



Model materiału zastępczego w analizie zginanego przekroju żelbetowego

JAROSŁAW SIWIŃSKI, ADAM STOLARSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Inżynierii Lądowej i Geodezji, Katedra Budownictwa,
00-908 Warszawa, ul. gen. S. Kaliskiego 2, jaroslaw.siwinski@wat.edu.pl, astolarski@wat.edu.pl

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodykę wyznaczania parametrów wytrzymałościowych i odkształceniowych dla hipotetycznego modelu jednorodnego materiału zastępczego w żelbetowym przekroju poprzecznym poddanym czystemu zginaniu. Parametry te określono na podstawie proponowanej funkcji homogenizacyjnej z wykorzystaniem efektywnego stopnia zbrojenia przekroju żelbetowego. Przeprowadzono analizę porównawczą zależności moment–krzyżwina zastępczego przekroju poprzecznego i przekroju żelbetowego zginanego.

Słowa kluczowe: budownictwo, konstrukcje budowlane, zginany przekrój żelbetowy, jednorodny materiał zastępczy, homogenizacja

DOI: 10.5604/12345865.1186327

1. Wstęp

Sposób zachowania modelu numerycznego układu konstrukcyjnego zależy ściśle od zastosowanego modelu materiałowego, który stanowi integralną część procedury modelowania mechanizmu zniszczenia budynków obciążonych wybuchowo. Przeprowadzenie analizy przestrzennej zachowania elementu konstrukcyjnego lub całej konstrukcji budynku wymaga wykonania skomplikowanego modelu numerycznego. Trudność modelowania przestrzennego elementów żelbetowych polega na osobnym modelowaniu materiałów konstrukcyjnych (betonu i stali zbrojeniowej) oraz ich wzajemnej współpracy. Przy dużej liczbie prętów zbrojeniowych każdy z nich należy zdefiniować i określić jego współpracę z betonem, co powoduje zwiększenie liczby węzłów wykorzystywanych w analizie obliczeniowej oraz czasu wykonywania analizy.

W związku z trudnościami modelowania właściwości skomplikowanych układów konstrukcyjnych o niejednorodnej konstrukcji żelbetowej, stosowane jest podejście polegające na homogenizacji żelbetu, patrz np. prace Combescure'a, Dumonteta i Voldoire'a [1], Kellihera i Suttona-Swabiego [2] oraz Luccioni, Ambrosiniego i Danesiego [4].

Żadne opracowanie dotyczące postępowania z wykorzystaniem modelu jednorodnego materiału zastępczego nie przedstawia uniwersalnej procedury wyznaczania parametrów statyczno-wytrzymałościowych dla tego materiału.

Celem pracy jest opracowanie hipotetycznego, jednorodnego modelu materiału zastępczego na podstawie założeń teorii homogenizacji, której teoretyczne podstawy zawiera m.in. opracowanie Strzeleckiego i in. [5], oraz przeprowadzenie analizy porównawczej zależności moment–krzywizna z tradycyjnym przekrojem żelbetowym.

Zgodnie z założeniami teorii homogenizacji, żelbet jako niejednorodna kompozycja betonu i stali zbrojeniowej zostały zastąpione jednorodnym materiałem zastępczym, którego wszystkie parametry wytrzymałościowe i odkształceniowe wyznaczono jako celową modyfikację parametrów statyczno-wytrzymałościowych podstawowego modelu betonu.

Jedynym czynnikiem modyfikującym właściwości wytrzymałościowe i odkształceniowe betonu jest współczynnik homogenizacyjny, który przyjęto jako efektywny stopień zbrojenia.

W pracy przedstawiono weryfikację analityczną modelu jednorodnego materiału zastępczego na przykładzie zależności moment–krzywizna dla przekroju żelbetowego i przekroju z materiału zastępczego z uwzględnieniem fazowości pracy przekrojów poprzecznych.

2. Model materiału zastępczego

2.1. Koncepcja materiału zastępczego

W opracowaniu zawarto rozważania dotyczące hipotetycznego modelu zastępczego materiału jednorodnego o parametrach statyczno-wytrzymałościowych wyznaczonych zgodnie z teorią homogenizacji, Strzelecki i in. [5].

Zastosowanie hipotetycznego modelu materiału zastępczego umożliwia uzyskanie parametrów materiału jednorodnego, dla których wyniki doświadczeń analitycznych i w dalszych pracach numerycznych będą porównywalne z wynikami badań doświadczalnych i innych rozwiązań teoretycznych uzyskanych dla materiału niejednorodnego — żelbetu, ale bez potrzeby osobnego modelowania prętów stalowych, przekroju betonowego i ich współpracy. Takie podejście homogenizacyjne umożliwi wykorzystanie zasobów oprogramowania specjalistycznego do

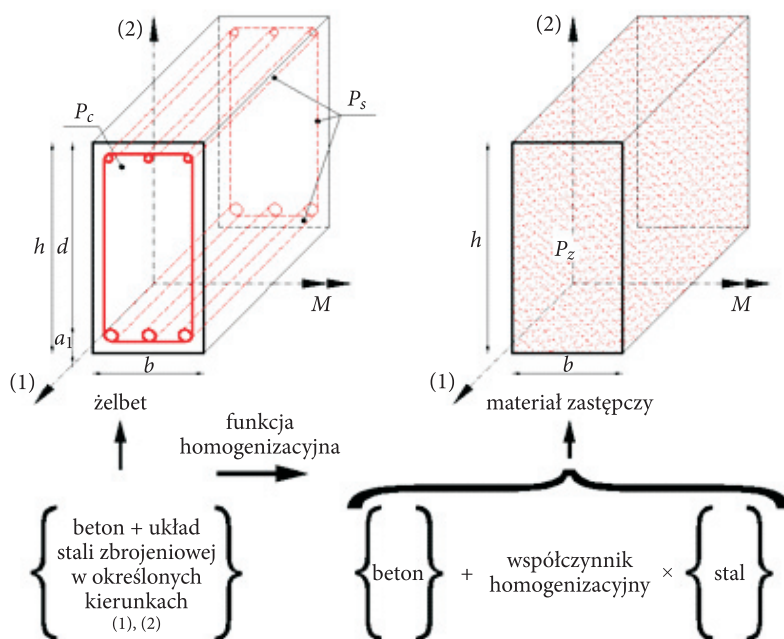
modelowania zachowania jednorodnych materiałów, elementów konstrukcyjnych i całych konstrukcji.

