

WZNASZENIE OBIEKTU BUDOWLANEGO JAKO ZADANIE INTERAKCYJNE I ŚLEDZĄCE

Czesław MIEDZIAŁOWSKI, Damian SIWIK*

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 A, 15-351 Białystok

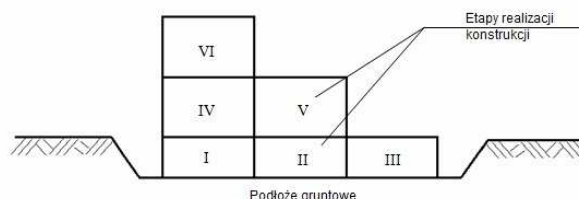
Streszczenie: Konstrukcje budowlane trwale związane z gruntem, współpracują z nim w zakresie statyki i dynamiki. Odształcalność gruntu powoduje, że stan naprężeniowo-deformacyjny w budowlu zależy od wzajemnej interakcji konstrukcji i podłoża gruntowego. Z drugiej strony, obiekty budowlane wznoszone są etapami, wynikającymi z technologii i organizacji robót. Pierwszym etapem jest wykonanie wykopu, następnie posadowienie i realizacja kolejnych elementów konstrukcji. Model obliczeniowy w zadaniach dotyczących statyki lub dynamiki powinien uwzględniać zarówno przestrzenność układu, jak i interakcje jego elementów składowych oraz fakt postępującej budowy, to jest „śledzenie” jego kolejnych etapów. W artykule zostanie zaprezentowany własny, blokowy model, zbudowany na bazie metody elementów skończonych, wraz z przykładem obliczeniowym uwzględniającym etapowanie konstrukcji modelowego budynku ścianowego.

Słowa kluczowe: model interakcyjny, model śledzący, współpraca budowli z podłożem gruntowym, metoda elementów skończonych.

1. Wprowadzenie

Konstrukcje budowlane, to konstrukcje w przeważającej ilości współpracujące z gruntem. Zatem, aby realnie określić stan naprężeniowo-przemieszczeniowy w obiekcie budowlanym, w zakresie obliczeń statycznych lub dynamicznych należy uwzględnić jego interakcję z podłożem gruntowym i sąsiednią zabudową. Jednocześnie konstrukcja budynku, ze względu na swoje gabaryty nie jest posadawiana od razu w całości, lecz pewnymi fazami w zależności od przyjętej technologii i organizacji prac na placu budowy (rys. 1). Zwykle pierwszym etapem, w całym procesie wznoszenia budowli jest wykonanie wykopu, a następnie kolejnych części konstrukcji, aż do fazy użytkowania budynku. W czasie wznoszenia budowli zmienia się nie tylko schemat statyczny konstrukcji, ale i geometria poszczególnych, już wykonanych jej elementów, a co za tym idzie, kolejne składowe konstrukcji montowane są na już odształconej i wyteżonej części budowli.

W przypadku etapowego wznoszenia konstrukcji budynku, podłoże gruntowe obciążane jest nierównomiernie w trakcie realizacji robót na placu budowy. Zatem nowo wznoszony obiekt narażony jest na nierównomierne osiadania. Ze względu na właściwości, większości materiałów budowlanych (kruchość, mała wytrzymałość na rozciąganie, na przykład beton – jako



Rys. 1. Podział konstrukcji na działki robocze

podstawowy materiał konstrukcyjny) w budynku obciążonym wymuszeniem kinematycznym, od nierównomiernych osiadań pojawić się mogą pęknięcia lub zarysowania poszczególnych, najbardziej wyteżonych elementów konstrukcyjnych. Dodatkowo proces osiadania budowli rozpoczyna się od momentu przyłożenia obciążenia i wraz z jego przyrostem trwa do pewnego czasu po zakończeniu budowy. W przypadku gruntów niespoistych osiadania kończą się bezpośrednio po przyłożeniu obciążenia. Natomiast jeżeli chodzi o grunty spoiste, ze względu na ich konsolidację przemieszczenia podłoża gruntowego pod fundamentem budynku mogą przyrastać jeszcze przez kilka lat po ukończeniu prac budowlanych (Steckiewicz, 1979).

Uwzględniając powyższe problemy, w zakresie analizy statycznej lub dynamicznej, aby realnie określić stan naprężeniowo-przemieszczeniowy konstrukcji należałoby „śledzić” zmiany zachodzące w czasie jego wznoszenia

* Autor odpowiedzialny za korespondencję. E-mail: d.siwik@pb.edu.pl

i użytkowania. W tym celu dokonano przeglądu stosowanych metod obliczeniowych oraz opracowano własny, przyrostowy model „śledzący” bazujący na metodzie elementów skończonych (Zienkiewicz i in., 2005). Model opracowano w formie blokowej, aby uniknąć przetwarzania quasi-zerowych macierzy sztywności, używanych między innymi przez Romerę i in. (2008).

