_r^*$ and moments $M_m^* > M_t^*$ act to the projectile to increase the nutation angle by resultant aerodynamical moment. As the normal force F_n^* (dependable on the nutation angle δ^*) is insignificant, then $\omega_x^* > \omega_v^*$ increases the nutation angle δ^* . With the increase of the nutation angle δ^* (phase 2) the normal force F_n^* grows both with ω_v^* and the path curvature. At the same time the coefficient C_m gains a maximum to drop with the further increase of the nutation angle δ^* (Fig. 11). As the dependence $\delta^* < \delta_r^*$ to $\omega_x^* > \omega_v^*$ is still in force the nutation angle δ^* will increase. In the 3-rd phase the nutation angle gains the value δ_r^* and $M_m^* = M_t^*$. Due to the projectile inertia connected with ω_x^* the nutation angle δ^* gets in the 4-th phase much greater values than δ_r^* . Then $M_m^* < M_t^*$ (M_m^* may be negative) the sign of ω_x^* changes on the negative and ω_x^* starts to decrease. As the nutation angle δ^* still increases then the normal force F_n^* and ω_v^* grow as well. The decrease of ω_x^* and continued growth of ω_v^* after some time give $\omega_x^* < \omega_v^*$ and the nutation angle δ^* starts to fall. When the value of the nutation angle is again $\delta^* < \delta_r^*$ (phase 5), then $M_m^* > M_t^*$, and ω_x^* starts to increase. Simultaneously the decrease of the nutation angle δ^* also reduces values F_n^* and ω_v^* . After a certain time it is again that $\omega_x^* > \omega_v^*$ and the nutation angle δ^* starts to grow to value of δ_r^* (phase 6). Phases 3 and 6 are equivalent and the series of phases 3,4,5 repeats until the projectile velocity drops below the semi-stable flight effect velocity. When the projectile velocity is reduced to the level of Mach number providing the negative value of the stabilising moment coefficient C_m (phase 7) for the whole interwall of the nutation angles δ^* , then the projectile starts to stabilise properly and the dynamical equilibrium angle is $\delta_r^* \approx 0^\circ$. It has to be noted that during the projectile stabilisation the nutation

zowania się pocisku kąt nutacji δ^* będzie oscylował w sposób tłumiony. Na rysunku 13 przedstawione jest ułożenie kątów pochylenia α oraz odchylenia β wektorów \vec{x}_p (α_{xp}, β_{xp}) oraz \vec{V} (α_v, β_v), gdzie układ $X_p Y_p Z_p$ jest układem związanym z ziemią XYZ o środku w środku masy pocisku. Natomiast na rysunkach 14 oraz 15 przedstawione są wykresy zmian kątów $\alpha_{xp}, \beta_{xp}, \alpha_v, \beta_v$ dla obliczonych trajektorii w zakresie liczb Macha $0,8 \div 1,55$.

Na rysunkach 14 oraz 15 wyraźnie widoczny jest wpływ zmiany kątów pochylenia i odchylenia osi podłużnej pocisku (α_{xp}, β_{xp}) na zmianę kątów pochylenia i odchylenia jego wektora prędkości (α_v, β_v). Należy mieć na uwadze, że na rysunkach tych przedstawiona jest prędkość pocisku względem powietrza, przez co wyniki przedstawione na wykresach zaburzone są przez wpływ zmiennego wiatru. Szczególnie widoczne jest to dla rysunku 14 dla liczb Macha z zakresu $0,8 \div 1$, gdzie silny wiatr poprzeczny odchyła osie podłużne pocisków o kąt β_{xp} w kierunku przeciwnym niż β_v .