Wszystkie parametry tego modelu zostaną wyspecyfikowane i szczegółowo opisane. Następnie zostanie przedstawiona metodyka modyfikacji i wyznaczania tych parametrów dla materiału zastępczego.

2.2. Metoda homogenizacji wyznaczania parametrów materiału zastępczego

Przedstawiono metodykę zastąpienia żelbetu jako niejednorodnej kompozycji materiałowej pewnym modelem hipotetycznego materiału zastępczego jako materiałem jednorodnym. Zgodnie z zasadami teorii homogenizacji, Strzelecki i in. [5], przyjęto, że zróżnicowane modele materiałów bazowych żelbetu (beton i stal zbrojeniowa) zostaną zastąpione modelem materiału jednorodnego za pomocą założonego parametru homogenizacyjnego zależnego od wzajemnej ilościowej proporcji tych materiałów, czyli stopnia zbrojenia.

Na rysunku 1 przedstawiono ideowy schemat takiego postępowania prowadzącego do wyznaczenia parametrów materiału zastępczego w zginanym przekroju żelbetowym.



Rys. 1. Ideowy schemat homogenizacji żelbetu

Podstawą wyznaczenia parametrów materiału zastępczego opisującego żelbet jest funkcja homogenizacyjna:

$$P_z = P_c + F_H \cdot P_s, \quad (1)$$

gdzie: P_z — parametr materiału zastępczego po homogenizacji;
 P_c — parametr podstawowy betonu;
 P_s — parametr podstawowy stali zbrojeniowej;
 F_H — współczynnik homogenizacyjny.

Jako parametry podstawowe dla betonu przyjęto wytrzymałość na ściskanie — f_c , wytrzymałość betonu na rozciąganie — f_{ct} , moduł odkształcenia — E_c :

$$P_c = \begin{Bmatrix} f_c \\ f_{ct} \\ E_c \end{Bmatrix}. \quad (2)$$

Jako parametry podstawowe dla stali zbrojeniowej przyjęto największą charakterystyczną granicę plastyczności $f_{y,\max} = \max\{f_{y1}, f_{y2}\}$ spośród charakterystycznych granic plastyczności $f_{yi} = \{f_{y1}, f_{y2}\}$ występujących w zbrojeniu dla wyróżnionych kierunków $i = 1, 2$ oraz moduł odkształcenia — E_s :

$$P_s = \begin{Bmatrix} f_{y,\max} \\ E_s \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Współczynnik homogenizacyjny przyjęto w postaci efektywnego stopnia zbrojenia, który przyjmuje różne wartości w zależności od zróżnicowania parametru P_s dla wyróżnionych kierunków $i = 1, 2$ zbrojenia

$$F_H = \begin{Bmatrix} \rho_{eff,y} \\ \rho_{eff} \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

Efektywny stopień zbrojenia $\rho_{eff,y}$ wg (4)₁ wyraża jednocześnie wypadkowy stopień zbrojenia jako funkcję zróżnicowanych stopni zbrojenia $\rho_i = \{\rho_1, \rho_2\}$ dla wyróżnionych kierunków zbrojenia oraz zróżnicowanych, bezwymiarowych współczynników $\varphi_{yi} = \frac{f_{yi}}{f_{y,\max}}$ charakterystycznych granic plastyczności f_{yi} w tym zbrojeniu, znormalizowanych względem największej granicy plastyczności $f_{y,\max}$:

$$\rho_{eff,y} = \sqrt{(\rho_1 \cdot \varphi_{y1})^2 + (\rho_2 \cdot \varphi_{y2})^2}. \quad (5)$$

Natomiast efektywny stopień zbrojenia ρ_{eff} wg (4)₂ wyraża wypadkowy stopień zbrojenia wyłącznie w funkcji zróżnicowanych stopni zbrojenia

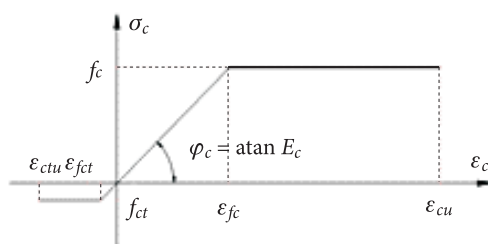
$$\rho_{eff} = \sqrt{(\rho_1)^2 + (\rho_2)^2}. \quad (6)$$

Efektywny stopień zbrojenia określony zależnością (4)₁ ma zastosowanie w odniesieniu do działania na parametry o zróżnicowanych wartościach dla wyróżnionych kierunków i (granica plastyczności stali zbrojeniowej). Natomiast wyrażenie (4)₂ ma zastosowanie w odniesieniu do działania na parametry o takich samych wartościach dla wyróżnionych kierunków i .

2.3. Modele podstawowe materiałów w przekroju żelbetowym

2.3.1. Sprężysto-plastyczny model betonu

Jako podstawowy model materiału przyjęto model sprężysto-idealnie plastyczno-kruchego odkształcenia betonu, który jest przeznaczony do analizy i projektowania elementów betonowych, Knauff [3], Eurokod 2 [6] (rys. 2).



Rys. 2. Uproszczona zależność naprężenie–odkształcenie dla betonu w jednoosiowym stanie naprężenia

Model ten opisują następujące zależności:

$$\sigma_c = \begin{cases} 0 & \text{dla } \varepsilon_c \leq -\varepsilon_{ctu} \\ -f_{ct} & \text{dla } -\varepsilon_{ctu} \leq \varepsilon_c < -\varepsilon_{fct} \\ E_c \cdot \varepsilon_c & \text{dla } -\varepsilon_{fct} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{fc} \\ f_c & \text{dla } \varepsilon_{fc} < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu} \\ 0 & \text{dla } \varepsilon_c \geq \varepsilon_{cu} \end{cases} \quad (7)$$

gdzie: $\varepsilon_{fc} = \frac{f_c}{E_c}$ — graniczne odkształcenia sprężyste przy ściskaniu;

$\varepsilon_{fct} = \frac{f_{ct}}{E_c}$ — graniczne odkształcenia sprężyste przy rozciąganiu;