2. Model interakcyjny grunt - zabudowa

W praktycznym podejściu projektowania konstrukcji budowlanych, przyjmuje się często swego rodzaju superpozycję poszczególnych układów (model uproszczony – rys. 2b), które analizowane są jako niezależne od siebie części jednego większego modelu. I tak, stan naprężeniowo-przemieszczeniowy analizowanych budynków określany jest przy założeniu, że obiekty te posadowione są na nieodkształcalnym podłożu lub podłożu sprężystym Winklera, pomijając istotny fakt, że jeżeli konstrukcje te znajdują się w bezpośrednim sąsiedztwie, to ze względu na odkształcalność podłoża gruntowego obiekty te wzajemnie na siebie oddziałują.

Zatem wydaje się zasadne, aby realnie określić wyężenie konstrukcji w układzie: grunt – sąsiednia zabudowa – budynek nowo wznoszony, a ze względu na wzajemną interakcję poszczególnych części analizowanego modelu obliczenia statyczne lub dynamiczne należy prowadzić, traktując składowe

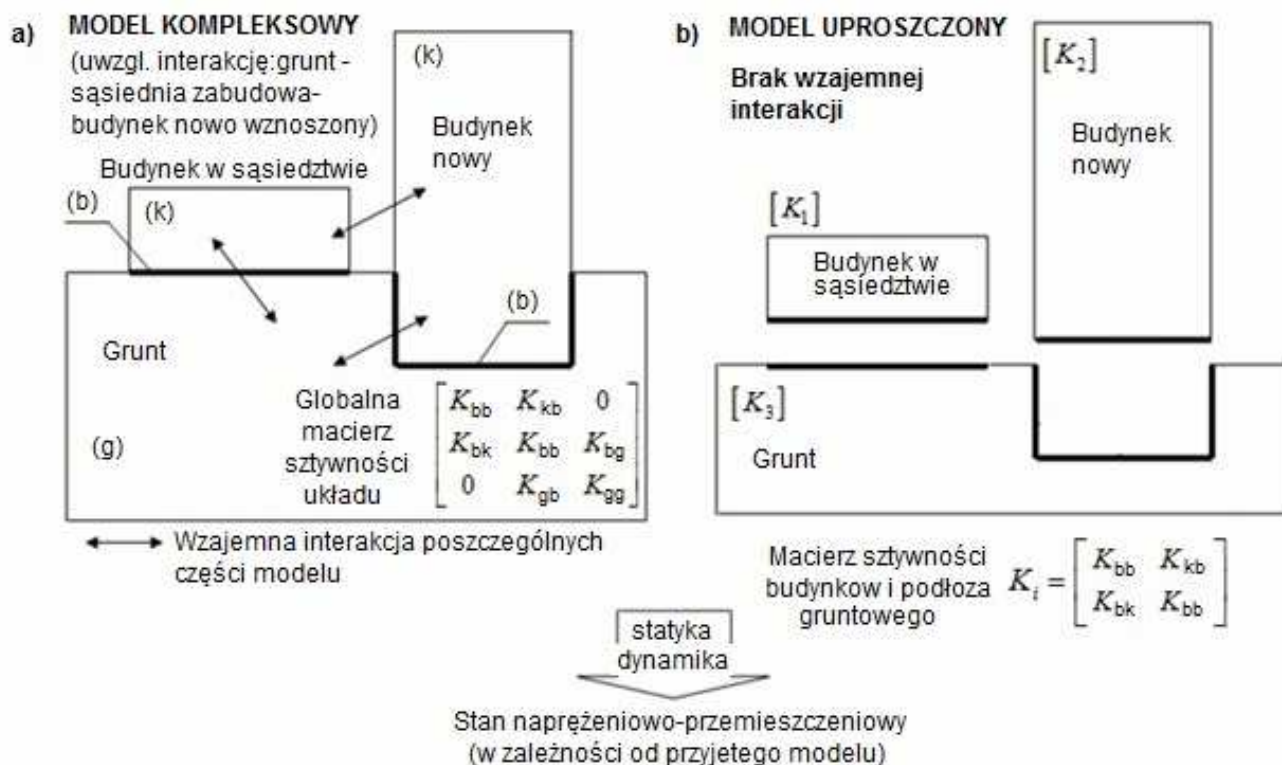
modelu jako jedną całość (model kompleksowy – rys. 2a).

Dodatkowo, aby wskazać na różnice między stosowanymi rozwiązaniami na rysunku 2a podano globalną macierz sztywności układu, natomiast na rysunku 2b przedstawiono macierz sztywności analizowanych budynków, gdzie: k , g są odpowiednio stopniami swobody konstrukcji i gruntu, natomiast b charakteryzuje stopnie swobody na styku konstrukcji i gruntu.