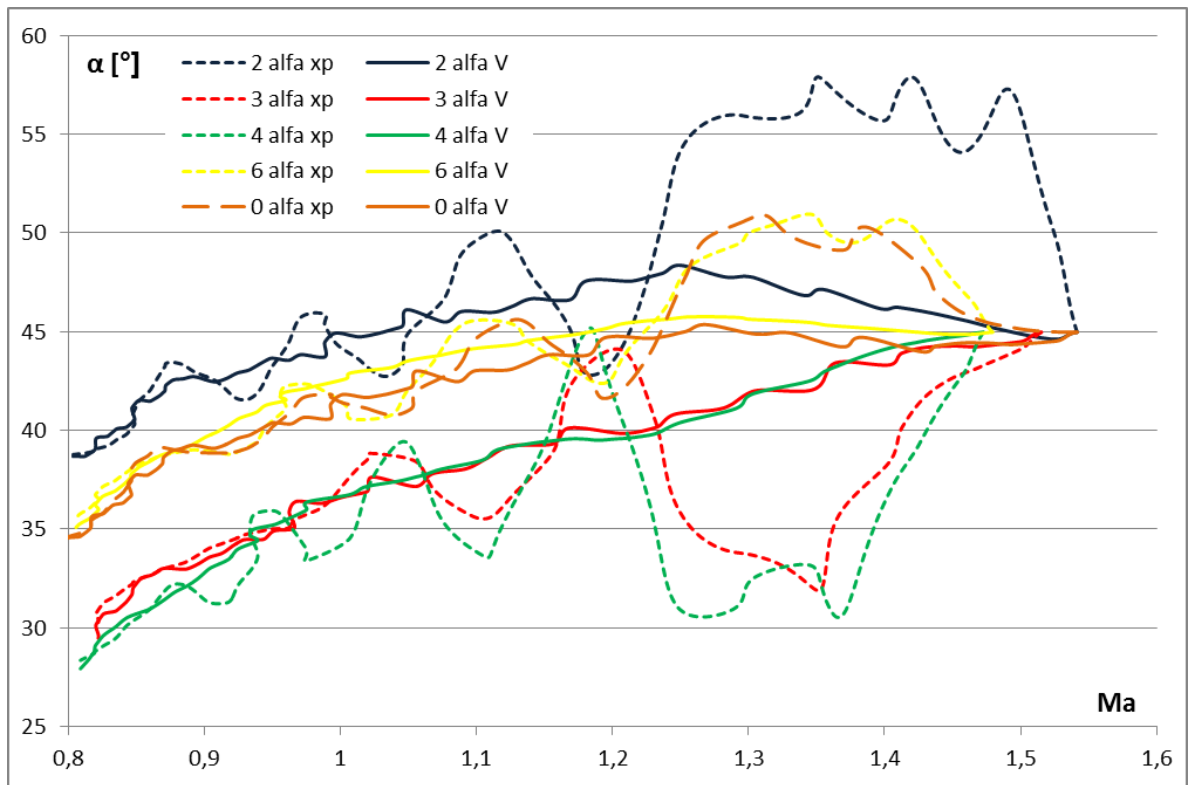
angle oscillations are damped. Fig. 13 shows the setting of angles for the pitch α and the yaw β for vectors \vec{x}_p (α_{xp}, β_{xp}) and \vec{V} (α_v, β_v), where the system $X_p Y_p Z_p$ is the system connected with the earth XYZ originating in the projectile mass centre. Figures 14 and 15 show the graphs of changes for angles $\alpha_{xp}, \beta_{xp}, \alpha_v, \beta_v$ of calculated trajectories for Mach numbers $0.8 \div 1.55$.

The influence of changes of the pitch and yaw angles of the main projectile axis (α_{xp}, β_{xp}) on the changes of the pitch and yaw angles for the velocity vector (α_v, β_v) is clearly visible in Fig. 14 and 15. It has to be noted that these figures illustrate the velocity of projectile against the air and then the results presented on the plots are disturbed by the impact of changeable wind. It is especially visible in Fig. 14 for Mach numbers on the range of $0.8 \div 1$ where the strong lateral wind deflects the projectile main axes by the angle β_{xp} in opposite direction to β_v .