ε_{cu} — odkształcenia graniczne przy ściskaniu;

ε_{ctu} — odkształcenia graniczne przy rozciąganiu;

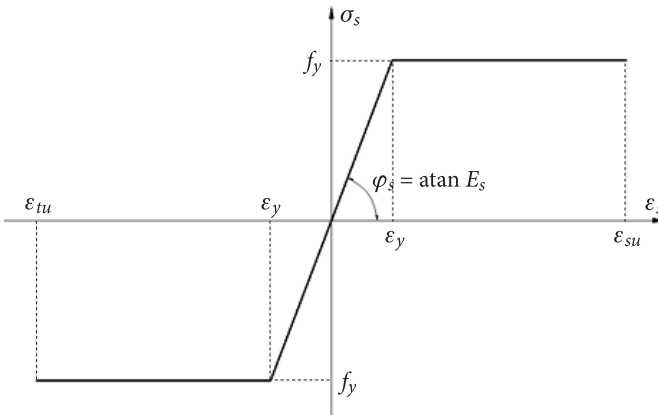
f_c — charakterystyczna wytrzymałość betonu na ściskanie;

f_{ct} — charakterystyczna wytrzymałość betonu na rozciąganie;

E_c — moduł odkształcenia.

2.3.2. Sprężysto-plastyczny model stali zbrojeniowej

Przyjęto sprężysto-idealnie plastyczny model stali (rys. 3). Ze względu na charakter pracy prętów zbrojeniowych w elementach żelbetowych rozważano jednoosiowy stan naprężenia rozciąganie/ściskanie, Knauff [3], Eurokod 2 [6].



Rys. 3. Zależność naprężenie–odkształcenie dla stali zbrojeniowej

Parametry wytrzymałościowe (granica plastyczności, wytrzymałość na rozciąganie), uzupełnione o parametry odkształceniowe (moduł odkształcenia i wartości odkształceń granicznych), określają zależność między naprężeniami i odkształceniami:

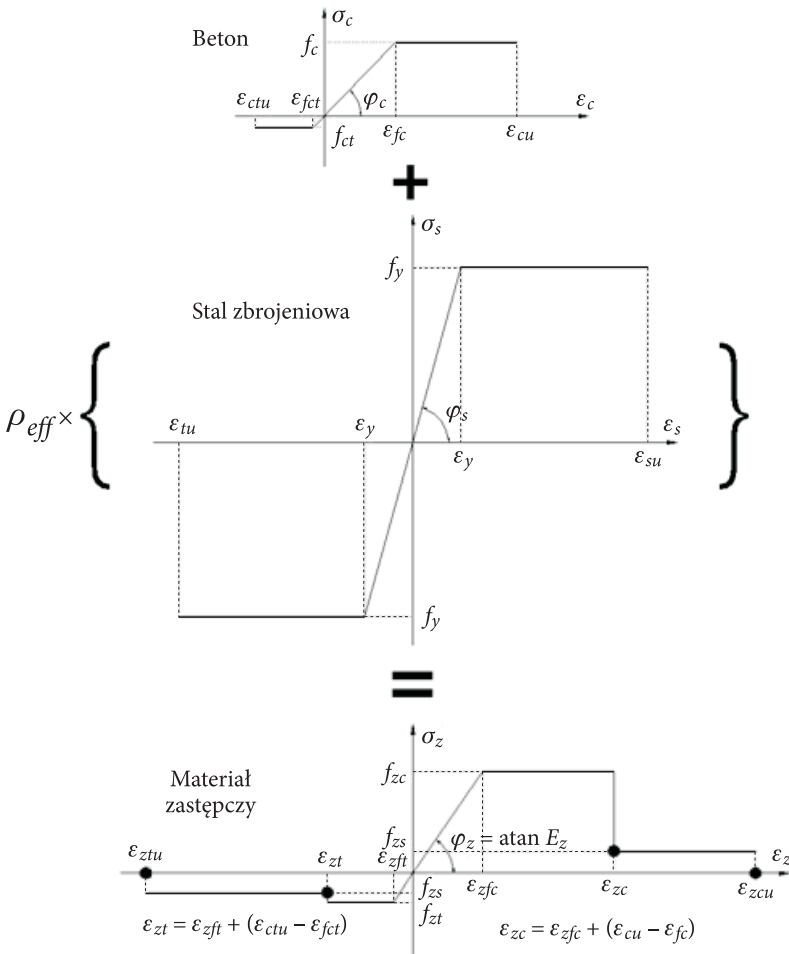
$$\sigma_s = \begin{cases} -f_y & \text{dla } -\varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq -\varepsilon_{tu} \\ E_s \cdot \varepsilon_s & \text{dla } -\varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_y \\ f_y & \text{dla } \varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su} \end{cases} \quad (8)$$

gdzie: $\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s}$ — odkształcenia graniczne w zakresie sprężystym;

- ε_{su} — odkształcenia graniczne stali na ściskanie towarzyszące wyboczeniu prętów zbrojeniowych w konstrukcji żelbetowej;
- ε_{tu} — odkształcenia graniczne stali na rozciąganie ze względu na zerwanie;
- f_y — charakterystyczna granica plastyczności stali;
- E_s — moduł sprężystości stali zbrojeniowej.

2.4. Model materiału zastępczego

Jako model materiału zastępczego przyjęto model odkształcenia, w którym wszystkie parametry odkształceniowo-wytrzymałościowe zostały zastąpione parametrami wyznaczonymi zgodnie z założeniami metody homogenizacji wg formuły (1).



Rys. 4. Ideowy schemat modelu materiału zastępczego

Na rysunku 4 przedstawiono ideowy schemat modelu jednorodnego materiału zastępczego na płaszczyźnie naprężenie–odkształcenie na podstawie przyjętych, uproszczonych modeli betonu i stali zbrojeniowej.