3. Stosowane rozwiązania

Najczęściej, aby uwzględnić etapowy charakter pracy konstrukcji oraz historię obciążenia stosowana jest następująca procedura (Romera i in., 2008):

- w I etapie następuje dyskretyzacja elementami skończonymi całego modelu,
- następnie programowany jest proces etapowania i obciążenia konstrukcji poprzez wybór działek roboczych, które będą aktywowane lub dezaktywowane w poszczególnych krokach obliczeniowych, odpowiadających harmonogramowi wznoszenia obiektu budowlanego,
- na każdym etapie obliczeniowym, włączone lub wyłączone z procesu numerycznego są poszczególne części globalnej macierzy sztywności modelu,
- części konstrukcji nieaktywowane na poszczególnych etapach obliczeniowych, modelowane są poprzez zastosowanie quasi-zerowych elementów zerowych.



Rys. 2. Stosowane modele analizy konstrukcji budowlanych: a) model interakcyjny: grunt – zabudowa, b) model uproszczony

Wartości na głównej przekątnej muszą być tak dobrane, aby uniknąć niestabilności numerycznej i na tyle małe, aby w istotny sposób nie wpłynąć na wyniki otrzymane w poszczególnych krokach obliczeniowych. Takie podejście wykorzystano między innymi w pracy Romery i in. (2008), przyjmując dla elementów nieaktywnych wartości na głównej przekątnej równe 1×10^{-6} .

Ze względu na nieliniowy charakter pracy konstrukcji (zmiana geometrii układu na wcześniejszych etapach wznoszenia obiektu), każdy etap obliczeniowy podzielić można na szereg mniejszych, zatem opisana procedurę, na etapie t wyrazić można równaniem:

$${}^t K_T^{i-1} \cdot \Delta d^i = {}^t P - {}^t R^{i-1} \quad (1)$$

gdzie: K_T jest styczną macierzą sztywności układu w fazie t , P i T są wektorami, odpowiednio sił zewnętrznych i wewnętrznych, natomiast Δd jest wektorem niewiadomych przemieszczeń.

Równanie (1) rozwiązuje się metodami iteracyjnymi, na przykład metodą Newtona-Raphsona. Macierz sztywności K_T oraz wektor sił wewnętrznych T określane są na podstawie stanu naprężeniowego z kroku obliczeniowego $i-1$. Jednocześnie należy zaznaczyć, że przedstawiona procedura, ze względu na *quasi*-zerowy charakter globalnej macierzy sztywności układu obciążona jest możliwą niestabilnością numeryczną, co w sposób istotny może wpływać na uzyskiwane wyniki.

Aktywacja i dezaktywacja poszczególnych obszarów globalnej macierzy sztywności modelu odbywa się przy uwzględnieniu wzajemnej interakcji między częściami włączanymi lub wyłączanymi z procedury numerycznej na wcześniejszym etapie obliczeniowym.

3.1. Dezaktywacja elementów skończonych

Dezaktywacja elementów skończonych odbywa się w dwóch etapach:

- wygaszenie obszarów modelu, poprzez zastosowanie *quasi*-zerowych macierzy sztywności;
- użycie w procedurze obliczeniowej tak zwanych równoważników sił zastępujących w procedurze iteracyjnej oddziaływanie wyłączonego elementu, w postaci:

$$P^{d,e} = \int_{\Omega_e} (B^e)^T \cdot \sigma^e d\Omega_e \quad (2)$$

gdzie: B^e jest macierzą deformacji elementu, natomiast σ^e jest wektorem określającym stan naprężeniowy w elemencie skończonym.

Wartości sił węzłowych (ekwiwalentów sił), po dezaktywacji poszczególnych części siatki związane są ze wzajemną interakcją między elementami modelu, a elementami wyłączonymi. Siła $P^{d,e}$ wraz z postępowaniem obliczeń, stopniowo jest zmniejszana, aż do wartości zerowej.

3.2. Aktywacja elementów skończonych

Przy zastosowaniu powyższej procedury, zaznaczyć należy, że jeżeli nawet element jest wyłączony z obliczeń jest on w pewien sposób aktywny w przenoszeniu obciążeń (*quasi*-zerowa macierz sztywności).

Wstępny stan naprężenia w aktywowanych na danym etapie elementach zapisać można równaniem:

$${}^t \sigma^e = D^e \cdot {}^t \varepsilon^e = D^e \cdot B^e \cdot ({}^t d - d_0) \quad (3)$$

gdzie: d_0 jest wektorem przemieszczeń wspólnych węzłów krawędziowych elementów aktywowanych na poszczególnych etapach obliczeniowych, ε^e jest wektorem określającym stan odkształceniowy w elemencie skończonym, natomiast D^e jest macierzą konstytutywną materiału elementu skończonego.