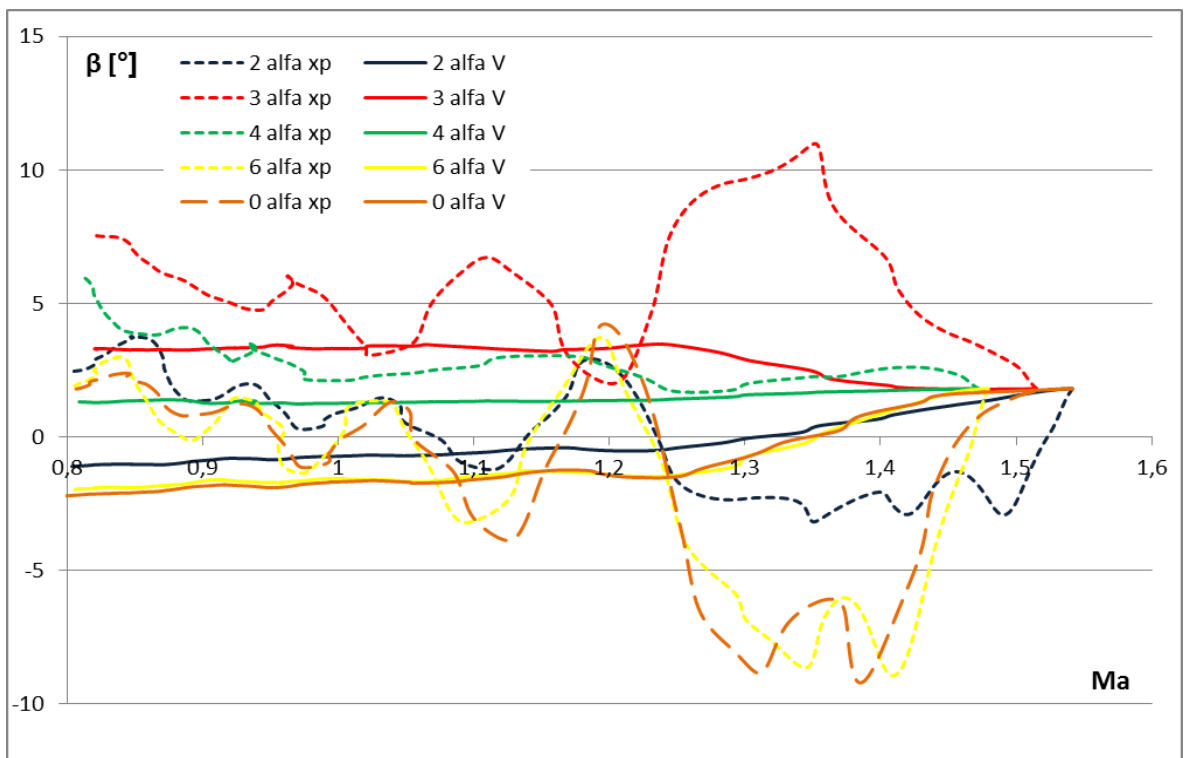


Rys. 13. Ułożenie kątów $\alpha_{xp}, \beta_{xp}, \alpha_v, \beta_v$ w przestrzeni

Fig. 13. Spatial setting of angles $\alpha_{xp}, \beta_{xp}, \alpha_v, \beta_v$



Rys. 14. Zmiana kąta pochylenia w funkcji liczby Macha
Fig. 14. Change of the pitch angle versus Mach number



Rys. 15. Zmiana kąta odchylenia w funkcji liczby Macha
Fig. 15. Change of the yaw angle versus Mach number

Dla liczb Macha pomiędzy 1,2 a 1,3 następuje szybkie zmniejszanie się różnic wartości pomiędzy kątami α_{xp} i α_V oraz β_{xp} i β_V . Jest to spowodowane zaniknięciem wartości dodatnich współczynnika C_m dla liczb Macha poniżej 1,3. W dalszej części lotu pocisku następują tłumione oscylacje wartości kąta α_{xp} wokół wartości α_V . W przypadku kątów β_{xp} i β_V wiatr zaburza zbieranie się tych wartości. Mimo braku zaburzeń początkowych dla teoretycznej trajektorii strzału nr 0 również wystąpiły oscylacje wartości kątów α_{xp} i β_{xp} widoczne dla liczb Macha 1,3. Wahania te sugerują istnienie kąta nutacji równowagi δ_r wokół którego oscylują. W dalszej części pracy podjęto próbę wyznaczenia wartości tego kąta.

4. Wyznaczanie kąta nutacji równowagi

Dla $\delta = \delta_r$ zachodzi zależność $M_m^* = M_t^*$, dlatego określona zostanie zależność do wyznaczenia wartości współczynnika momentu stabilizującego C_{mr} , dla którego nastąpi stan równowagi dynamicznej. Następnie na tej podstawie zostanie określony kąt δ_r . W pierwszej kolejności należy określić zależności na siły i momenty mające wpływ na zjawisko pseudostabilnego lotu pocisku.

Wartość siły normalnej może być wyznaczona ze wzoru:

$$F_n^* = \frac{\rho V^{*2} S C_y}{2} \quad (1)$$

gdzie: ρ – gęstość powietrza, S – powierzchnia charakterystyczna pocisku (pole powierzchni przekroju poprzecznego o największej średnicy), C_y – współczynnik siły normalnej.

Moment stabilizujący i moment tłumiący prędkość kątową wokół osi poprzecznej pocisku opisane są odpowiednio wzorami:

$$M_m^* = \frac{\rho V^{*2} S C_m}{2} \quad (2)$$

gdzie: C_m – współczynnik momentu stabilizującego.

For Mach numbers between 1.2 and 1.3 differences between angles α_{xp} and α_V , and β_{xp} and β_V are reduced rapidly. It is caused by disappearance of positive values of C_m coefficient for Mach numbers below 1.3. Damped oscillations of the angle α_{xp} around the value α_V occur at the further part of projectile's flight. In the case of angles β_{xp} and β_V the wind disturbs the nearing of these values. Even if initial disturbances are not present in theoretical trajectory of No 0 shot the oscillations of angles α_{xp} and β_{xp} also exist for Mach number 1.3. These oscillations suggest a presence of equilibrium nutation angle δ_r around which they oscillate. The paper tries to identify this angle later.

4. Identification of Equilibrium Nutation Angle

For $\delta = \delta_r$ there is relation $M_m^* = M_t^*$, and for this reason a dependence will be found to determine the stabilising moment coefficient C_{mr} , which provides the state of dynamical balance. Basing on this, the angle δ_r will be determined next. First the dependencies for forces and moments affecting the effect of projectile semi-stable flight have to be established.

The value of normal force may be determined from formula:

where: ρ – air density, S – projectile specific cross-section (crosswise section area for the biggest diameter), C_y – coefficient of the normal force.

The stabilising moment and the moment damping the angular velocity around the projectile crosswise axis are described respectively by relations:

where: C_m – the stabilising moment coefficient

$$M_t^* = \frac{\rho V^{*2} S C_t}{2} \quad (3)$$

gdzie: C_t – współczynnik momentu tłumiącego.

W celu uproszczenia można współczynnik C_t przedstawić w postaci iloczynu współczynnika uśrednionego C_{tu} oraz prędkości kątowej pocisku ω_x^* :

where: C_t – coefficient of damping moment.