Model materiału zastępczego opisują następujące zależności:

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & \text{dla} & \varepsilon_z \leq -\varepsilon_{ztu} \\ -f_{zs} & \text{dla} & -\varepsilon_{ztu} \leq \varepsilon_z < -\varepsilon_{zt} \\ -f_{zt} & \text{dla} & -\varepsilon_{zt} \leq \varepsilon_z < -\varepsilon_{zft} \\ E_z \cdot \varepsilon_z & \text{dla} & -\varepsilon_{zft} \leq \varepsilon_z \leq \varepsilon_{zfc} \\ f_z & \text{dla} & \varepsilon_{zfc} < \varepsilon_z \leq \varepsilon_{zc} \\ f_{zs} & \text{dla} & \varepsilon_{zc} < \varepsilon_z \leq \varepsilon_{zcu} \\ 0 & \text{dla} & \varepsilon_z \geq \varepsilon_{zcu} \end{cases} \quad (9)$$

gdzie: $\varepsilon_{zfc} = \frac{f_{zc}}{E_z}$ — graniczne odkształcenia sprężyste przy ścisnaniu materiału zastępczego;

$\varepsilon_{zft} = \frac{f_{zt}}{E_z}$ — graniczne odkształcenia sprężyste przy rozciąganiu materiału zastępczego;

ε_{zc} — odkształcenia graniczne w zakresie maksymalnej wytrzymałości materiału zastępczego na ściskanie;

ε_{zt} — odkształcenia graniczne w zakresie maksymalnej wytrzymałości materiału zastępczego na rozciąganie;

$\varepsilon_{zcu} = \varepsilon_{su}$ — odkształcenia graniczne w zakresie minimalnej wytrzymałości materiału zastępczego na ściskanie;

$\varepsilon_{ztu} = \varepsilon_{tu}$ — odkształcenia graniczne w zakresie minimalnej wytrzymałości materiału zastępczego na rozciąganie;

f_{zc} — charakterystyczna wytrzymałość materiału zastępczego na ściskanie;

f_{zt} — charakterystyczna wytrzymałość materiału zastępczego na rozciąganie;

f_{zs} — minimalna wytrzymałość materiału zastępczego na ściskanie/rozciąganie;

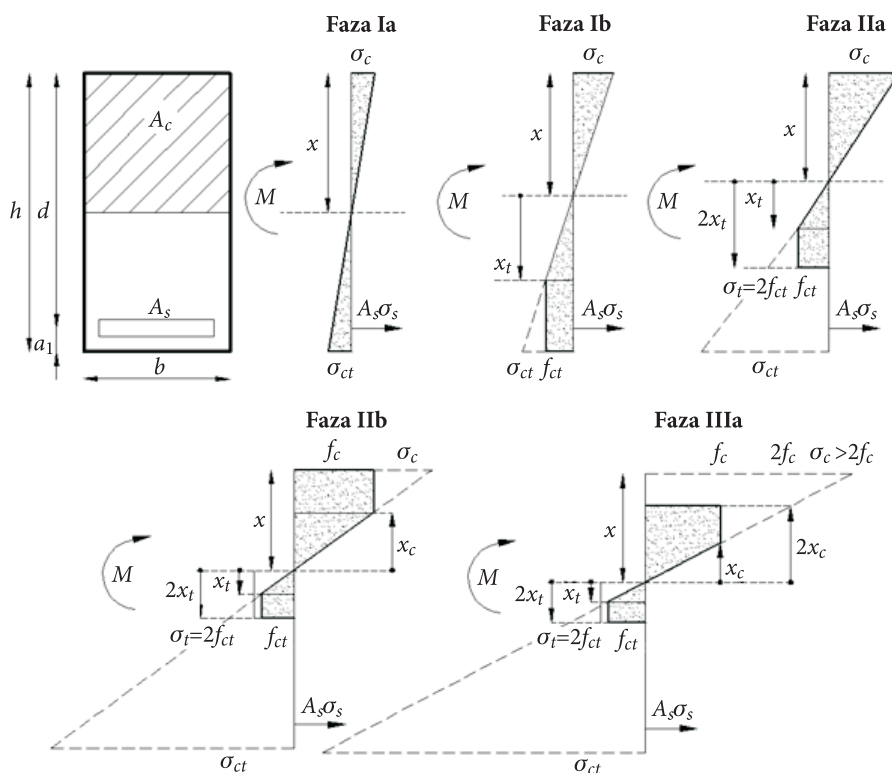
E_z — moduł odkształcenia materiału zastępczego.

3. Weryfikacja modelu materiału zastępczego

Weryfikację modelu materiału zastępczego przeprowadzono na podstawie obliczeń analitycznych. Zawierają one analizę zależności moment–krzywizna dla przekroju żelbetowego i przekroju z materiału zastępczego.

3.1. Zależność moment–krzywizna dla żelbetowego przekroju poprzecznego

Zależność moment–krzywizna dla przekroju żelbetowego wyznaczono na podstawie analizy faz pracy zginanego przekroju przy założeniu sprężysto-idealnie plastycznego rozkładu naprężenia w betonie, z uwzględnieniem ograniczonej odkształcalności betonu rozciąganego (rys. 5).



Rys. 5. Wykresy naprężeń w fazach pracy przekroju żelbetowego

W fazie *Ia* wpływ na nośność przekroju mają naprężenia sprężyste w strefie ściskanej i strefie rozciąganej betonu oraz naprężenia sprężyste w stali rozciąganej. W fazie *Ib* nośność przekroju określają naprężenia sprężyste w strefie ściskanej betonu oraz osiągnięcie wytrzymałości betonu na rozciąganie w strefie rozciąganej betonu i naprężenia sprężyste w stali rozciąganej. W fazie *IIa* następuje zarysowanie i wyłączenie z pracy części strefy rozciąganej, a nośność tej strefy zapewnia funkcjonowanie zbrojenia rozciąganego w zakresie sprężystym, podczas gdy w strefie ściskanej betonu naprężenia pozostają sprężyste. Natomiast w fazie *IIb* w strefie

ściskanej betonu następuje osiągnięcie wytrzymałości betonu na ściskanie, a naprężenia w zbrojeniu rozciągającym początkowo sprężyste (zakres 1) mogą osiągnąć granicę plastyczności (zakres 2). W fazie *IIIa* zostaje wyczerpana nośność betonu na ściskanie, następuje zmniejszenie wysokości przekroju pracującego na ściskanie i rozciąganie, a naprężenia w zbrojeniu rozciągającym mogą być sprężyste (zakres 1) lub osiągnąć granicę plastyczności (zakres 2).