4. Przyrostowy model „śledzący”

Aby uniknąć problemu rozwiązywania układu równań z lokalnie *quasi*-zerową macierzą sztywności, opracowano przyrastający blokowo w sposób jawny, oparty na metodzie elementów skończonych model „śledzący”, pozwalający na uwzględnienie:

- etapowego charakteru wznoszenia konstrukcji obiektów budowlanych,
- wzajemnej interakcji grunt – sąsiednia zabudowa – nowa realizacja budynku.

Koncepcję blokowego modelu „śledzącego” podano w pracach (Miedziałowski, 1994; Krętowska i Miedziałowski, 2001).

Przyrostowy model „śledzący”, ze względu na blokowe powiększanie się struktury numerycznej (odpowiadającej poszczególnym działkom roboczym) na etapie t przedstawić można za pomocą równania:

$${}^t \begin{bmatrix} K_s & K_{sn} \\ K_{ns} & K_n \end{bmatrix} \cdot {}^t \begin{Bmatrix} d_s \\ d_n \end{Bmatrix} = {}^t \begin{Bmatrix} 0 \\ P_n \end{Bmatrix} + {}^t \begin{Bmatrix} R_s \\ R_n \end{Bmatrix} \quad (4)$$

gdzie: n odpowiada „nowej” działce roboczej, natomiast s dotyczy stanu konstrukcji z poprzedniego etapu, K_s i K_n są globalnymi macierzami sztywności formułowanymi na podstawie blokowego przyrostu modelu „śledzącego”, $\{d\}$ jest wektorem niewiadomych przemieszczeń, $\{P\}$ jest wektorem obciążeń zewnętrznych, $\{R\}$ jest wektorem sił wewnętrznych zbudowanym na podstawie aktualnej macierzy sztywności układu oraz wektora przemieszczeń z etapu $i-1$:

$${}^t \begin{Bmatrix} R_s \\ R_n \end{Bmatrix} = {}^t [K] \cdot {}^{t-1} \begin{Bmatrix} d_s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Po podstawieniu równania (5) do wzoru (4) otrzymano:

$${}^t \begin{bmatrix} K_s & K_{sn} \\ K_{ns} & K_n \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} {}^t d_s - {}^{t-1} d_s \\ {}^t d_n \end{Bmatrix} = {}^t \begin{Bmatrix} 0 \\ P_n \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Przemieszczenia węzłów w „nowej” części konstrukcji wyznacza się ze wzoru:

$${}^t d_n = \left(K_n - K_{ns} \cdot K_s^{-1} \cdot K_{ns} \right)^{-1} \cdot {}^t P_n \quad (7)$$

Natomiast przemieszczenia odpowiadające poprzednim działkom roboczym wyznacza się z zależności:

$${}^t d_s = {}^{t-1} d_s \cdot \left(K_s^{-1} \cdot K_{ns} \right) {}^t d_n \quad (8)$$

Ze względu na nieliniowy charakter macierzy sztywności (zmian geometrii układu na poszczególnych etapach obliczeniowych), równanie (6), można zapisać w sposób zwięzły:

$${}^t (K) \cdot \left({}^t d \right)^{i-1} \cdot \Delta d^i = {}^t P - {}^t R \left({}^t d \right)^{i-1} \quad (9)$$

lub

$${}^t (K) \cdot \left({}^t d \right)^{i-1} \cdot \left({}^t d - {}^{t-1} d \right) = {}^t P - {}^t R \left({}^t d \right)^{i-1} \quad (10)$$

gdzie ${}^t K \left({}^t d \right)^{i-1}$ jest globalną macierzą sztywności układu w funkcji przemieszczeń, w kroku iteracyjnym $i-1$ na etapie t wznoszenia konstrukcji.

Niewątpliwie, uwzględnienie w procesie analizy konstrukcji etapowania robót związane jest z dość znacznym wydłużeniem czasu obliczeń. Jednak zastosowanie modelu przyrostowego do tego rodzaju zagadnień pozwala na wykorzystanie wyników otrzymanych w poprzednich krokach obliczeniowych ${}^{i-1} d$. W rezultacie, na kolejnych etapach analizy konstrukcji w celu określenia niewiadomych przemieszczeń węzłowych odwracane są znacznie mniejsze macierze sztywności niż to ma miejsce w punkcie 3.