The coefficient C_t may be presented in a simpler way as a product of the averaged coefficient C_{tu} and the projectile angular velocity ω_x^* :

$$C_t = C_{tu} \cdot \omega_x^* \quad (4)$$

Dla stanu równowagi dynamicznej występują tłumione oscylacje wartości kąta nutacji δ^* wokół δ_r^* . Przy dostatecznie długim niezaburzonym locie na skutek tłumienia wartość $\delta^* \cong \delta_r^*$. W związku z tym, że kąt nutacji δ^* zawarty jest pomiędzy wektorem osi podłużnej pocisku \vec{x}_p^* a wektorem prędkości pocisku względem pocisku \vec{V}^* oraz $\delta^* = 0$ to $\omega_x^* \cong \omega_V^*$. Dlatego można założyć, że:

At the state of dynamical balance there are damped oscillations of the nutation angle δ^* around δ_r^* . At sufficiently long and undisturbed flight the value $\delta^* \cong \delta_r^*$ due to the damping. As the nutation angle δ^* lies between the projectile main axis vector \vec{x}_p^* and the projectile velocity vector \vec{V}^* , and $\delta^* = 0$ then $\omega_x^* \cong \omega_V^*$. It may be assumed then, that:

$$C_t \cong C_{tu} \cdot \omega_V^* \quad (5)$$

Do wyznaczenia ω_V^* można wykorzystać wzór na częstość kołową ruchu po okręgu:

Formula of circular frequency for circular motion may be used to determine ω_V^* :

$$\omega_V^* = \frac{V_z}{r} \quad (6)$$

gdzie: V_z – prędkość pocisku względem Ziemi, r – promień krzywizny ruchu kołowego. Wykorzystując równanie na wartość przyspieszenia dośrodkowego a_d :

where: V_z – projectile's velocity against earth, r – radius of curvature for circular motion. Using the equation for the value of centripetal acceleration a_d :

$$a_d = \frac{V_z^2}{r} \quad (7)$$

oraz mając na uwadze, że:

and accounting that:

$$a_d = \frac{F_n^*}{m} \quad (8)$$

gdzie: m – masa pocisku. Otrzymuje się zależność:

where: m – mass of projectile. The relation is received:

$$\frac{F_n^*}{m} = \frac{V_z^2}{r} \quad (9)$$

Podstawiając (1) do (9) po przekształceniu otrzymuje się:

Substitution of (1) to (9) gives after transformation:

$$r = \frac{V_z^2 2m}{\rho V^{*2} S C_y} \quad (10)$$

Po podstawieniu (10) do (6) otrzymuje się wzór na ω_V^* :

Substitution of (10) to (6) gives the formula for ω_V^* :

$$\omega_V^* = \frac{\rho V^{*2} S C_y}{2m V_z} \quad (11)$$

Podstawiając (11) oraz (4) do (3) otrzymuje się:

Substitution of (11) and (4) to (3) gives:

$$M_t^* = \frac{\rho^2 V^{*4} S^2 C_{tu} C_y}{4V_z m} \quad (12)$$

Pamiętając, że dla δ_r $M_m^* = M_t^*$:

Keeping in mind that for δ_r $M_m^* = M_t^*$:

$$\frac{\rho V^{*2} S C_m}{2} = \frac{\rho^2 V^{*4} S^2 C_{tu} C_y}{4V_z m} \quad (13)$$

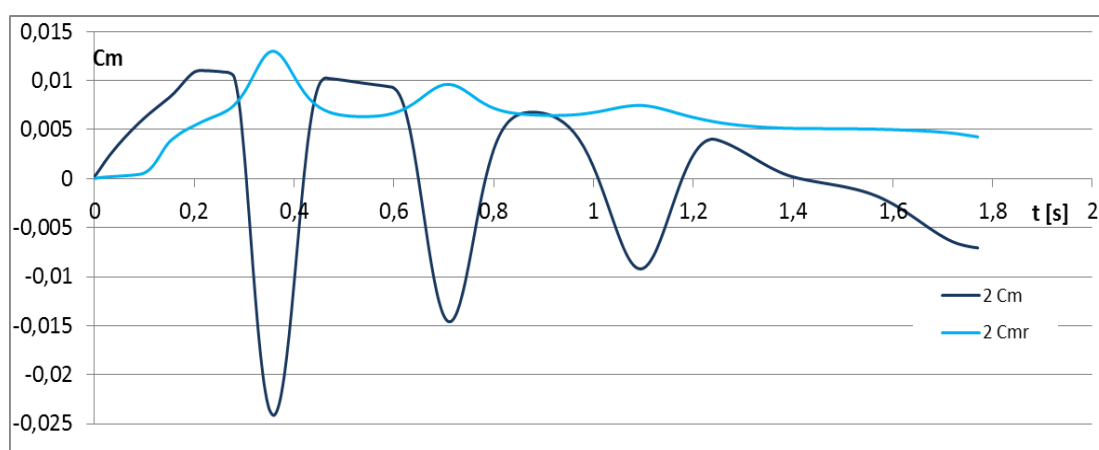
Skąd otrzymuje się wzór na współczynnik momentu stabilizującego równowagi C_{mr} :