W tabeli 1 zamieszczono zależności statyczno-wytrzymałościowe oraz formuły określające moment zginający i krzywiznę wraz z określeniem parametru sterującego kinematyką płaskiego przekroju i warunków ograniczających w poszczególnych fazach pracy zginanego przekroju żelbetowego.

TABELA 1

Zależności statyczno-wytrzymałościowe i formuły określające moment zginający i krzywiznę w fazach pracy przekroju żelbetowego

FAZA *Ia*

warunek	$0 \leq \sigma_{ct} \leq f_{ct}$
x	$x = \frac{\frac{1}{2}bh^2 + \alpha_e A_s d}{bh + \alpha_e A_s}, \quad \alpha_e = \frac{E_s}{E_c}$
I	$I_{Ia} = \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{3}b(h-x)^3 + \alpha_e A_s (d-x)^2$
σ_c	$\sigma_c = \sigma_{ct} \frac{x}{h-x}$
σ_s	$\sigma_s = \alpha_e \sigma_{ct} \frac{d-x}{h-x}$
M	$M_{Ia} = \frac{1}{3}\sigma_c bx^2 + \frac{1}{3}\sigma_{ct} b(h-x)^2 + \sigma_s A_s (d-x)$
κ	$\kappa_{Ia} = \frac{M_{Ia}}{E_c I_{Ia}} = \frac{\sigma_{ct}}{E_c (h-x)}$

FAZA *Ib*

warunek	$f_{ct} \leq \sigma_{ct} \leq 2f_{ct}$
x	$x = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{b(A-1)}, \quad 0 \leq x \leq x_{Ia,max}$ $A = 2 \frac{f_{ct}}{\sigma_{ct}} - \frac{f_{ct}^2}{\sigma_{ct}^2}, \quad B = Abh + \alpha_e A_s, \quad C = \frac{1}{2}Abh^2 + \alpha_e A_s d$ $\Delta = B^2 - 2(A-1)Cb$
x_t	$x_t = (h-x) \frac{f_{ct}}{\sigma_{ct}}$

σ_c	$\sigma_c = \sigma_{ct} \frac{x}{h-x}$
σ_s	$\sigma_s = \alpha_e \sigma_{ct} \frac{d-x}{h-x}$
M	$M_{lb} = \frac{1}{3} \sigma_c b x^2 + \frac{1}{3} f_{ct} b x_t^2 + \frac{1}{2} f_{ct} b (h-x-x_t)(h-x+x_t) + \sigma_s A_s (d-x)$
κ	$\kappa_{lb} = \frac{\sigma_{ct}}{E_c (h-x)}$

FAZA IIa

warunek	$\sigma_{c,lb,max} \leq \sigma_c \leq f_c, \quad \sigma_{c,lb,max} = 2 f_{ct} \frac{x_{lb,max}}{h-x_{lb,max}}$
x	$x = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}, \quad 0 \leq x \leq x_{lb,max}$ $A = \frac{1}{2} b \left(3 \frac{f_{ct}^2}{\sigma_c^2} - 1 \right), \quad B = \alpha_e A_s, \quad C = \alpha_e A_s d$ $\Delta = B^2 - 4AC$
x_t	$x_t = x \frac{f_{ct}}{\sigma_c}$
σ_s	$\sigma_s = \alpha_e \sigma_c \frac{d-x}{x} \leq f_y - \text{zakres 1}$
M	$M_{IIa,z1} = \frac{1}{3} \sigma_c b x^2 + \frac{1}{3} f_{ct} b x_t^2 + \frac{3}{2} f_{ct} b x_t^2 + \sigma_s A_s (d-x)$
σ_s	$\sigma_s = \alpha_e \sigma_c \frac{d-x}{x} > f_y - \text{zakres 2}, \quad \sigma_s = f_y$
x	$x = \frac{A_s f_y}{\frac{1}{2} \sigma_c \left(1 - 3 \frac{f_{ct}^2}{\sigma_c^2} \right) b}, \quad 0 \leq x \leq x_{IIa,z1,max}$
x_t	$x_t = x \frac{f_{ct}}{\sigma_c}$
M	$M_{IIa,z2} = \frac{1}{3} \sigma_c b x^2 + \frac{1}{3} f_{ct} b x_t^2 + \frac{3}{2} f_{ct} b x_t^2 + f_y A_s (d-x)$
κ	$\kappa_{IIa} = \frac{\sigma_c}{E_c x}$

FAZA IIb

warunek	$0 < x_c \leq x_{IIa,max}$
x_t	$x_t = x_c \frac{f_{ct}}{f_c}$
x	$x = \frac{\frac{1}{2} \frac{f_c^2}{f_{ct}} bx_t + \frac{3}{2} f_{ct} bx_t + \alpha_e A_s \frac{f_{ct}}{x_t} d}{f_c b + \alpha_e A_s \frac{f_{ct}}{x_t}}$
σ_c	$f_c \leq \sigma_c = f_c \frac{x}{x_c} \leq 2f_c$
σ_s	$\sigma_s = \alpha_e f_{ct} \frac{d-x}{x_t} \leq f_y$ - zakres 1
M	$M_{IIb,z1} = \frac{1}{2} f_c b (x - x_c)(x + x_c) + \frac{1}{3} f_c bx_c^2 + \frac{1}{3} f_{ct} bx_t^2 + \frac{3}{2} f_{ct} bx_t^2 + \sigma_s A_s (d - x)$
σ_s	$\sigma_s = \alpha_e f_{ct} \frac{d-x}{x_t} \geq f_y$ - zakres 2, $\sigma_s = f_y$
x	$x = \frac{\frac{1}{2} \frac{f_c^2}{f_{ct}} bx_t + \frac{3}{2} f_{ct} bx_t + A_s f_y}{f_c b}$
σ_c	$f_c \leq \sigma_c = f_c \frac{x}{x_c} \leq 2f_c$
M	$M_{IIb,z2} = \frac{1}{2} f_c b (x - x_c)(x + x_c) + \frac{1}{3} f_c bx_c^2 + \frac{1}{3} f_{ct} bx_t^2 + \frac{3}{2} f_{ct} bx_t^2 + f_y A_s (d - x)$
κ	$\kappa_{IIb} = \frac{f_c}{E_c x_c}$