4.1. Możliwe modyfikacje i inne zastosowania modelu

W czasie wznoszenia i użytkowania budowli mogą pojawić się zmiany właściwości materiałowych w poszczególnych elementach konstrukcyjnych związane ze zjawiskami reologicznymi materiałów konstrukcyjnych. Dodatkowo w trakcie użytkowania obiektu budowlanego, występują wszelakiego rodzaju uszkodzenia mechaniczne w postaci rys, pęknięć oraz innych uszkodzeń elementów konstrukcyjnych, co może zmienić w sposób wyraźny charakter pracy oraz spowodować dość wyraźną redystrybucję sił wewnętrznych w konstrukcji budynku. Zatem, jeżeli na etapie t w analizowanym obiekcie, na poszczególnych działkach roboczych występują lokalne zmiany sztywności układu w postaci uszkodzeń lub wzmocnień to macierz sztywności odpowiadającą temu obszarowi konstrukcji zapisać można w postaci (Kleiber, 1985):

$${}^t K_s^{\text{mod}} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (11)$$

Równanie równowagi, dla takiego zagadnienia

przyjmuje postać:

$${}^t K_s^{\text{mod}} \cdot {}^t d_s^{\text{mod}} = {}^t P_s \quad (12)$$

gdzie ${}^t d_s^{\text{mod}} = {}^t d_s + d^{\text{mod}}$ jest aktualnym wektorem przemieszczeń, po uwzględnieniu przemieszczeń d^{mod} powstałych od lokalnej modyfikacji macierzy sztywności:

$$d^{\text{mod}} = - \left({}^t K_s \right)^{-1} \cdot A^T \cdot \left(I + K^{\text{mod}} \cdot A \cdot \left({}^t K_s \right)^{-1} \cdot A^T \right)^{-1} \cdot K^{\text{mod}} \cdot A \cdot {}^t d_s \quad (13)$$

gdzie A jest macierzą zawierającą informację, w których miejscach wystąpiły lokalne zmiany sztywności układu (macierz agregacyjna).

Przyjęta przyrostowa koncepcja modelu „śledzącego” wiąże się z szeregiem innych zalet, to jest z możliwością:

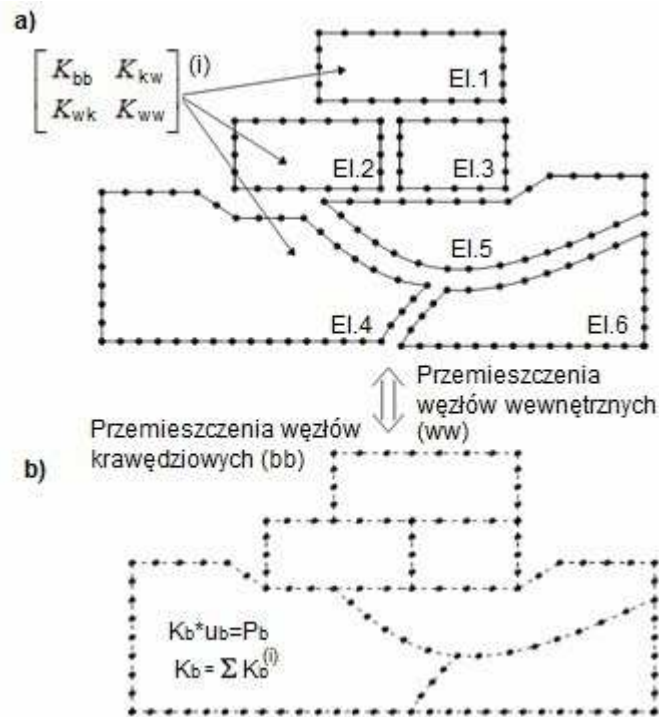
- analizy konstrukcji budynku przy rozbudowie lub modernizacji, poprzez dodanie kolejnego bloku, charakteryzującego nową działkę roboczą do globalnej macierzy sztywności układu;
- zastosowania w modelu superelementów (podział modelu na podstruktury, odpowiadające poszczególnym działkom roboczym): wyodrębnienie podobszarów (działek roboczych), odpowiadających poszczególnym fazom wznoszenia budowli (rys. 3a), agregacja superelementów, zgodnie z przyjętym harmonogramem robót (rys. 3b);
- zastosowania technik przetwarzania równoległego procesu obliczeniowego (niezależne obliczenia poszczególnych działek roboczych, reprezentowanych przez wydzielone podstruktury numeryczne).

Macierzowe równanie równowagi, dla i -tej podstruktury oraz macierz sztywności i -tego superelementu, odpowiednio zapisać można w postaci:

$$\begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bw} \\ K_{wb} & K_{ww} \end{bmatrix}^i \cdot \begin{Bmatrix} u_b \\ u_w \end{Bmatrix}^i = \begin{Bmatrix} P_b \\ P_w \end{Bmatrix}^i \quad (14)$$

$$K_b^i = K_{bb}^i - K_{bw}^i \cdot \left(K_{ww}^i \right)^{-1} \cdot K_{wb}^i \quad (15)$$

Niewątpliwie dużą zaletą wykorzystania koncepcji superelementów do budowy modelu „śledzącego” jest fakt, że w przypadku konstrukcji budowlanych, często wyodrębnić można powtarzające się podstruktury, co dodatkowo przyczynia się do skrócenia czasu obliczeń.