Hence a formula for the equilibrium stabilising moment coefficient C_{mr} is received:

$$C_{mr} = \frac{\rho V^{*2} S C_y C_{tu}}{2V_z m} \quad (14)$$

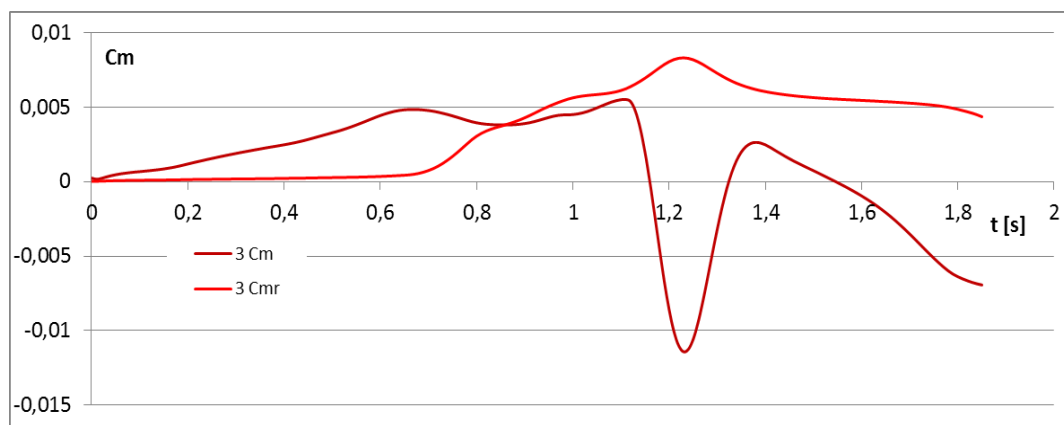
Jeśli znajdzie równość $C_{mr} = C_m$ to $\delta = \delta_r$. Na rysunkach 16÷20 przedstawiono wykresy współczynników C_{mr} i C_m w funkcji czasu lotu dla kolejnych obliczanych trajektorii. Przecięcie się tych wykresów wskazuje, że $\delta = \delta_r$. Natomiast w tabeli 3 przedstawiono czas, liczbę Macha i wartość kąta nutacji dla kolejnych przecięć wykresów wartości C_{mr} i C_m .

If the equality $C_{mr} = C_m$ occurs then $\delta = \delta_r$. Plots of coefficients C_{mr} and C_m versus the time are presented in Fig. 16÷20 for consecutive calculated trajectories. The crossing of these plots indicates that $\delta = \delta_r$. The table 3 presents the time, Mach number and the value of nutation angle for the next crosses of plots C_{mr} and C_m .