FAZA IIIa

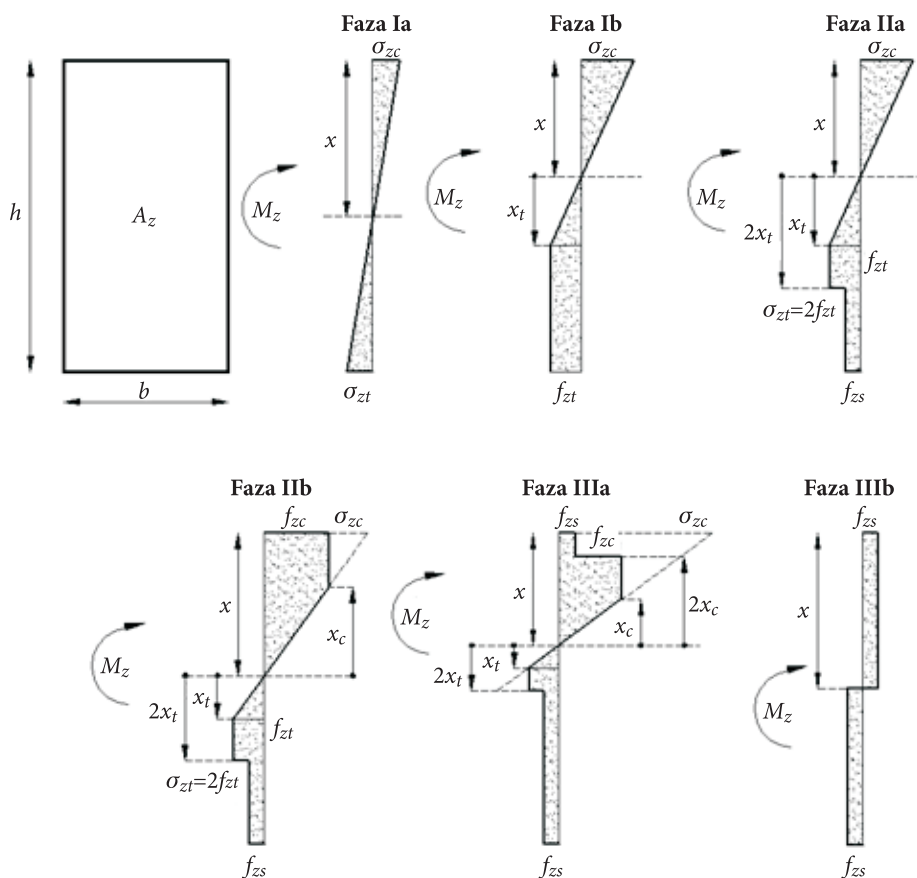
warunek	$0 < x_c \leq 0,5x_{IIb,max}$
x_t	$x_t = x_c \frac{f_{ct}}{f_c}$
x	$x = x_{IIb,max}$
σ_c	$\sigma_c = f_c \frac{x}{x_c} > 2f_c$
σ_s	$\sigma_s = \alpha_e f_{ct} \frac{d-x}{x_t} \leq f_y$ - zakres 1

M	$M_{IIc,z1} = \frac{11}{6} f_c b x_c^2 + \frac{11}{6} f_{ct} b x_t^2 + \sigma_s A_s (d - x)$
σ_s	$\sigma_s = \alpha_e f_{ct} \frac{d-x}{x_t} \geq f_y - \text{zakres 2}, \quad \sigma_s = f_y$
M	$M_{IIIc,z1} = \frac{11}{6} f_c b x_c^2 + \frac{11}{6} f_{ct} b x_t^2 + f_y A_s (d - x)$
κ	$\kappa_{IIIa} = \frac{f_c}{E_c x_c}$

3.2. Zależność moment–krzywizna dla przekroju z materiału zastępczego

Zależność moment–krzywizna dla przekroju z materiału zastępczego wyznaczono na podstawie analizy faz pracy jednorodnego przekroju zginanego przy założeniu sprężysto-idealnie plastycznego rozkładu naprężenia o zróżnicowanych wytrzymałościach materiału na ściskanie i rozciąganie oraz z uwzględnieniem nieograniczonej odkształcalności materiału na rozciąganie (rys. 6). W fazie *Ia* nośność przekroju określają naprężenia sprężyste w strefie ściskanej i strefie rozciąganej przekroju. W fazie *Ib* naprężenia w strefie ściskanej pozostają sprężyste, a naprężenia w strefie rozciąganej osiągają wartość wytrzymałości materiału zastępczego na rozciąganie. W fazie *IIa* naprężenia w strefie ściskanej pozostają sprężyste, a odkształcenia w strefie rozciąganej przekraczają wartość odkształceń granicznych materiału zastępczego na rozciąganie, wówczas w dolnej strefie przekroju pojawiają się naprężenia równe minimalnej wytrzymałości materiału zastępczego. W fazie *IIb* naprężenia ściskające osiągają wytrzymałość materiału zastępczego na ściskanie. W fazie *IIIa* odkształcenia w strefie ściskanej przekraczają odkształcenia graniczne materiału zastępczego na ściskanie, powstaje strefa z minimalną wytrzymałością materiału zastępczego. W fazie *IIIb* zostaje osiągnięty teoretyczny stan nośności granicznej przekroju, którą określają sztywno-plastyczne rozkłady naprężeń równych minimalnej wytrzymałości materiału zastępczego.

W tabeli 2 przedstawiono zależności statyczno-wytrzymałościowe oraz formuły określające moment zginający i krzywiznę wraz z określeniem parametru sterującego kinematyką płaskiego przekroju i warunków ograniczających w poszczególnych fazach pracy zginanego przekroju z materiału zastępczego.