Rys. 3. Koncepcja wykorzystania superelementów w modelu „śledzącym”

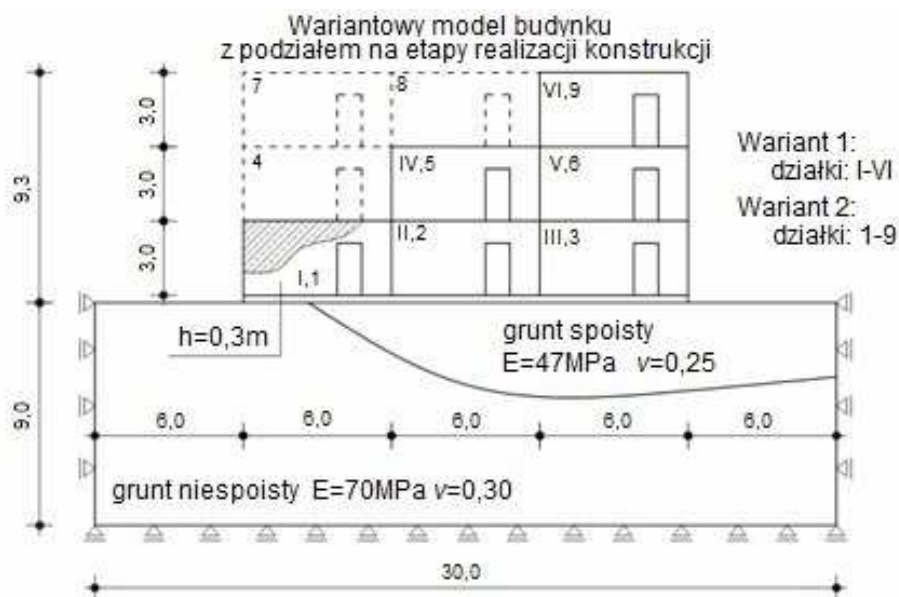
5. Przykład obliczeniowy

Dla zilustrowania wpływu etapowania konstrukcji na przemieszczenia oraz rozkład sił wewnętrznych w budynku i podłożu gruntowymi przeanalizowano wariantowy układ interakcyjny budynek – podłoże gruntowe. Obliczenia przeprowadzono w stanie sprężystym, dla dwóch przypadków – bez uwzględnienia oraz z uwzględnieniem współpracy budowlanej z podłożem, przyjmując schemat konstrukcji jak na rysunku 4.

Model budynku podzielono na działki robocze,

odpowiadające harmonogramowi wznoszenia budowli: wariant 1 (numeracja: I-VI), wariant 2 (numeracja: 1-9). Układ zdyskretyzowano trójkątnymi elementami skończonymi, przyjmując następujące właściwości materiałowe i geometryczne:

- modelowy budynek, przyjęto jako żelbetowy, wykonany z betonu B20 ($E_0 = 29 \text{ GPa}$),
- grubość ścian – 25cm,
- dane materiałowe dotyczące gruntu, przedstawiono na rysunku 4.



Rys. 4. Model interakcyjny modelowy budynek – podłoże gruntowe z podziałem na działki robocze zależne od harmonogramu robót

Przypadek bez uwzględnienia współpracy między podłożem gruntowym i budynkiem wykonano bez uwzględnienia etapowania konstrukcji w obu analizowanych wariantach.

Obliczenia przeprowadzono w programie Matlab z wykorzystaniem własnych algorytmów numerycznych, opartych o zaproponowany blokowy model „śledzący”.