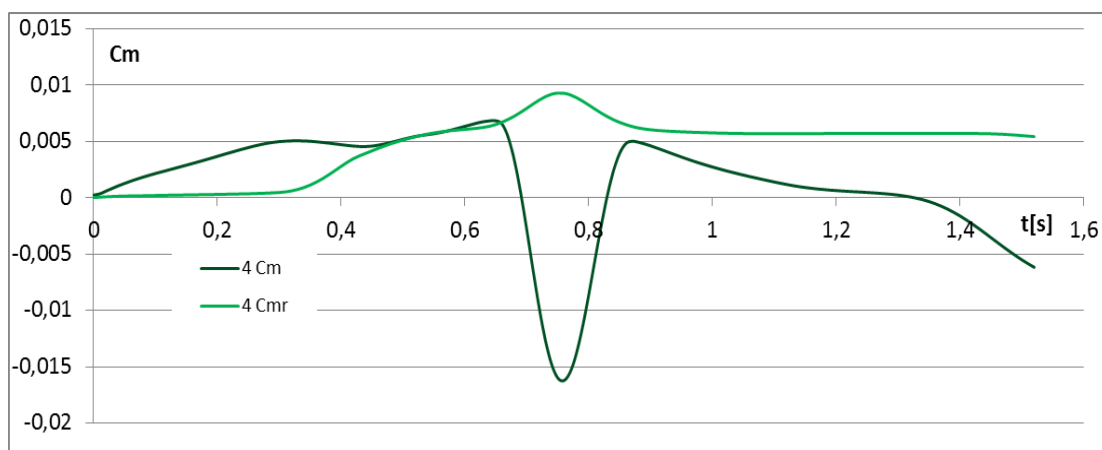


Rys. 16. Porównanie wartości współczynników C_{mr} i C_m dla strzału 2

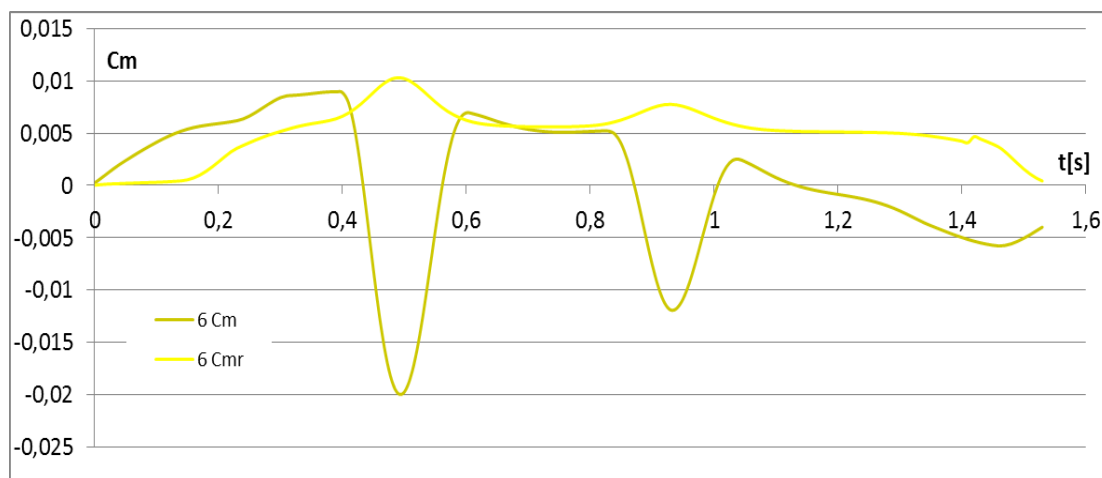
Fig. 16. Comparison of coefficients values C_{mr} and C_m for shot No 2



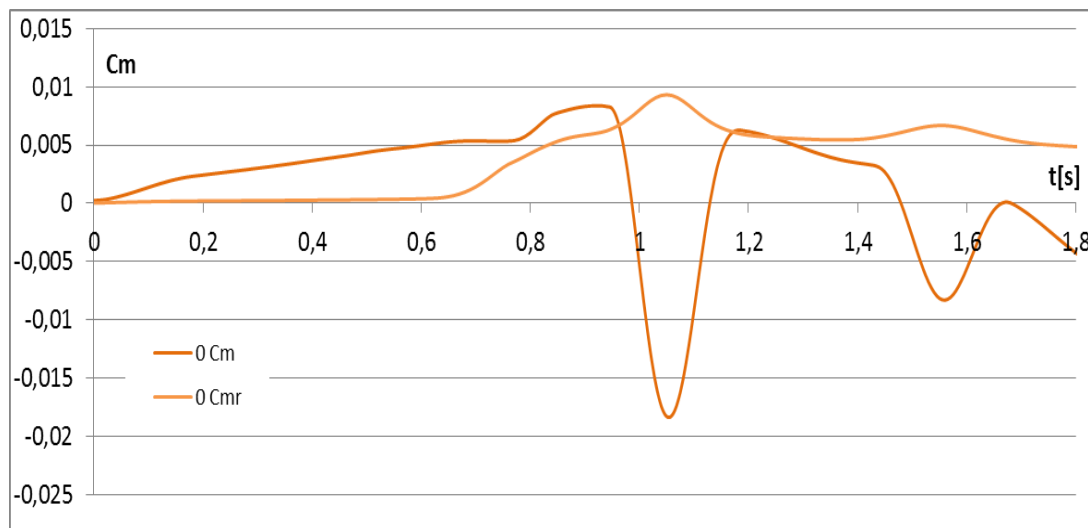
Rys. 17. Porównanie wartości współczynników C_{mr} i C_m dla strzału 3
Fig. 17. Comparison of coefficients values C_{mr} and C_m for shot No 3



Rys. 18. Porównanie wartości współczynników C_{mr} i C_m dla strzału 4
Fig. 18. Comparison of coefficients values C_{mr} and C_m for shot No 4



Rys. 19. Porównanie wartości współczynników C_{mr} i C_m dla strzału 6
Fig. 19. Comparison of coefficients values C_{mr} and C_m for shot No 6



Rys. 20. Porównanie wartości współczynników C_{mr} i C_m dla strzału 0
Fig. 20. Comparison of coefficients values C_{mr} and C_m for shot No 0

Tab. 3. Zestawienie wartości kąta δ_r na podstawie porównania współczynników C_{mr} i C_m
Tab. 3. Values of δ_r angle based on comparison of coefficients C_{mr} and C_m

Nr strza- tu/shoot no.	Nr przecięcia/ no. of cross	czas przecięcia/ time of cross	liczba Macha/ Mach no.	kąt nutacji/ total angle of attack [°]
2	1	0,285	1,51	10,26
	2	0,44	1,47	10,31
	3	0,62	1,44	10,40
	4	0,85	1,40	10,06
	5	0,92	1,39	9,93
3	1	0,86	1,41	6,10
4	1	0,53	1,41	7,15
	2	0,57	1,40	7,97
	3	0,66	1,38	10,18
6	1	0,415	1,43	9,30
	2	0,59	1,39	9,03
	3	0,68	1,38	7,76
0	1	0,965	1,41	10,58
	2	1,18	1,37	10,04
	3	1,24	1,37	9,35