Rys. 6. Wykresy naprężeń w fazach pracy przekroju z materiału zastępczego

TABELA 2

Zależności statyczno-wytrzymałościowe i formuły określające moment zginający i krzywiznę w fazach pracy przekroju z materiału zastępczego

FAZA Ia

warunek	$0 \leq \sigma_{zt} \leq f_{zt}$
x	$x = \frac{h}{2}$
I	$I_{Ia} = \frac{bx^3}{3} + \frac{b(h-x)^3}{3} = \frac{bh^3}{12}$
M	$M_{Ia} = \sigma_{zt} \frac{I_{Ia}}{h-x}$
κ	$\kappa_{Ia} = \frac{M_{Ia}}{E_z I_{Ia}} = \frac{\sigma_{zt}}{E_z (h-x)}$

FAZA Ib

warunek	$f_{zt} \leq \sigma_{zt} \leq 2f_{zt}$
x	$x = h \frac{A \pm \sqrt{A}}{A-1}, \quad 0 \leq x \leq x_{Ia,max}$ $A = 2 \frac{f_{zt}}{\sigma_{zt}} - \frac{f_{zt}^2}{\sigma_{zt}^2}$
x_t	$x_t = (h-x) \frac{f_{zt}}{\sigma_{zt}}$
σ_{zc}	$\sigma_{zc} = \sigma_{zt} \frac{x}{h-x}$
M	$M_{Ib} = \frac{1}{3} \sigma_{zc} b x^2 + \frac{1}{3} f_{zt} b x_t^2 + \frac{1}{2} f_{zt} b (h-x-x_t)(h-x+x_t)$
κ	$\kappa_{Ib} = \frac{\sigma_{zt}}{E_z(h-x)}$

FAZA IIa

warunek	$\sigma_{zc,max,Ib} \leq \sigma_{zc} \leq f_{zc}$
x_t	$x_t = x_c \frac{f_{zt}}{\sigma_{zc}}$
x	$x = h \frac{f_{zs}}{\frac{1}{2} \sigma_{zc} - \frac{3}{2} \frac{f_{zt}^2}{\sigma_{zc}^2} + f_{zs} \left(1 + 2 \frac{f_{zt}}{\sigma_{zc}} \right)}$
M	$M_{IIa} = \frac{1}{3} \sigma_{zc} b x^2 + \frac{11}{6} f_{zt} b x_t^2 + \frac{1}{2} f_{zs} b (h-x-2x_t)(h-x+2x_t)$
κ	$\kappa_{IIa} = \frac{\sigma_{zc}}{E_z x}$

FAZA IIb

warunek	$f_{zc} \leq \sigma_{zc} \leq 2f_{zc}$
x	$x = h \frac{f_{zs}}{f_{zc} - \frac{1}{2} \frac{f_{zc}^2}{\sigma_{zc}} - \frac{3}{2} \frac{f_{zt}^2}{\sigma_{zc}^2} + f_{zs} \left(1 + 2 \frac{f_{zt}}{\sigma_{zc}} \right)}$
x_t	$x_t = x \frac{f_{zt}}{\sigma_c}$
M	$M_{IIb} = \frac{1}{3} f_{zc} b x_c^2 + \frac{1}{2} f_{zc} b (x-x_c)(x+x_c) + \frac{11}{6} f_{zt} b x_t^2 + \frac{1}{2} f_{zs} b (h-x-2x_t)(h-x+2x_t)$

κ	$\kappa_{IIb} = \frac{\sigma_{zc}}{E_z x}$
----------	--

FAZA IIIa

warunek	$0 < x_c \leq 0,5x_{IIb,max}$
x_t	$x_t = x_c \frac{f_{zt}}{f_{zc}}$
x	$x = \frac{h}{2} - \left(\frac{3}{4} \frac{f_{zc}}{f_{zs}} - 1\right)x_c + \left(\frac{3}{4} \frac{f_{zt}}{f_{zs}} - 1\right)x_t$
σ_{zc}	$\sigma_{zc} = f_{zc} \frac{x}{x_c} > 2f_{zc}$
M	$M_{IIIa} = \frac{11}{6} f_{zc} b x_c^2 + \frac{1}{2} f_{zs} b (x - 2x_c)(x + 2x_c) + \frac{11}{6} f_{zt} b x_t^2 +$ $+ \frac{1}{2} f_{zs} b (h - x - 2x_t)(h - x - 2x_t)$
κ	$\kappa_{IIIa} = \frac{\sigma_{zc}}{E_z x} = \frac{f_{zc}}{E_z x_c}$

FAZA IIIb

warunek	$x_{IIIa,max} \geq x_c \rightarrow 0$
x	$x = 0,5h$
M	$M_{IIIb} = \frac{1}{2} f_{zs} b x^2 + \frac{1}{2} f_{zs} b (h - x)^2 = \frac{1}{4} f_{zs} b h^2$
κ	$\kappa_{IIIa} \leq \kappa_{IIIb} = \lim_{x_c \rightarrow 0} \kappa_{IIIa} \rightarrow \infty$

3.3. Analiza porównawcza zależności moment–krzywizna w przekroju poprzecznym

Analizie porównawczej poddano przekroje żelbetowe i z materiału zastępczego o wymiarach $b \times h = 20 \times 40$ cm.

W przekrojach żelbetowych zastosowano klasę betonu C20/25 o wytrzymałościach na ściskanie $f_c = 20$ MPa i rozciąganie $f_{ct} = 2,2$ MPa, module odkształcenia $E_c = 30$ GPa oraz granicy plastyczności stali $f_y = 420$ MPa i module odkształcenia $E_s = 200$ GPa, przy wykorzystaniu trzech wartości stopnia zbrojenia $\rho = 0,005; 0,01; 0,015$. W rozważaniach pominięto udział zbrojenia poprzecznego. W obliczeniach uwzględniono minimalną wytrzymałość materiału zastępczego na rozciąganie przy zginaniu, wyprowadzoną przy założeniu równowagi nośności przekroju żelbetowego pojedynczo zbrojonego i przekroju zastępczego wg zależności:

$$f_{zs} = \frac{2\rho(1 - \rho\beta_f)}{(\alpha_h - \rho\beta_f)^2} f_y, \quad (10)$$

gdzie: $\beta_f = \frac{f_c}{f_y}$ — jest stosunkiem wytrzymałości betonu do granicy plastyczności stali zbrojeniowej;