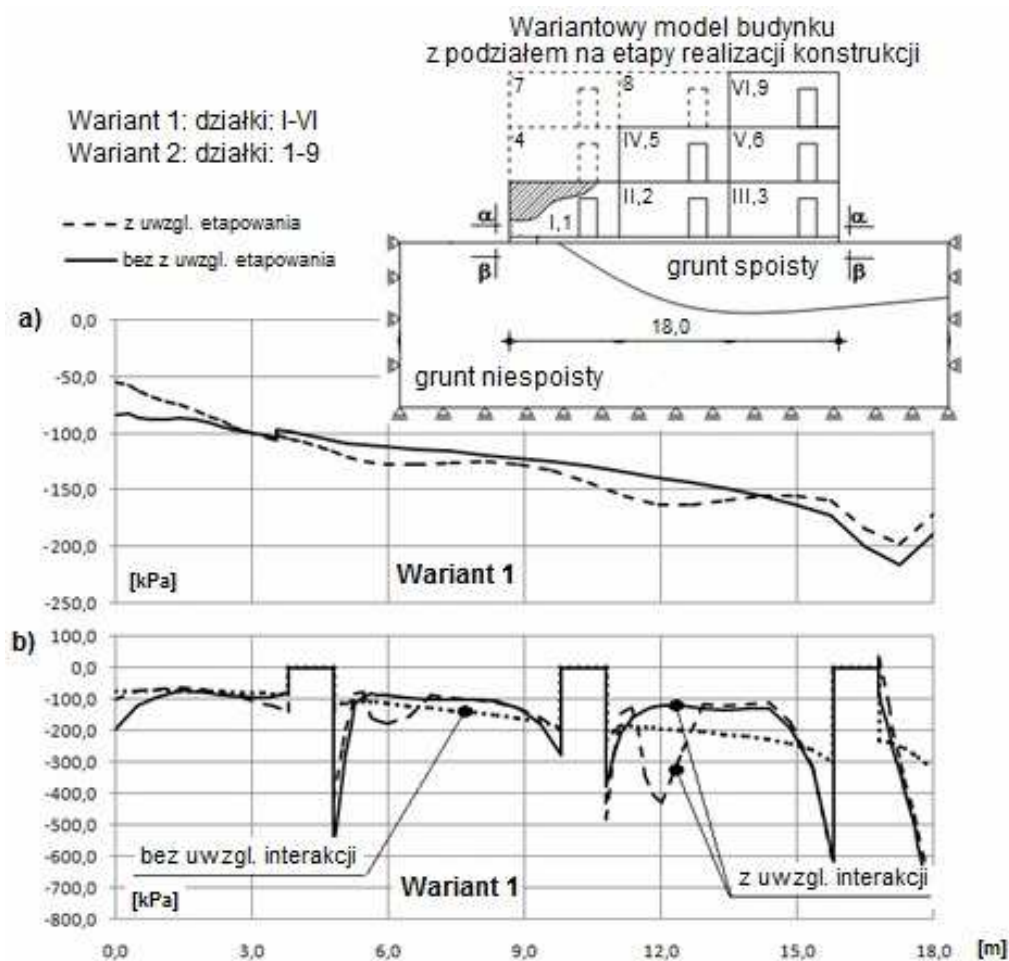
5.1. Wyniki i wnioski z przeprowadzonych analiz

Uzyskane wyniki przedstawiono na rysunkach 5 i 6. Z przeprowadzonych analiz wynika, że uwzględnienie w obliczeniach:

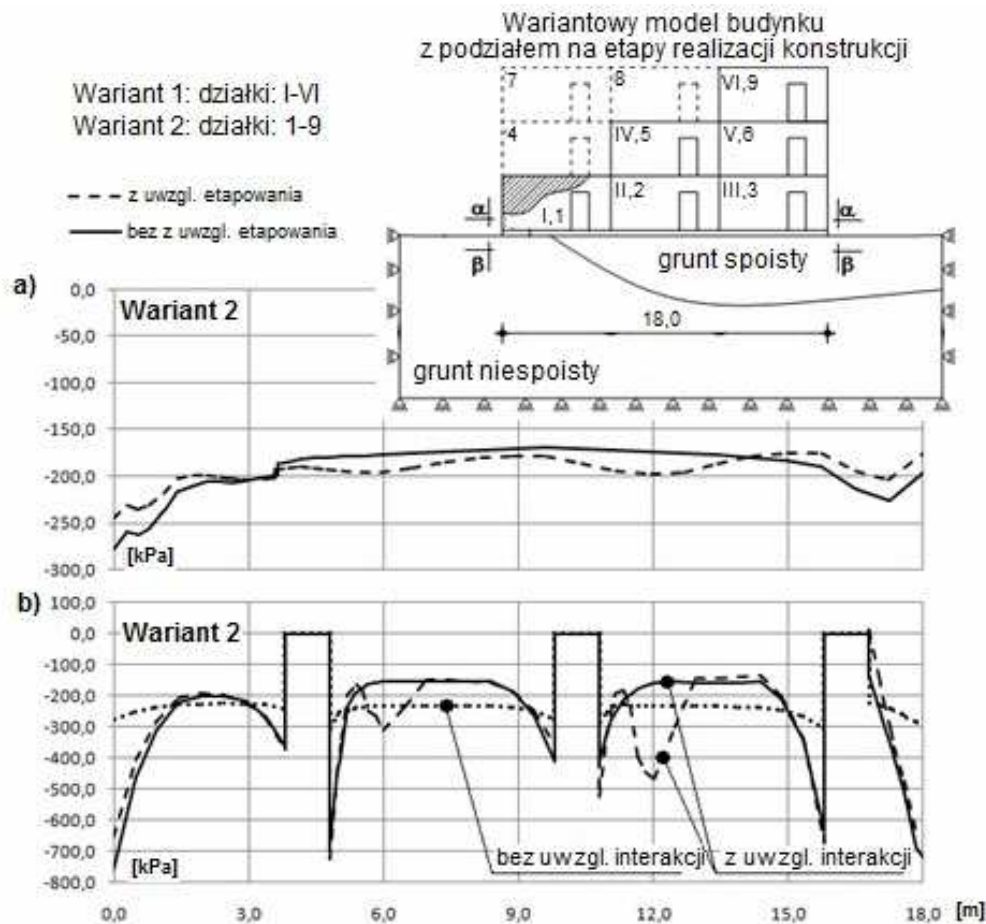
- wpływu etapowego narastania konstrukcji budynku daje wyraźne różnice pomiędzy rozkładami sił wewnętrznych w ścianie oraz poziomie posadowienia (rys. 5 i 6);