Przedstawione wyżej przykładowe wyniki obliczeń wskazują, że wartość kąta nutacji równowagi δ_r jest zmienna. Wartości kąta nutacji równowagi δ_r mieszczą się w zakresie ($6^\circ \div 10,6^\circ$). Zależy ona od parametrów lotu pocisku (w tym i początkowych), jego charakterystyk aerodynamicznych oraz parametrów atmosfery. Na rysunkach 18 oraz 19

Exemplary results of calculations presented above indicate that the nutation angle at equilibrium δ_r is changeable. Values of nutation angle δ_r for the equilibrium are in range ($6.0^\circ \div 10.6^\circ$). It depends on flight parameters (also initial ones) of the projectile, its aerodynamical characteristics and parameters of atmosphere. Fig. 18 and 19

można zauważyć, że wartości C_{mr} i C_m były bardzo zbliżone do siebie przez ok. 0,2 s. Oznacza to, że pociski osiągały (lub były bardzo blisko) stan równowagi pomimo dużych zmian kąta nutacji w tym czasie. Przecięcia się wykresów na rysunkach 16-20 następowały dla wartości współczynnika C_{mr} i C_m w przedziale 0,004-0,008 jednakże najczęściej dla wartości powyżej 0,005. Odpowiadało to zarówno wartości kątów nutacji mniejszych niż kąt, dla którego występowało maksimum wartości współczynnika C_m jak i większych. Dla otrzymanego zakresu kątów równowagi dynamicznej, wartości współczynnika siły normalnej C_y są zbliżone, a nawet większe od wartości współczynnika oporu czołowego C_x pocisku. W związku z tym, wpływ siły normalnej na tor lotu pocisku będzie wyraźny, co będzie skutkować dużym rozrzutem badanych pocisków. Widoczna jest również duża nieliniowa zmienność parametrów lotu i stanu równowagi dynamicznej pocisków w zależności od parametrów początkowych lotu.

5. Wnioski

Przedstawione w niniejszym artykule zjawisko pseudostabilnego lotu pocisku jest główną przyczyną dużego rozrzutu analizowanych pocisków. Zjawisko to różni się znacznie od zjawiska podrzutu aerodynamicznego, choć często może być z nim mylone. Główną różnicę między tymi zjawiskami stanowi przyczyna ich występowania. Dla pseudostabilnego lotu są to dodatnie wartości współczynnika momentu stabilizującego dla zakresu kątów nutacji od 0° do 12° (dla przedstawionego powyżej pocisku) w zakresie liczb Macha odpowiadającym prędkościom bliskim prędkości początkowej pocisku. Przyczyną podrzutu aerodynamicznego są zaburzenia początkowe nadawane pociskowi. Pseudostabilny lot pocisku może wystąpić w warunkach, kiedy takie zaburzenia nie będą na pocisk oddziaływać. Na skutek zjawiska pseudostabilnego lotu, pocisk przez pewien czas (dla badanych przypadków do ok. 2 s) może lecieć z kątami nutacji przekraczającymi 10° . Natomiast,

show that values C_{mr} and C_m were quite close to each other for ca. 0.2 s. It means that projectiles reached (almost reached) a state of equilibrium despite large changes of nutation angles at that time. Crosses of plots in Fig. 16-20 occurred for the values of coefficients C_{mr} and C_m within 0.004-0.008 but most often for values above 0.005. It corresponded both to higher and lower values of the nutation angle than the angle for which a maximum of C_m coefficient has occurred. For the received range of the dynamic equilibrium angles the values of the normal force coefficient C_y are similar to or even greater than the values of the projectile frontal drag coefficient C_x . In consequence the impact of the normal force on the projectile flight path will be significant and the same will be the dispersion of projectiles. Moreover a large level of nonlinear changes for the flight parameters and for the state of projectiles dynamical equilibrium, depending on the initial flight parameters, is visible.

5. Conclusions

The paper discusses large dispersion of projectiles caused by the effect of their semi-stable flight. This effect is significantly different than the effect of aerodynamic jump although they can be often mistaken. The main difference between these effects is the reasons of their occurrence. For the semi-stable flight they are the positive values of the stabilising moment coefficient for nutation angles from 0° to 12° (for presented projectile) and for the Mach numbers corresponding to velocities close to projectile muzzle velocity. The aerodynamic jump is caused by initial disturbances given to the projectile. The aerodynamic jump is caused by initial disturbances inflicted to the projectile. Projectile's semi-stable flight may happen in conditions when such disturbances are not acting to the projectile. The effect of the semi-stable flight may cause that the projectile can fly for some time (in investigated cases up to ca. 2 s) at nutation angles