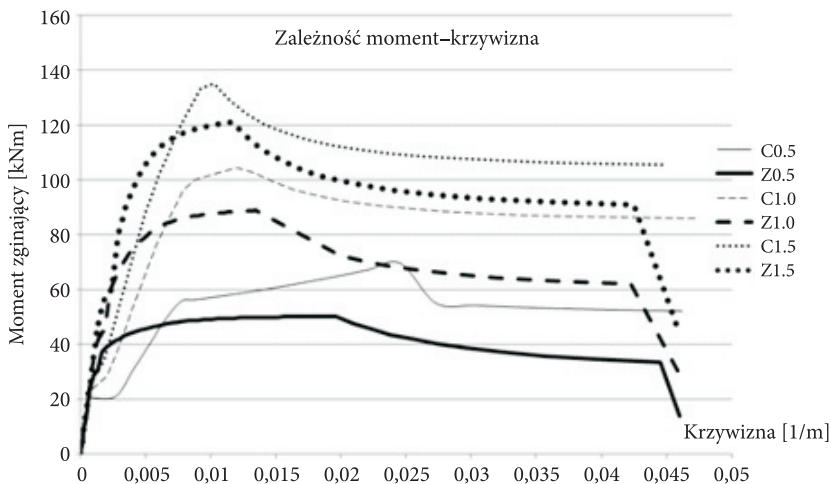
$\alpha_h = \frac{h}{d}$ — jest stosunkiem wysokości rozważanego przekroju

do wysokości użytecznej rozważanego przekroju, przy założeniu odległości środka ciężkości zbrojenia od dolnego brzegu przekroju $a = 2,5$ cm.

Do analizy przyjęto następujące rodzaje przekrojów żelbetowych: przekrój oznaczony jako C0.5 — dla stopnia zbrojenia 0,5%, przekrój oznaczony jako C1.0 — dla stopnia zbrojenia 1,0%, przekrój oznaczony jako C1.5 — dla stopnia zbrojenia 1,5%.

Przekrojom żelbetowym C0.5, C1.0 i C1.5 odpowiadają przekroje z materiału zastępczego oznaczone jako Z0.5, Z1.0 i Z1.5, dla których wytrzymałości na ścisnienie i rozciąganie oraz moduł odkształcenia są określone zgodnie z założeniami metody homogenizacji przekroju żelbetowego:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{zc} = f_c + \rho_{eff} f_y \\ f_{zt} = f_{ct} + \rho_{eff} f_y \\ E_z = E_c + \rho_{eff} E_s \end{array} \right\} \text{ dla } \rho_{eff} = \rho. \quad (11)$$



Rys. 7. Zależność moment-krzywizna dla przekroju żelbetowego i z materiału zastępczego

Na rysunku 7 przedstawiono porównanie zależności moment–krzywizna określone dla przekrojów żelbetowego i zastępczego.

Na podstawie przeprowadzonej analizy porównawczej uzyskujemy potwierdzenie, że przebieg zależności moment–krzywizna w przypadku zastosowania modelu przekroju jednorodnego z materiału zastępczego pozwala na uzyskanie dobrej i zadowalającej zgodności wyników z wynikami dla przekroju żelbetowego.

4. Zakończenie

Określenie parametrów hipotetycznego, jednorodnego materiału zastępczego przeprowadzono zgodnie z zasadami teorii homogenizacji. Przedstawiono metodę wyznaczenia parametrów materiału zastępczego: wytrzymałości na ściskanie i rozciąganie, modułu odkształcenia oraz odkształceń granicznych, odpowiadających wartości energii zniszczenia betonu odpowiednio dla ściskania i rozciągania.

Przeprowadzono weryfikację modelu jednorodnego materiału zastępczego metodą analityczną. Weryfikacja dotyczyła zależności moment–krzywizna przekroju żelbetowego oraz przekroju jednorodnego z materiału zastępczego. Określono zależności statyczno-wytrzymałościowe oraz formuły określające moment zginający i krzywiznę w fazach pracy przekroju żelbetowego. Na konkretnym przykładzie obliczeniowym stwierdzono, że zależność moment–krzywizna dla przekroju jednorodnego z materiału zastępczego z zadowalającą zgodnością aproksymuje zależność moment–krzywizna dla przekroju żelbetowego. Fakt ten upoważnia do wnioskowania o poprawności stosowania modelu materiału zastępczego z odpowiednio określonymi parametrami wytrzymałościowymi i odkształceniowymi w analizach elementów żelbetowych.

Praca powstała w wyniku realizacji zadań badawczych w ramach pracy badawczej statutowej nr 855, prowadzonej w Wydziale Inżynierii Lądowej i Geodezji Wojskowej Akademii Technicznej im. Jarosława Dąbrowskiego.

Artykuł wpłynął do redakcji 22.07.2015 r. Zweryfikowaną wersję po recenzjach otrzymano 2.10.2015 r.

LITERATURA

- [1] COMBESURE CH., DUMONTET H., VOLDOIRE F., *Homogenised constitutive model coupling damage and debonding for reinforced concrete structures under cyclic solicitations*, International Journal of Solids and Structures, 50, 2013, 3861-3874.
- [2] KELLIHER D., SUTTON-SWABY K., *Stochastic representation of blast load damage in a reinforced concrete building*, Structural Safety, 34, 2011, 407-417.
- [3] KNAUFF i in., *Podstawy projektowania konstrukcji żelbetowych i sprężonych według Eurokodu 2*, Sekcja Konstrukcji Betonowych KILiW PAN, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław, 2006.

- [4] LUCCIONI B.M., AMBROSINI R.D., DANESI R.F., *Analysis of building collapse under blast loads*, Engineering Structures, 26, 2004, 63-71.
- [5] STRZELECKI T., AURIAULT J.L., BAUER J., KOSTECKI ST., PUŁA W., *Mechanika ośrodków niejednorodnych. Teoria homogenizacji*, pod redakcją T. Strzeleckiego, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław, 1996.
- [6] Eurocod 2, *Projektowanie konstrukcji z betonu, Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków*, Polski Komitet Normalizacyjny, Warszawa, 2008.

J. SIWIŃSKI, A. STOLARSKI

Model of substitute material in the analysis of the bent reinforced concrete cross-section

Abstract. The paper presents the methodology for determination of strength and deformation parameters for a hypothetical model of homogeneous substitute material in the reinforced concrete cross section subjected to pure bending. These parameters were determined on the basis of the proposed homogenizing function using the effective reinforcement ratio of a reinforced concrete cross-section. A comparative analysis of the moment–curvature relation for the substitute cross-section and reinforced concrete bent cross-section was carried out.

Keywords: civil engineering, building structures, bent reinforced concrete cross-section, homogeneous substitute material, homogenization

DOI: 10.5604/12345865.1186327