- współpracy budowli z podłożem gruntowym – znacząco wpływa na stan naprężenia w ścianie modelowego budynku (analiza z uwzględnieniem oraz bez uwzględnienia interakcji – rys. 5b i 6b).

Nieuwzględnienie tych zjawisk w analizach statycznych może być przyczyną późniejszych awarii spowodowanych nadmiernym wyciążeniem konstrukcji, a w rezultacie pęknięć lub zarysowań poszczególnych części budynku.



Rys. 5. Rozkład naprężeń normalnych (wariant 1): a) w poziomie posadowienia – przekrój $\beta\text{-}\beta$, b) w ścianie – przekrój $\alpha\text{-}\alpha$



Rys. 6. Rozkład naprężeń normalnych (wariant 2): a) w poziomie posadowienia – przekrój β - β , b) w ścianie – przekrój α - α

6. Podsumowanie

Na podstawie przeprowadzonych analiz wydaje się zasadne, aby konstrukcje budowlane związane z gruntem (wzajemna interakcja na styku fundament podłoże gruntowe) obliczać z uwzględnieniem etapowego charakteru prac prowadzonych na placu budowy, zgodnie z przyjętą technologią i harmonogramem robót. Stan naprężeniowo-przemieszczeniowy w budowlu i gruncie zależy w dużej mierze od przyjętej technologii wznoszenia konstrukcji.

Ze względu na jawny i blokowy opis, zaproponowany model „śledzący” może być w dość łatwy sposób rozbudowywany i łączony z innymi modelami opartymi na metodzie elementów skończonych. Zaproponowana metoda, oprócz zastosowań do etapowego wznoszenia budowli przy uwzględnieniu pełnej interakcji konstrukcji z podłożem gruntowym daje między innymi możliwość:

- uwzględnienia w obliczeniach lokalnych zmian sztywności konstrukcji, na każdym etapie wznoszenia a następnie użytkowania budowli;
- zastosowania technik przetwarzania równoległego do rozwiązania rozbudowanych zagadnień „śledzących”, poprzez podział modelu na działki robocze, które następnie traktowane będą jako oddzielne, niezależne od siebie zadania;
- uwzględnienia zjawisk nieliniowych (materiału, zmiany geometrii konstrukcji).

Literatura

- Kleiber M. (1985). Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum. PWN, Warszawa-Poznań.
- Krętowska J., Miedziałowski Cz. (2001). Modele interakcyjne i modele śledzące konstrukcji budowlanych. *Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Budownictwo* Z.21/2001, 179-189.
- Miedziałowski Cz. (1994). Dyskretny model złożonych konstrukcji ścianowych budynków uwzględniający współpracę podłoża gruntowego. *Rozprawy naukowe Politechniki Białostockiej*, Nr 24, Białystok.
- Przemieniecki J. S. (1969). Theory of matrix structural analysis. *Dover publications inc.*, New York.
- Romera L. E., Hernandez S., Gutierrez R. (2008). Numerical characterization of the structure behavior of the Basilica of Pilar in Zaragoza (Spain). Constructive process effects. *Advances in Engineering Software*, Vol. 39, No. 4, 315-326.
- Steckiewicz R. (1979). Współpraca budowli z podłożem gruntowym w okresie jej wznoszenia i użytkowania. *Inżynieria i Budownictwo*, 12/1979, 456-459.
- Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. (2005). The finite element method: its basis and fundamentals. *Elsevier*, Butterworth-Heinemann, Amsterdam.

**BUILDING ERECTION AS AN INTERACTIVE
AND TRACKING TASK**

Abstract: The paper presents "tracking" model, taking into account the structures and subsoil interaction and stages of the building construction. The presented model, based on the finite element method, was built with the following problems: identification of the components of the model (structure, technology), mathematical model construction, realization of the calculations (calculation example), accuracy and convergence problems.