gdy prędkość pocisku spadnie do wartości, dla której współczynniki momentu stabilizującego mają wartości mniejsze od 0 dla całego zakresu kąta nutacji, pocisk będzie stabilizował się prawidłowo. W przeciwieństwie do lotu niestabilnego istnieje pewien stan równowagi dynamicznej, do którego pocisk będzie dążył pomimo, że stan ten może występować dla kątów nutacji równowagi przekraczających 10° . Dla takich kątów nutacji siła normalna ma wartość zbliżoną do siły oporu czołowego i w znacznym stopniu wpływa na trajektorię lotu pocisku powodując wzrost jego rozrzutu. Kąt nutacji równowagi dynamicznej jest zmienny i zależy od wielu czynników. Analizując wyłącznie zmiany wartości współczynnika momentu stabilizującego C_m (opisywanego pocisku) kąt równowagi dynamicznej powinien występować dla kąta nutacji dla którego $C_m(\delta)=0$. W takim przypadku wzrost kąta nutacji powodowałby osiągnięcie ujemnych wartości współczynnika C_m zapewniając stabilizację i zmniejszenie wartości kąta nutacji. Natomiast spadek wartości kąta nutacji powodowałby osiągnięcie dodatnich wartości współczynnika C_m przez co moment aerodynamiczny działałby wywracająco i dążył do zwiększenia kąta nutacji. Jednakże dokładna analiza przedstawionego zjawiska wskazuje duży wpływ momentu tłumiącego ruch obrotowy pocisku wokół jego osi poprzecznej oraz siły normalnej na wartość kąta nutacji równowagi dynamicznej. Otrzymane wartości tego kąta zawierają się w przedziale $6^\circ \div 10,6^\circ$ podczas gdy dla tego zakresu prędkości współczynnik C_m osiąga wartości zerowe dla $\delta \approx 12^\circ$. Przedstawione w pracy równanie na współczynnik momentu stabilizującego równowagi pozwala analizować zmianę i wyznaczać kąt nutacji równowagi dla różnych parametrów lotu. Wykorzystanie modelu lotu pocisku o 5 stopniach swobody pozwoliło w łatwy sposób oraz z wystarczającą dla praktyki artyleryjskiej dokładnością wyznaczać trajektorie lotu tych pocisków z uwzględnieniem różnych zaburzeń początkowych.

exceeding 10° . Nonetheless when the projectile's velocity drops to the value for which the stabilising moment coefficients take the values below 0 within the whole range of the nutation angles, then the projectile gets the proper stabilisation. In opposition to the unstable flight there is a certain state of dynamical equilibrium to which the projectile keeps going despite that this state may occur for the equilibrium nutation angles exceeding 10° . For such angles of nutation the normal force has the magnitude approaching the frontal drag force and affects significantly the projectile flight trajectory causing its dispersion. The nutation angle of dynamical equilibrium is changeable and depends on many factors. Analysing exclusively the changes of the stabilising moment coefficient C_m (of discussed projectile), the angle of dynamical equilibrium has to occur for the nutation angle for which $C_m(\delta)=0$. In such case the increase of the nutation angle would provide the negative values of C_m coefficient securing the stabilisation and the decrease of the nutation angle. On the other hand the fall of the nutation angle value would provide positive values of C_m coefficient and the aerodynamic moment would act to overturn the projectile and to increase the nutation angle. Accurate analysis of presented effect shows a great impact of a moment damping the rotation of the projectile around its crosswise axis and of the normal force into the dynamic equilibrium nutation angle. Received values of this angle are within $6.0^\circ \div 10.6^\circ$ whereas for this interwall of velocities the coefficient C_m takes the value of zero for $\delta \approx 12^\circ$. Presented equation for the equilibrium stabilising moment coefficient can be used to analyse the changes and to determine the equilibrium nutation angle for different flight parameters. The projectile flight model with five degrees of freedom describes the flight trajectory with sufficient accuracy for artillery practice while accounting different initial disturbances.

Literatura / Literature

- Bundy, M. (1999). *The Regional Nature of Aerodynamic Jump*. Aberdeen: Army Research Laboratory.
- Floroff, S. G. & Salatino, B. L. (2000). *120 mm Ammunition Feasibility Assessment For Light Artillery*, Technical Report, U.S. Army Armament Research Development And Engineering Center.
- Gacek, J. (1999a). *Balistyka zewnętrzna. Część I. Modelowanie zjawisk balistyki zewnętrznej i dynamiki lotu*. Warszawa: Wydawnictwo WAT.
- Gacek, J. (1999b). *Balistyka zewnętrzna. Część II. Analiza dynamicznych właściwości obiektów w locie*. Warszawa: Wydawnictwo WAT.
- McCoy, R. L. (1999). *Modern External Ballistics*. Atglen: Schiffer Publishing Ltd.
- Magier, M. i Merda, T. (2017). Zmodyfikowany model balistyki zewnętrznej dla naddźwiękowych pocisków moździerzowych, *Problemy Techniki Uzbrojenia*, 4, 97-108.
- Merda, T. (2019). *Modelowanie i badanie parametrów balistyki zewnętrznej naddźwiękowych pocisków moździerzowych*. Warszawa: Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych.
- Stołboszyński, A. (1956). *Podręcznik artylerii. Tom VII*. Warszawa: Wydawnictwo Ministerstwa Obrony Narodowej.

